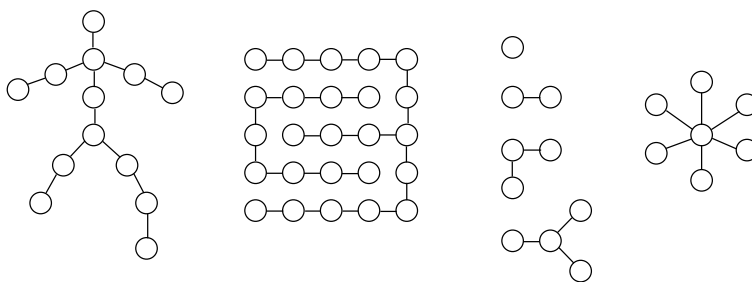


Freie Bäume und Wälder

Die folgenden grundlegenden Tatsachen zu (ungerichteten, freien) Bäumen sind allgemein wichtig; wir benutzen sie in der Vorlesung ohne weitere Begründung. Für Interessierte sind auch die Beweise angegeben.

Definition 1: Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt (freier) *Baum*, wenn er zusammenhängend und kreisfrei ist. Er heißt *Wald*, wenn er kreisfrei ist.

Ein Wald besteht aus Zusammenhangskomponenten, die Bäume sind. Ein Beispiel mit acht Zusammenhangskomponenten:



Im folgenden bedeutet „Kreis“ stets dasselbe wie „*einfacher* Kreis“, das heißt eine Knotenfolge (v_0, \dots, v_k) mit $k \geq 3$, wobei $v_0 = v_k$ ist, aber v_0, \dots, v_{k-1} verschieden sind.

Lemma 2: Für einen (ungerichteten) Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

- G ist Baum (das heißt, G ist zusammenhängend und kreisfrei).
- G ist kreisfrei und $|E| \geq |V| - 1$.
- G ist zusammenhängend und $|E| \leq |V| - 1$.
- Zu jedem Paar $v, w \in V, v \neq w$, existiert genau ein einfacher Weg zwischen v und w .
- G ist kreisfrei, aber Hinzufügen irgendeiner Kante erzeugt einen Kreis (G ist *maximal kreisfrei*).
- G ist zusammenhängend, aber Wegnehmen irgendeiner Kante macht G unzusammenhängend (G ist *minimal zusammenhängend*).

Folgerung: Wenn G ein Baum (d. h. zusammenhängend und kreisfrei) ist, dann gilt:

- $|E| = |V| - 1$.
- Zu jedem Paar $v, w \in V, v \neq w$, existiert genau ein einfacher Weg zwischen v und w .
- Hinzufügen irgendeiner Kante erzeugt genau einen Kreis.

(iv) Wegnehmen irgendeiner Kante zerlegt G in zwei Zusammenhangskomponenten.

Für den Beweis von Lemma 2 benötigen wir eine Reihe von Hilfsaussagen.

Sublemma 1: Ist $G = (V, E)$ ein kreisfreier Graph, so hat G einen Knoten vom Grad 0 (einen isolierten Knoten) oder einen vom Grad 1 (ein „Blatt“).

Beweis: (Indirekt.) Sei $G = (V, E)$ kreisfrei, $n = |V|$. Angenommen, jeder Knoten hat Grad ≥ 2 . Wir konstruieren induktiv einen Weg (v_0, \dots, v_n) wie folgt: Weil $V \neq \emptyset$, gibt es mindestens einen Knoten v_0 ; weil $\deg(v_0) \geq 2$, gibt es eine Kante $(v_0, v_1) \in E$. Für $1 \leq i < n$ wähle $(v_i, v_{i+1}) \in E$ so, dass $v_{i+1} \neq v_{i-1}$. Das ist möglich, weil $\deg(v_i) \geq 2$. Die Folge (v_0, v_1, \dots, v_n) kann nicht aus lauter verschiedenen Knoten bestehen, also gibt es k und j mit $1 \leq j \leq k < n$ und $v_k = v_{k-j}$. Wähle das kleinste solche k und das zugehörige j . Dieses j kann weder 1 ($(v_{k-1}, v_k) \in E$, also $v_{k-1} \neq v_k$) noch 2 sein ($v_{k-2} \neq v_k$ nach Konstruktion), also besteht $v_{k-j}, v_{k-j+1}, \dots, v_{k-1}$ aus mindestens 3 verschiedenen Knoten und Kanten. Also bildet $(v_{k-j}, v_{k-j+1}, \dots, v_{k-1}, v_k)$ einen Kreis. Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Sublemma 2: Ist $G = (V, E)$ ein kreisfreier Graph, so gilt $|E| \leq |V| - 1$.

