

Teil 6

Matrizenmultiplikation

Anwendungen der Matrizenmultiplikation

Die Multiplikation von Matrizen wird in vielen Bereichen der Informatik und Mathematik benötigt.

Wir haben die Multiplikation von Matrizen bereits explizit bei der Berechnung der transitiven Hülle eines gerichteten Graphen verwendet. Auch der Algorithmus von Floyd/Warschall zur Lösung des All-Pair-Shortest-Path Problemes beruht im Prinzip auf einer Matrizenmultiplikation.

Andere Anwendungen liegen z.B. in den folgenden Bereichen:

- Statistik
- Lineare Programmierung und Operations Research
- Bildverarbeitung
- Signalverarbeitung
- Netzwerkanalyse
- ...

Algebraische Grundlagen

In vielen Fällen werden nur Matrizen über den reellen Zahlen \mathbb{R} benutzt. Allerdings ist es häufig möglich und sinnvoll Matrizen über anderen **Halbringen** zu betrachten.

Deshalb führen wir an dieser Stelle einige grundlegende algebraische Strukturen ein, die uns erlauben die Matrizenmultiplikation als deutlich flexibleres Werkzeug zu verstehen.

Monoide

Definition (Monoid)

Ein **Monoid** $(M, +, 0)$ ist eine Menge M zusammen mit einer **zweistelligen Operation** $+: M \times M \rightarrow M$, geschrieben $x + y := +(x, y)$, so dass

- 0 ein **neutrales Element** ist, d.h. $x + 0 = x = 0 + x$ für alle $x \in M$
- und $+$ **assoziativ** ist, d.h. für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$x + (y + z) = (x + y) + z.$$

Ein Monoid heisst **kommutativ**, wenn zusätzlich folgendes für alle x, y gilt:

$$x + y = y + x.$$

Beispiele (Monoide)

- $(\mathbb{N}, +, 0)$ ist ein kommutatives Monoid.
- $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ ist ein kommutatives Monoid.
- $(\mathbb{R}, +, 0)$ ist ein kommutatives Monoid.
- $(\mathbb{R}, \cdot, 1)$ ist ein kommutatives Monoid.
- Für jedes Alphabet Σ ist $(\Sigma^*, \cdot, \varepsilon)$ ein **nicht-kommutatives** Monoid, wobei \cdot die Konkatenation ist.
- Sei \mathcal{R}_Σ die Menge der regulären Sprachen über dem Alphabet Σ .
 - ▶ $(\mathcal{R}_\Sigma, \cup, \emptyset)$ ist ein kommutatives Monoid.
 - ▶ $(\mathcal{R}_\Sigma, \cdot, \{\varepsilon\})$ ist ein **nicht-kommutatives** Monoid

Halbringe

Definition (Halbring)

Ein **Halbring** $(S, k, \cdot, 0, 1)$ besteht aus einer Menge S , so dass

- $(S, +, 0)$ ein kommutatives Monoid ist,
- $(S, \cdot, 1)$ ein Monoid ist,
- 0 ist ein **Null-Element** bzgl. \cdot ist, d.h. für alle $x \in S$ gilt

$$x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x,$$

- und es gelten die **Distributivgesetze**

$$(a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

$$c \cdot (a + b) = (c \cdot a) + (c \cdot b)$$

Ein Halbring heißt **abgeschlossen**, wenn für jede **abzählbare** Menge $X \subseteq S$ die Summe $\sum_{x \in X} x$ definiert ist und in S liegt.

Halbringe

Beispiele (Halbringe)

- $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Halbring (nicht abgeschlossen).
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Halbring (nicht abgeschlossen).
- $(\mathcal{R}_\Sigma, \cup, \cdot, \emptyset, \{\varepsilon\})$ ist ein Halbring (nicht abgeschlossen).
- $(\mathbb{N} \cup \{\infty\}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein abgeschlossener Halbring, wobei

$$0 \cdot \infty = 0, \quad x + \infty = \infty, \quad x \cdot \infty = \infty.$$

Ringe und Körper

Definition (Ring)

Ein **Ring** $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Halbring, so dass $(R, +, 0)$ eine **kommutative Gruppe** ist, d.h. $(R, +, 0)$ ist ein kommutatives Monoid und für jedes $x \in R$ existiert ein **Inverses** $-x \in R$ mit

$$x + (-x) = 0.$$

R heißt **kommutativ**, wenn $(R, \cdot, 1)$ ein kommutatives Monoid ist.

Definition (Körper)

Ein **Körper** $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Ring, so dass $(R \setminus \{0\}, \cdot, 1)$ eine kommutative Gruppe mit **Inversen** x^{-1} ist.

Beispiele (Ringe und Körper)

- $(\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ ist kein Ring.
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Ring.
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ ist ein Körper.

Matrizen

Definition (Matrix)

$(R, +, \cdot, 0, 1)$ sei ein Ring und $n \in \mathbb{N}$. Eine $m \times n$ -Matrix ist ein Schema der Form

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

von Elementen $a_{ij} \in R$.

