TU Ilmenau, Fakultät IA
Institut TI, Fachgebiet Automaten und Formale Sprachen
Dr. E. Hübel

Formale Sprachen

und

Komplexität

Übung SS2009

Aufgabe 1: Eigenschaften von Abbildungen

Gegeben sind zwei Mengen A und B.

Erläutern Sie die Begriffe **surjektiv**, **injektiv** und **bijektiv** bzgl. der Abbildung $\varphi : A \to B$.

Aufgabe 2: Abzählbarkeit

Man beweise die Abzählbarkeit der Menge $A \times B$ mit abzählbaren Mengen A und B.

Aufgabe 3: Überabzählbarkeit

Man beweise, dass die Menge aller reellen Zahlen im offenen Interval] 0,1 [überabzählbar ist.

Aufgabe 4: Potenzmenge

Sei M eine Menge mit n Elementen. Man ermittle die Mächtigkeit der Potenzmenge von M^k für gegebenes $k \in I\!N$ und berechne die Menge 2^{M^k} für $M = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$.

Aufgabe 5: Formale Beschreibung von Sprachen

Sind folgende Mengen Sprachen?

(a) $M_a = \{(m, n) \mid m, n \in I\!N, m \text{ teilt } n\}$.

(b) $M_b = \{0^m 1^n \mid m, n \in I\!N, m \text{ teilt } n\}$.

(c) $M_c = \{\mathtt{bin}(m)\#\mathtt{bin}(n) \mid m, n \in I\!N, m \text{ teilt } n\}$.

Aufgabe 6: Potenzen von Sprachen

Für die Sprache $L = \{\mathtt{a}^n \mid n \in I\!N, n \text{ gerade}\}$ ermittle man

a) L^2, L^3, L^*, L^+

b) $\overline{L}$, $(\overline{L})^2$, $(\overline{L})^*$, $(\overline{L})^+$

Aufgabe 7: Vekettung von Sprachen

Man berechne $L_1\, L_2$ und $L_2\, L_1$ für folgende Sprachen $L_1,\ L_2 \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$.

a) $L_1 = \{\varepsilon, \mathtt{a}, \mathtt{a}\,\mathtt{b}^2, \mathtt{c}\,\mathtt{a}\}$, $L_2 = \{\mathtt{a}^n \mid n \geq 0\}$

b) $L_1 = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^n \mid n \in I\!N\}$, $L_2 = \{\mathtt{b}^2\,\mathtt{c}^n \mid n \geq 0\}$

Aufgabe 8: **Regularität von Sprachen**

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ regulär sind, indem Sie zu jeder einen DFA konstruieren, der sie akzeptiert.

$$L_1 = \{a_1 \dots a_{2n} \mid n \in \mathbb{N}, \forall i, 1 \leq i \leq n{:}\, a_{2i-1} = a_{2i} \in \Sigma\}$$

$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } \mathtt{a\,b\,c\,b}\}$$

$$L_3 = \left\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ beginnt mit } \mathtt{a}\,(\mathtt{a\,b\,c})^k \text{ für ein } k \geq 1\right\}$$

$$L_4 = \left\{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet mit } \mathtt{a}\,(\mathtt{a\,b\,c})^k \text{ für ein } k \geq 1\right\}$$

Aufgabe 9: **DFA → Reguläre Sprache**

Welche Sprache erkennt folgender DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0\})$ mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$ und δ gegeben als Graph?

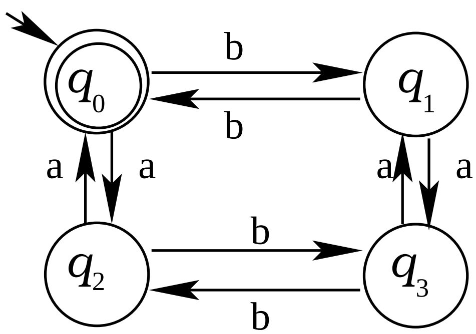

Bild 1: DFA M_1

Aufgabe 10: **NFA → Regulärer Ausdruck**

Geben Sie für die vom NFA M akzeptierte Sprache L_M den regulären Ausdruck $r(L_M)$ an.