Beweis: Durch Induktion über $n = |V|$:

I.A. $n = 1$: Wenn $|V| = 1$, kann es keine Kante geben, also ist $|E| = 0 = |V| - 1$.

I.V.: Die Aussage ist richtig für Graphen mit $n - 1$ Knoten.

I.S.: Sei $|V| = n$. Wähle in G einen Knoten w mit $\deg(w) = 0$ oder $\deg(w) = 1$. Ein solcher Knoten w existiert nach Sublemma 1. Betrachte $V' := V - \{w\}$ und $E' := \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\}$; setze $G' := (V', E')$ (der induzierte Teilgraph auf V').

Man sieht sofort: $|V'| = |V| - 1 = n - 1$ und $|E'| \geq |E| - 1$ (weil mit w höchstens eine Kante verschwindet), und G' ist auch kreisfrei. Daraus folgt mit der Induktionsvoraussetzung: $|E'| \leq |V'| - 1 = n - 1 - 1 = n - 2$, also $|E| \leq n - 1$. \square

Sublemma 3: Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, so gilt $|E| \geq |V| - 1$.

Beweis: Schreibe $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Dann definiere $E_i := \{e_1, \dots, e_i\}$ für $0 \leq i \leq m$, $G_i := (V, E_i)$.

Klar: G_0 hat n isolierte Punkte, also n Zusammenhangskomponenten. G_m hat eine Zusammenhangskomponente. e_i kann höchstens zwei Zusammenhangskomponenten von G_{i-1} zu einer von G_i verbinden, also die Zahl der Komponenten um 1 verringern. Also gilt $m \geq n - 1$. \square

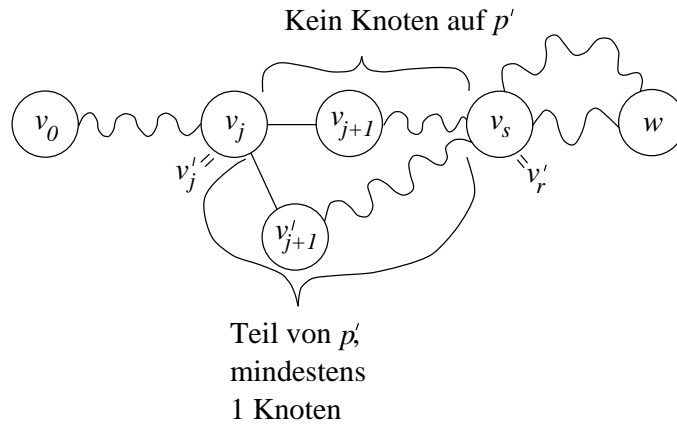
Sublemma 4: Ist ein Graph $G = (V, E)$ zusammenhängend, so gibt es für jedes Paar $v, w \in V$ mindestens einen einfachen Weg von v nach w .

Beweis: Es gibt einen Weg von v nach w nach Definition des Zusammenhangs. Weglassen von Kreisen macht den Weg einfach. \square

Sublemma 5: Sei $G = (V, E)$ Graph. Dann gilt:

$G = (V, E)$ kreisfrei \Leftrightarrow Es gibt für jedes Paar $v, w \in V$, $v \neq w$, höchstens einen einfachen Weg von v nach w .

