

Berechenbarkeit und Komplexitätstheorie WS 2009/10 Übungsblatt 7

Besprechung: in der 4. und 5. Kalenderwoche

Aufgabe 1 (Definitionen)

Geben Sie die Definition der folgenden Begriffe und Konzepte an bzw. beschreiben Sie:

- (a) Definieren Sie $\text{DTIME}(t(n))$, $\text{FDTIME}(t(n))$ und $\text{NTIME}(t(n))$.
- (b) Definieren Sie die Klassen P, FP, NP und co-NP.

Aufgabe 2 ($L_{k\text{-Clique}}$)

Für beliebiges aber festes $k \geq 2$ sei

$$L_{k\text{-Clique}} := \{ \langle G \rangle \mid G \text{ ist ein Graph, der eine Clique der Größe } \geq k \text{ enthält} \}.$$

Zeigen Sie: $L_{k\text{-Clique}} \in \text{P}$.

Hinweis: Es genügt, Cliquen der Größe exakt k zu finden. Man schätze die Anzahl der Cliquen ab.

Aufgabe 3 (Beliebte Fehlschlüsse mit Polynomialzeitreduktionen)

Zeigen Sie, eventuell durch Angabe von „Gegenbeispielen“, dass folgende Aussagen falsch sind.

- (a) Aus $L \in \text{P}$ und $L \leq_p L'$ folgt stets $L' \in \text{P}$.
- (b) Aus $L \leq_p L'$ und $L' \leq_p L$ folgt stets $L = L'$.
- (c) Aus $L \leq_p L_{\text{Clique}}$ folgt stets $L \in \text{NPC}$.

Hinweis: Für (c) setze man $L_{\text{Clique}} \in \text{NPC}$ als bekannt voraus.

Aufgabe 4 (Konstruktion von NTM für verwandte „Packprobleme“)

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in NP liegen.

- (a) $L_{\text{Partition}} := \{ (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{N}^m \mid m \geq 2, \exists I \subseteq \{1, \dots, m\}: \sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in \bar{I}} a_j \}$

Ein Element von $L_{\text{Partition}}$ repräsentiert m Gegenstände mit Gewichten a_1, \dots, a_m , die man in zwei disjunkte „Haufen“ mit gleichem Gesamtgewicht aufteilen kann.

- (b) $L_{\text{Rucksack}} := \{ (a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_m, b, k) \in \mathbb{N}^{2m+2} \mid m \geq 1, \text{ es gibt } I \subseteq \{1, \dots, m\} \text{ mit } \sum_{i \in I} a_i \leq b \text{ und } \sum_{i \in I} c_i \geq k \}$

Ein Element von L_{Rucksack} repräsentiert einen Rucksack mit Volumen b , m Gegenstände mit Volumina a_1, \dots, a_m und (Nutzen-)Werten c_1, \dots, c_m sowie eine Nutzenschranke k , so dass einige der Gegenstände mit einem Gesamtnutzen $\geq k$ zusammen in den Rucksack passen.

Hinweis: Wie üblich müssen natürliche Zahlen binär dargestellt werden. Der Lesbarkeit wegen wurde z.B. in (a) anstelle des Wortes $\text{bin}(a_1) \# \dots \# \text{bin}(a_m)$ die Tupelnotation (a_1, \dots, a_m) benutzt.

Aufgabe 5 (Konstruktion von NTM für Sprachen in NP)

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in NP liegen.

$$(a) \quad L_{\text{Binpacking}} := \{(a_1, \dots, a_m, b, k) \in \mathbb{N}^{m+2} \mid \exists r_1, \dots, r_m \in \{1, \dots, k\} : \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ r_i = h}} a_i \leq b \\ \text{für } 1 \leq h \leq k\}$$

Ein Element von $L_{\text{Binpacking}}$ repräsentiert m Objekte mit Volumina a_1, \dots, a_m und k Behälter („bins“) mit jeweils Kapazität b , so dass die m Objekte in die k Behälter gepackt werden können. $r_i = h$ heißt, dass das Objekt Nr. i im Behälter Nr. h sitzt.

$$(b) \quad L_{\text{Graph-Coloring}} := \{(\langle G \rangle, k) \mid G = (V, E) \text{ ist Graph, } k \in \mathbb{N} \text{ und es gibt eine Funktion } c : V \rightarrow \{1, \dots, k\} \text{ mit } c(i) \neq c(j) \text{ für } (i, j) \in E\}$$

Ein Element $(\langle G \rangle, k)$ von $L_{\text{Graph-Coloring}}$ ist ein Graph, der mit k Farben färbbar ist.

$$(c) \quad L_{\text{Subgraph-Iso}} := \{G_1 \# G_2 \mid G_1 = (V_1, E_1), G_2 = (V_2, E_2) \text{ sind Graphen, es gibt injektive Funktion } g : V_1 \rightarrow V_2 \text{ mit } (g(u), g(v)) \in E_2 \text{ für } (u, v) \in E_1\}.$$

Die Elemente $G_1 \# G_2$ repräsentieren Graphen G_1, G_2 derart, dass G_1 bis auf Isomorphie ein Teilgraph von G_2 ist.

Hinweis: Wie üblich müssen natürliche Zahlen binär dargestellt werden. Dies gilt auch für die Ausgabe der Ratewortmaschine. Der Lesbarkeit wegen wurde z.B. in (a) anstelle des Wortes $\text{bin}(a_1) \# \dots \# \text{bin}(a_m) \# \text{bin}(b) \# \text{bin}(k)$ die Tupelnotation (a_1, \dots, a_m, b, k) benutzt.

Aufgabe 6 (Reduktionen)

Geben Sie für die folgenden Reduktionen jeweils eine Reduktionsfunktion an und zeigen Sie deren Korrektheit:

$$(a) \quad L_{\text{Partition}} \leq_p L_{\text{Rucksack}}$$

$$(b) \quad L_{\text{Partition}} \leq_p L_{\text{Binpacking}}$$

$$(c) \quad L_{\text{Clique}} \leq_p L_{\text{Subgraph-Iso}}$$

Aufgabe 7 (Ein paar Fragen)

Sind die Aussagen korrekt?

1. Es gilt $\{L \mid L \text{ ist rekursiv}\} \subseteq P \cup NP$.
2. Es gilt $P \subseteq \{L \mid L \text{ ist rekursiv}\}$.
3. Es gilt $NP \subseteq \{L \mid L \text{ ist rekursiv}\}$.
4. Es gilt $L_{\text{IS}} \in NP$.
5. Falls $L_{\text{VC}} \in P$, dann gilt $L_{\text{Clique}} \in P$.
6. Wenn $L \leq_p L'$ und $L' \in P$, dann gilt $L \in P$.
7. L_{Clique} ist nicht polynomialzeit-reduzierbar auf $L_{\text{Subgraph-Iso}}$.
8. Das Rucksackproblem hat keinen Polynomialzeitalgorithmus.