Teil 4: Verwaltung von Mengen

Exkurs: Fibonacci Zahlen

Fibonacci Zahlen

Definition (Fibonacci Zahlen)

Für $i \geq 0$ sind die Fibonacci Zahlen definiert als

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ und } F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$$

Die Fibonacci Zahlen lassen sich auch in geschlossener Form darstellen.

Für $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ macht man den Ansatz

$$\begin{array}{rrcl} & x^{k+1} & = & x^k + x^{k-1} \\ \Leftrightarrow & x^{k-1}(x^2 - x - 1) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x^2 - x - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x & = & \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right) \end{array}$$

Fibonacci Zahlen

Setzt man nun

$$\alpha := \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) \text{ und } \beta := \frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$$

und macht den Ansatz

$$F \stackrel{!}{=} F'_k := a\alpha^k + b\beta^k \text{ für } k \geq 0,$$

dann muß folgendes gelten:

$$0 = F_0 \stackrel{!}{=} F'_0 = a + b$$
$$1 = F_1 \stackrel{!}{=} F'_1 = a\alpha + b\beta$$

Somit ergibt sich $b = -a$ und

$$1 = a\alpha - a\beta = a(\alpha - \beta) = a\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = a\sqrt{5}$$

Was zu $a = \frac{1}{\sqrt{5}}$ führt.

Fibonacci Zahlen

Damit soll folgendes gelten:

$$F_k \stackrel{!}{=} F'_k = a\left(\alpha^k - \beta^k\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^k - \beta^k\right)$$

Offensichtlich gilt

$$\alpha^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 + 2\sqrt{5} + 5\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{5} + 2\right) = \alpha + 1$$

$$\beta^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(1 - 2\sqrt{5} + 5\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{5} + 2\right) = \beta + 1$$

Damit ergibt sich

$$\alpha^{k+1} = \alpha^2\alpha^{k-1} = (\alpha+1)\alpha^{k-1} = \alpha^k + \alpha^{k-1}$$

$$\beta^{k+1} = \beta^2\beta^{k-1} = (\beta+1)\beta^{k-1} = \beta^k + \beta^{k-1}$$

Fibonacci Zahlen

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
F'_{k+1} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{k} + \alpha^{k+1} - \beta^{k}. - \beta^{k-1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{k} - \beta^{k}\right) + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}\right) \\
&= F'_k + F'_{k+1}
\end{aligned}
$$

Da $F'_0 = F_0$ und $F'_1 = F_1$ giltm ergibt sich somit $F'_k = F_k$. Es gilt

$\alpha \simeq 1.61803$ und $\beta \simeq -0.61803$. Da $|\beta| < 1$ wird $|\beta^k|$ für großes k sehr klein und es gilt

$$F_k \simeq \frac{1}{\sqrt{5}}\,\alpha^k.$$

Fibonacci Zahlen

Damit wachsen die Fibonacci Zahlen exponentiell.

Insbesondere gilt $F_2 = 1 \geq \alpha^0$.

Induktiv folgt nun

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \geq \alpha^{k-3} + \alpha^{k-4} = \alpha^{k-2}.$$

Folgerung

Für $k \geq 2$ gilt $F_k \geq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}$.

Fibonacci Zahlen

Lemma

Für $k \geq 2$ gilt

$$2 + \sum_{i=2}^{k} F_i = F_{k+2}$$

Beweis

Für $k = 2$ ergibt sich die Summe als

$$2 + F_2 = F_3 + F_2 = F_4 = F_{k+2}.$$

Induktiv ergibt sich somit

$$2 + \sum_{i=2}^{k} F_i = 2 + \sum_{i=2}^{k-1} F_i + F_k = F_{k+1} + F_k = F_{k+2} \quad \square$$