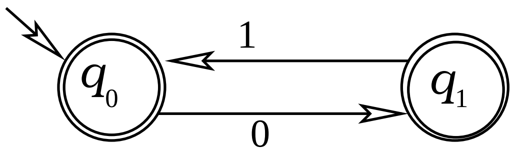

Bild 2: M_2

Aufgabe 11: **DFA, NFA, L^*, L^+**

Gegeben sind folgende Sprachen $L_1 = \{\mathtt{a\,b}, \mathtt{a}\}$ und $L_2 = \{\mathtt{a\,a}, \mathtt{b\,a\,a}\}$.

a) Entwerfen Sie DFAs $M(L_1)$ und $M(L_2)$.

b) Geben Sie die Sprachen $L_a = L_1^*$ und $L_b = L_2^+$ an.

c) Entwerfen Sie DFAs $M(L_a)$ und $M(L_b)$.

d) Entwerfen Sie NFAs $N(L_1)$ und $N(L_2)$.

e) Konstruieren Sie nach dem Beweis der Vorlesung einen NFA $N(L_1^*) = N(L_a)$.

f) Wandeln Sie den NFA $N(L_a)$ in einen DFA $M'(L_a)$ um.

Aufgabe 12: **Pumping-Lemma für reguläre Sprachen**

Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

$$L_a = \{0^{i+1}\,1^{j+1}\,2^{i+j+1} \mid i, j \geq 0\}$$

$$L_b = \{1^j\,2^j\,0^i \mid i \geq 1, j \geq 0\}$$

Aufgabe 13: **kontextfreie Sprache → kontextfreie Grammatik**

Konstruieren Sie je eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $L(G) = L_i$ für

$$L_1 = \{\mathtt{a}^i\,\mathtt{b}^j\,\mathtt{c}^i \mid i, j \geq 0\}$$

$$L_2 = \{w\,w^R \mid w \in \Sigma^*\}$$

$$L_3 = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^m \mid n \geq m \geq 0\}$$

$$L_4 = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^m \mid n > m \geq 0\}$$

$$L_5 = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^m \mid n \geq 2 \cdot m \geq 0\}$$

$$L_6 = \{\mathtt{a}^i\,\mathtt{b}^j\,\mathtt{c}^k \mid i \neq j \text{ oder } j \neq k,\ i, j, k \geq 0\}$$

Aufgabe 14: **Grammatik → Sprache → NFA**

Gegeben sei die folgende rechtslineare Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S, A, B, C\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ und P enthält die folgenden Produktionen:

$S \to 0\,S$	$S \to 0\,A$	$A \to 0\,C$	$C \to \varepsilon$
$S \to 1\,S$	$S \to 1\,B$	$B \to 1\,C$	$C \to 0\,C$

Abkürzung für kontextfreie Grammatiken in BNF:

Statt $A \to \alpha_1, \dots, A \to \alpha_t$ schreibe $A ::= \alpha_1 \mid \dots \mid \alpha_t$.

Hier also: $S ::= 0\,S \mid 1\,S \mid 0\,A \mid 1\,B$, $A ::= 0\,C$, $B ::= 1\,C$, $C ::= 0\,C \mid \varepsilon$.

(a) Welche Sprache wird durch G beschrieben?

(b) Geben Sie ein Wort $w \in L(G)$ an, das gleichviele Nullen und Einsen hat und 3 verschiedene Ableitungen besitzt.

(c) Geben Sie den entsprechenden NFA $N(G)$ als Graph oder als Tabelle der Überführungsfunktion an.

Aufgabe 15: **Konstruktion von Kellerautomaten**

Konstruieren Sie Kellerautomaten $K(L_i)$ für die Sprachen L_i mit $1 \leq i \leq 6$ mit folgender Akzeptanz:

$L_1 = \{\mathtt{a}^i\,\mathtt{b}^j\,\mathtt{c}^i \mid i, j \geq 0\}$,	Leerer Keller
$L_2 = \{w\$w^R \mid w \in \Sigma^*\}$,	Leerer Keller
$L_3 = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^m \mid n \geq m \geq 0\}$	Leerer Keller, Endzustand
$L_4 = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^m \mid n > m \geq 0\}$	Leerer Keller
$L_5 = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^m \mid n \geq 2 \cdot m \geq 0\}$	Endzustand und leerer Keller
$L_6 = \{0^i\,1\,0^j \mid i \neq j,\ i, j \geq 0\}$	Endzustand

Aufgabe 16: **TM zum Verschieben um eine Stelle nach rechts**

Entwerfen Sie eine TM M, die das Wort $w \in \Sigma^*$ auf dem Eingabeband um eine Stelle nach rechts verschiebt und links ein B-Symbol einfügt.

