

## 2.7.4 Satz von Löwenheim-Skolem

Sei  $F$  eine geschlossene Formel in Skolemform, das heißt

$$(1) \quad F = \forall x_1 \dots \forall x_n H, \quad H \text{ quantorenfrei, } FV(H) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Dann gilt:

$$F \text{ ist erfüllbar} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gibt ein Herbrandmodell } \hat{\alpha} \text{ mit } \hat{\alpha} \models F.$$

Folgerung: Wenn  $F$  überhaupt erfüllbar ist, dann hat  $F$  ein abzählbares Modell (denn alle Herbrandstrukturen sind abzählbar).

Folgerung: Wenn man die (Un-)Erfüllbarkeit einer Formel  $F$  testen möchte, kann man sich auf Herbrandstrukturen konzentrieren.

*Beweis* des Satzes:

$$\text{Sei } F = \forall x_1 \dots \forall x_n, H \text{ quantorenfrei, } FV(H) \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}.$$

„ $\Leftarrow$ “: Trivial.

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $F$  erfüllbar. D.h.: Es gibt eine Struktur  $\alpha = (U, \varphi, \psi, \xi)$  mit  $\alpha \models F$ . Dabei kann  $\xi$ , die Interpretation für die freien Variablen, als leer angenommen werden, weil  $F$  geschlossen ist.

Wir konstruieren ein Herbrandmodell

$$(2) \quad \hat{\alpha} = (D(F), \hat{\varphi}, \hat{\psi}, \hat{\xi}),$$

wobei auch  $\hat{\xi}$  leer ist und  $\hat{\psi}$  durch die Bedingung „Herbrandstruktur“ und Definition 2.7.3 schon festgelegt ist. Nach der Folgerung aus 2.7.3 wissen wir dann:

$$(3) \quad \hat{\alpha}(t) = t, \text{ für alle Terme } t \in D(F).$$

Wir müssen also nur noch  $\hat{\psi}$  definieren, die Interpretation der Relationszeichen in  $F$ . Für ein  $k$ -stelliges Relationszeichen  $R$  und  $k$  Elemente in  $D(F)$ , also  $k$  Terme  $t_1, \dots, t_k$ , müssen wir festlegen, ob in  $\hat{\alpha}$  die Aussage  $R(t_1, \dots, t_k)$  wahr oder falsch sein soll. Es ist klar, dass man sich dabei an der Situation in  $\alpha$  orientiert und definiert:

$$(4) \quad \hat{\psi}(R) := \{(t_1, \dots, t_k) \in D(F)^k \mid (\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)) \in \psi(R)\}.$$

(Also: Interpretiere die Terme  $t_1, \dots, t_k$  in der Struktur  $\alpha$ , dies liefert  $\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k) \in U$ , dann schaue nach, ob das Tupel  $(\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k))$  in der Struktur  $\alpha$  in der Relation  $\psi(R)$  steht oder nicht.)

Nun zeigen wir:  $\hat{\alpha} \models F$ .

Dies wird durch Induktion über die Anzahl der Quantoren  $n$  bewiesen.

**Anfang:**  $n = 0$ . – Das heißt, dass  $F$  quantorenfrei ist. Weil  $F$  geschlossen ist, sind alle Terme in  $F$  nur aus (Konstanten und) Funktionszeichen aufgebaut, das heißt: alle Terme in  $F$  sind Elemente von  $D(F)$ . Weiter enthält  $F$  keine Quantoren, das heißt  $F$  ist Boolesche Kombination von atomaren Formeln  $R(t_1, \dots, t_k)$ , wobei  $R$  ein Relationszeichen ist. Betrachte eine solche atomare Formel. Wir haben:

$$(5) \quad \begin{aligned} \alpha \models R(t_1, \dots, t_k) & \\ \Leftrightarrow (\alpha(t_1), \dots, \alpha(t_k)) \in \psi(R) & \\ \Leftrightarrow (t_1, \dots, t_k) \in \hat{\psi}(R) & \\ \Leftrightarrow (\hat{\alpha}(t_1), \dots, \hat{\alpha}(t_k)) \in \hat{\psi}(R) & \\ \Leftrightarrow \hat{\alpha} \models R(t_1, \dots, t_k). & \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, dass  $\hat{\alpha}(t) = t$  ist für alle Terme  $t \in D(T)$ , sowie die Definition von  $\hat{\psi}(R)$ . Aus (5) folgt

$$(6) \quad \alpha \models F \Leftrightarrow \hat{\alpha} \models F$$

auch für Boolesche Kombinationen von atomaren Formeln. (Man zeigt dies durch eine einfache Induktion über den Aufbau solcher Formeln.)

**Ind.-Vor:**  $n > 0$  und die Behauptung gilt für  $n - 1$  Quantoren.

**Ind.-Schritt:** Sei  $n > 0$ . Nach der Voraussetzung gilt  $\alpha \models \forall x_1 \dots \forall x_n H$ . Das heißt: Für alle  $u \in U$  gilt:

$$(7) \quad \alpha[x_1|u] \models \forall x_2 \dots \forall x_n H$$

Insbesondere gilt für jeden Term  $t \in D(F)$ , dass  $\alpha(t) \in U$ , also

$$(8) \quad \alpha[x_1|\alpha(t)] \models \forall x_2 \dots \forall x_n H.$$

Nun ersetzen wir  $x_1$  durch  $t$  nicht mittels  $\alpha$ , sondern direkt in der Formel  $H$ ; wir schreiben dafür  $H[x_1|t]$ . Aus (8) folgt (intuitiv einleuchtend, formal wäre ein Induktionsbeweis über Formeln zu führen, Basis: Blatt 4, Aufgabe 2):

$$(9) \quad \alpha \models \forall x_2 \dots \forall x_n H[x_1|t].$$

Nun können wir die Induktionsvoraussetzung anwenden und schließen:

$$(10) \quad \hat{\alpha} \models \forall x_2 \dots \forall x_n H[x_1|t].$$

Umgekehrt wie eben schließen wir im Herbrandmodell, wobei wir  $\hat{\alpha}(t) = t$  benutzen:

$$(11) \quad \hat{\alpha}[x_1|t] \models \forall x_2 \dots \forall x_n H.$$

Dies gilt für jedes beliebige  $t \in D(F)$ , also jedes Element des Herbrand-Universums, also folgt

$$(12) \quad \hat{\alpha} \models \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n H.$$

Damit ist der Induktionsschritt beendet. □