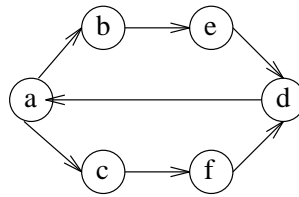
Beweis: „ \Rightarrow “ Angenommen $p = (v = v_0, v_1, \dots, v_k = w)$, $p' = (v = v'_0, v'_1, \dots, v'_l = w)$ wären zwei *verschiedene* einfache Wege. Dann hat mindestens einer davon Länge ≥ 2 , also gilt $k + l \geq 3$.



Weil die Wege verschieden sind, gibt es ein $j < \min\{k, l\}$ mit $(v_0, \dots, v_j) = (v'_0, \dots, v'_j)$ und $v_{j+1} \neq v'_{j+1}$. Dann findet man ein (kleinstes) $s > j$ mit $v_s \in \{v'_{j+1}, \dots, v'_l\}$ (so etwas gibt es, weil $v_k = w = v'_l$). Dann bildet $(v_j, v_{j+1}, \dots, v_s = v'_r, v'_{r-1}, v'_{r-2}, \dots, v'_{j+1}, v'_j)$ einen einfachen Kreis in G .

„ \Leftarrow “ Wenn es einen Kreis $v_0, v_1, \dots, v_s = v_0$ ($s \geq 3$) gibt, so gibt es (mindestens) zwei einfache Wege von v_0 nach v_1 , nämlich (v_0, v_1) und $(v_0, v_{s-1}, \dots, v_1)$. \square

Beweis von Lemma 2: Der Beweis folgt folgendem Beweisschema.



(a) \Rightarrow (b): folgt aus Sublemma 3.

(a) \Rightarrow (c): folgt aus Sublemma 2.

(b) \Rightarrow (e): Sei G kreisfrei, $|E| \geq |V| - 1$. Nach Sublemma 2 folgt: $|E| = |V| - 1$ und das Hinzufügen einer Kante zerstört die Kreisfreiheit.

(c) \Rightarrow (f): Sei G zusammenhängend, $|E| \leq |V| - 1$. Nach Sublemma 3 folgt: $|E| = |V| - 1$ und das Entfernen einer Kante zerstört die Zusammenhangseigenschaft.

(e) \Rightarrow (d): Aus der Kreisfreiheit folgt mit Sublemma 5, dass es jeweils höchstens einen solchen Weg gibt. Sei nun $v, w \in E$. Falls $v = w$ oder $(v, w) \in E$, ist nichts zu zeigen. Sonst: Füge (v, w) zu E hinzu. Nach Annahme (e) entsteht ein Kreis, der natürlich (v, w) enthält. Die restlichen Kanten des Kreises (alle in E) bilden einen Weg von v nach w in G , also gab es in G schon vor Einfügen der Kante von v nach w diesen Weg.

(f) \Rightarrow (d): Aus der Zusammenhangseigenschaft folgt, dass es für $v, w \in V$ einen einfachen

Weg von v nach w gibt.

Eindeutigkeit: Gibt es mehrere einfache Wege vom v nach w , so folgt mit Sublemma 5, dass G einen einfachen Kreis hat. Man kann aus diesem Kreis irgendeine Kante entfernen, ohne die Zusammenhangseigenschaft zu zerstören. Das widerspricht (f).

(d) \Rightarrow (a): Sublemma 4 und Sublemma 5.

□

Lemma 3: Ist $G = (V, E)$ ein Wald mit r Kanten, so besteht G aus genau $|V| - r$ Zusammenhangskomponenten.

Beweis: Es seien V_1, \dots, V_s die Zusammenhangskomponenten. Jede ist ein Baum (da zusammenhängend und kreisfrei), hat also $|V_i| - 1$ Kanten. Damit gilt

$$r = \sum_{1 \leq i \leq s} (|V_i| - 1) = \sum_{1 \leq i \leq s} |V_i| - s = |V| - s.$$

□