Der LSK steht zu Beginn auf dem linkesten Zeichen.

Der LSK steht nach Abarbeitung auf dem eingefügten B.

Aufgabe 17: **1Bd.-TM zum Akzeptieren**

Entwerfen Sie eine deterministische 1Bd.-TM, die die Sprache
$L = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^n \mid n \in I\!N\}$ akzeptiert.

Der LSK steht zu Beginn auf dem linkesten Zeichen.

Aufgabe 18: **2Bd.-TM zum Akzeptieren**

Entwerfen Sie eine deterministische TM, die die Sprache
$L = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^n \mid n \in I\!N\}$ akzeptiert.

Der LSK steht zu Beginn auf dem linkesten Zeichen.

Aufgabe 19: **2Bd.-TM zum Akzeptieren**

Entwerfen Sie eine deterministische 2-Bd. TM, die die Sprache
$L = \{w\,w \mid w \in \{0,1\}^*\}$ akzeptiert.

Das Eingabewort steht auf dem 1. Band.

Der LSK1 steht zu Beginn auf dem linkesten Zeichen.

Aufgabe 20: **Nichtdeterministische TM zum Akzeptieren**

Entwerfen Sie eine echt nichtdeterministische TM, die die Sprache
$L = \{w\,w \mid w \in \{0,1\}^*\}$ akzeptiert.

Der LSK steht zu Beginn auf dem linkesten Zeichen.

Aufgabe 21: **TM zum Akzeptieren**

Entwerfen Sie eine TM, die die Sprache $L = \{\mathtt{a}^n\,\mathtt{b}^n\,\mathtt{c}^n \mid n \in I\!N\}$ akzeptiert.
Der LSK steht auf dem ersten linken Zeichen vom Eingabewort.
Das Band soll nach der Abarbeitung leer sein.

Aufgabe 22: **Kodierung von TMn**

Beschreibt die Zeichenkette w_i die Kodierung einer TM M_i mit $i = 1, 2$:

- $w_1 = 111\ 010010100100\ 11\ 01010010100\ \ 111$
- $w_2 = 111\ 010010010010\ 11\ 0010010100100\ 111$

Aufgabe 23: **Kodierung einer TM**

Ist die Binärdarstellung der Dezimalzahl 1 909 319 als Zeichenkette gelesen die Kodierung einer TM M.

Aufgabe 24: **Satz von RICE**

Zeigen Sie mittels **Satz von RICE** unter Angabe der Eigenschaft $\mathcal{E}$, dass die folgenden Sprachen nicht rekursiv sind:

$L_1 = \{\langle M\rangle \mid M$ hält auf mindestens 42 Eingaben$\}$

$L_2 = \{\langle M\rangle \mid M$ hält auf allen Binärdarstellungen von Primzahlen$\}$

$L_3 = \{\langle M\rangle \mid$ wenn $\mid H_M \mid$ gerade ist, dann hält M auf 1 0 1 0 1 0$\}$

$L_4 = \{\langle M\rangle \mid$ Hält M auf x und $y,$ dann auch auf $xy\}$

$L_5 = \{\langle M\rangle \mid H_M$ ist nicht rekursiv$\}$

Aufgabe 25: **Rekursive und nichtrekursive Aufzählbarkeit von Sprachen**

Sei

$$L_{2006} := \{\texttt{bin}(i) \mid 0 \leq i \leq 2006\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $L_{\text{Schnitt}} := \{\langle M\rangle \mid H_M \cap L_{2006} \neq \emptyset\}$ ist rekursiv aufzählbar.
Hinweis: Nichtdeterminismus, Universelle TM.

(b) L_{Schnitt} ist nicht rekursiv.

(c) $L_{\emptyset} := \{\langle M\rangle \mid H_M \cap L_{2006} = \emptyset\}$ ist nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 26: **Konstruktion von NTM für Spachen in** NP

Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in NP liegen.

1. $L_{\text{Part}} := \{(a_1, \ldots, a_m) \in I\!N^m \mid m \geq 2,\ \exists\, I \subseteq \{1, \ldots, m\}\colon \sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in \overline{I}} a_j\}$

   Ein Element von L_{Part} (Partitionsproblem) repräsentiert m Gegenstände mit Gewichten $a_1, \ldots, a_m$, die man in zwei disjunkte „Haufen" mit gleichem Gesamtgewicht aufteilen kann.

