

Exkurs:

Eine kleine Formel für  $\sum_{i=1}^n \lfloor \log i \rfloor$

## Exkurs: Eine kleine Formel

### Lemma

$$\sum_{i=1}^n \lfloor \log i \rfloor = n \log n - O(n).$$

### Beweis (Exkurs)

Zuerst stellen wir fest, dass wir jede natürliche Zahl  $\geq 1$  auf eindeutige Weise in der Form  $2^i + j$  mit  $i = \lfloor \log i \rfloor$  und  $0 \leq j \leq 2^i - 1$  darstellen können.

Sei  $n = 2^k + l$  mit  $0 \leq l \leq 2^k - 1$ . Damit ergibt sich

$$\sum_{i=1}^n \lfloor \log i \rfloor = \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} \lfloor \log(2^i + j) \rfloor}_{1, \dots, 2^k - 1} + \underbrace{\sum_{j=0}^l \lfloor \log(2^k + l) \rfloor}_{2^k, \dots, 2^k + l = n}$$

## Beweis (Exkurs (Fortsetzung))

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \lfloor \log i \rfloor &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} \lfloor \log(2^i + j) \rfloor && + \sum_{j=0}^l \lfloor \log(2^k + l) \rfloor \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=0}^{2^i-1} i && + \sum_{j=0}^l k \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} i 2^i && + (l+1)k\end{aligned}$$

## Beweis (Exkurs (Fortsetzung))

Betrachten wir  $\sum_{i=1}^{k-1} i2^i$  genauer. Durch geeignete Anordnung erhält man das folgende Schema

$$\begin{array}{rcccccc} 2^1 & + & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^{k-1} & = & (2^k - 1) - (2^1 - 1) \\ & & 2^2 & + & 2^3 & + & \dots & + & 2^{k-1} & = & (2^k - 1) - (2^2 - 1) \\ & & & & 2^3 & + & \dots & + & 2^{k-1} & = & (2^k - 1) - (2^3 - 1) \\ & & & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & & & 2^{k-1} & = & (2^k - 1) - (2^{k-1} - 1) \end{array}$$

Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} i2^i &= (k-1)(2^k - 1) - \sum_{i=1}^{k-1} (2^i - 1) \\ &= (k-1)(2^k - 1) + k - 1 - (2^k - 2). \end{aligned}$$

## Beweis (Exkurs (Fortsetzung))

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \lfloor \log i \rfloor &= \sum_{i=1}^{k-1} i2^i + (l+1)k \\ &= (k-1)(2^k - 1) + k - 1 - 2^k + 2 + (l+1)k \\ &= k(2^k - 1 + 1 + l + 1) - 2^k + 2 - 1 - 2^k + 1 \\ &= k(2^k + l + 1) - 2 \cdot 2^k + 2 \\ &= \lfloor \log n \rfloor (n + 1) - 2(n - l) + 2 \\ &= \lfloor \log n \rfloor n + \lfloor \log n \rfloor - 2(n - l) + 2 \\ &= \lfloor \log n \rfloor n - (2(n - l) - \lfloor \log n \rfloor - 2) \\ &= \lfloor \log n \rfloor n - O(n)\end{aligned}$$