2. $L_{\text{RS}} := \{(a_1, \ldots, a_m, c_1, \ldots, c_m, b, k) \in I\!N^{2m+2} \mid m \geq 1,$ es gibt $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$ mit $\sum_{i \in I} a_i \leq b$ und $\sum_{i \in I} c_i \geq k\}$

   Ein Element von L_{RS} repräsentiert einen Rucksack mit Volumen b, m Gegenstände mit Volumina $a_1, \ldots, a_m$ und (Nutzen-)Werten $c_1, \ldots, c_m$ sowie eine Nutzenschranke k, so dass einige der Gegenstände mit einem Gesamtnutzen $\geq k$ zusammen in den Rucksack passen.

3. $L_{\text{BP}} := \{(a_1, \ldots, a_m, b, k) \in I\!N^{m+2} \mid \ \exists r_1, \ldots, r_m \in \{1, \ldots, k\} : \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ r_i = h}} a_i \leq b$ für $1 \leq h \leq k\}$

   Ein Element von L_{BP} repräsentiert m Objekte mit Volumina $a_1, \ldots, a_m$ und k Behältnisse („bins") mit jeweils Kapazität b, so dass die m Objekte in die k Behältnisse gepackt werden können. $r_i = h$ heißt, dass das Objekt Nr. i im Behälter Nr. h sitzt.

4. $L_{\text{Graph-Coloring}} := \{(\langle G \rangle, k) \mid G = (V, E)$ ist Graph, $k \in I\!N$ und es gibt eine Funktion $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ mit $c(i) \neq c(j)$ für $(i, j) \in E\}$

   Ein Element $(\langle G \rangle, k)$ von $L_{\text{Graph-Coloring}}$ ist ein Graph, der mit k Farben färbbar ist.

Hinweis: Wie üblich müssen natürliche Zahlen binär dargestellt werden. Der Lesbarkeit wegen wurde z.B. in (a) anstelle des Wortes $\mathtt{bin}(a_1)\# \ldots \#\mathtt{bin}(a_m)$ die Tupelnotation $(a_1, \ldots, a_m)$ benutzt.

Aufgabe 27: **k-Clique**

Für beliebiges aber festes $k \geq 2$ sei

$L_{\text{k-Clique}} := \{\langle G \rangle \mid G$ ist ein Graph, der eine Clique der Größe $\geq k$ enthält$\}$.

Zeigen Sie: $L_{\text{k-Clique}} \in \mathsf{P}$.

Hinweis: Es genügt, Cliquen der Größe exakt k zu finden. Man schätze die Anzahl der Cliquen ab.

Aufgabe 28: Rucksack*

Das Problem Rucksack* ist wie folgt beschrieben: Gegeben sind m Objekte mit den Volumen $a_1, \dots, a_m$ und ein Rucksack mit Volumen b. Ist es möglich, eine Auswahl I dieser Objekte zu treffen, so dass die ausgewählten Elemente den Rucksack exakt füllen?
Formal erhalten wir:

$$L_{\mathrm{RS}^*} = \{(a_1, \dots, a_m, b) \mid \exists I \subseteq \{1, \dots, m\} : \sum_{i \in I} a_i = b\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$, $s = a_1 + \dots + a_m$ und $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i \notin I} a_i \Leftrightarrow \sum_{i \in I} 2 \cdot a_i = s.$$

(b) Durch Angeben einer Reduktionsfunktion f:

$$L_{\mathrm{Part}} \leq_p L_{\mathrm{RS}^*}.$$

Beweisen Sie (mit (a)):

$$x \in L_{\mathrm{Part}} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\mathrm{RS}^*}$$

(c) Für $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{N}$, $s = a_1 + \dots + a_m$, $b \in \mathbb{N}$ und $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ gilt:

$$\sum_{i \in I} a_i = b \Leftrightarrow \sum_{i \in I} a_i + (2s - b) = \sum_{i \notin I} a_i + (s + b)$$

(d) Durch Angeben einer Reduktionsfunktion f:

$$L_{\mathrm{RS}^*} \leq_p L_{\mathrm{Part}}.$$

Beweisen Sie (mit (c)):

$$x \in L_{\mathrm{RS}^*} \Leftrightarrow f(x) \in L_{\mathrm{Part}}.$$