$M_n(R)$ sei die Menge aller quadratischen $n \times n$ -Matrizen über dem Ring R .

Operationen auf $M_n(R)$

Definition (Addition und Multiplikation)

Sei $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ein Ring und $A, B \in M_n(R)$. Wir definieren

$$A + B := C \quad \text{mit} \quad c_{ij} := a_{ij} + b_{ij}$$

$$A \cdot B := D \quad \text{mit} \quad d_{ij} := \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Satz

Für jeden Ring $(R, +, \cdot, 0, 1)$ ist $(M_n(R), +, \cdot, 0_n, I_n)$ ein Ring, wobei

$$0_n := \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad I_n := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse von Matrizen

Ist R ein Körper und $A \in M_n(R)$, dann kann es sein, dass eine zu A **inverse Matrix** A^{-1} existiert, d.h.

$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A.$$

Existiert eine inverse Matrix, so sagt man **A ist invertierbar**,

Beispiel

- $I_n^{-1} = I_n$.
- 0_n besitzt kein Inverses.
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Multiplikation mittels der „Schulmethode“

Die **Schulmethode** zur Multiplikation zweier Matrizen $A, B \in M_n(R)$ über einem Ring R ist die direkte Berechnung der Einträge c_{ij} des Produktes $C = A \cdot B$, d.h.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

Satz

Die Schulmethode zur Multiplikation von zwei $n \times n$ -Matrizen über R benötigt n^3 Multiplikationen und $n^3 - n^2$ Additionen.

Beweis.

Pro Eintrag benötigen wir n Multiplikationen und $n - 1$ Additionen. □

Teil 6: Matrizenmultiplikation

Matrizenmultiplikation nach Strassen

Die Quadranten

Wir betrachten eine $n \times n$ -Matrix A über einem Ring R mit geradem n , d.h. $n = 2k$. Dann können wir A in vier gleich große **Quadranten** unterteilen.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & a_{k(k+1)} & \cdots & a_{kn} \\ \hline a_{(k+1)1} & \cdots & a_{(k+1)k} & a_{(k+1)(k+1)} & \cdots & a_{(k+1)n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} & a_{n(k+1)} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Da $M_k(R)$ ein Ring ist, erhalten wir einen **Ringisomorphismus** (d.h. u.a. f ist bijektiv) $f: M_{2k}(R) \rightarrow M_2(M_k(R))$ mit

$$f(A) := \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}.$$

Die Quadranten

Lemma

Sei R ein Ring und $A, B \in M_n(R)$ mit $n = 2k$.

$$f(A + B) = f(A) + f(B)$$

$$f(A \cdot B) = f(A) \cdot f(B)$$

dabei handelt es sich auf der linken Seite der Gleichungen um Operationen auf $M_n(R)$ und auf der rechten Seite um Operationen auf $M_k(R)$.

Beweis.

Übungsaufgabe



Die erste Idee

Das Verfahren von Strassen verwendet die vorgestellte Aufteilung einer quadratischen Matrix in die Quadranten, um die Berechnung zu beschleunigen.

Nehmen wir an, dass $n = 2^k$ mit $k \geq 0$ gilt. Um das Produkt von $A, B \in M_n(R)$ zu berechnen, teilen wir beide in die Quadranten auf und berechnen aus ihnen die Quadranten des Resultates:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = C$$

wobei

$$C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21}$$

$$C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22}$$

$$C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21}$$

$$C_{22} = A_{21} \cdot B_{12} + A_{22} \cdot B_{22}$$

Auf die Quadranten kann man rekursiv das gleiche Verfahren anwenden.

Die Analyse

Sei nun $T(n)$ die Anzahl der Ringoperationen (Addition und Multiplikation), die wir für die Berechnung mittels eines Verfahrens, das mittels der Quadrantenzerlegung arbeitet, für die Multiplikation zweier $n \times n$ -Matrizen benötigen.

Sei weiter m die Anzahl der Matrizenmultiplikationen in einem Schritt und a die Anzahl der Matrizenadditionen. Dann ergibt sich

$$T(n) = mT\left(\frac{n}{2}\right) + a\left(\frac{n}{2}\right)^2,$$

denn jede Matrizenmultiplikation erfordert $T\left(\frac{n}{2}\right)$ und jede Addition $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ Ringoperationen.

Für das oben vorgestellte Verfahren ergibt sich $m = 8$ und $a = 4$, wodurch wir

$$T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + 4\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

erhalten.

Die Analyse

Lemma

Für $n = 2^k$ gilt $T(n) = \sum_{i=0}^{k-1} m^i a 2^{2(k-1-i)} + m^k$.

Beweis

Für $k = 0$, d.h. $n = 1$ gilt $T(1) = 0 + m^0 = 1$ und die Behauptung ist erfüllt.

Sei nun $k \geq 1$ und die Behauptung gelte für $0 \leq l < k$. Damit gilt

$$\begin{aligned} T(n) &= mT\left(\frac{n}{2}\right) + a\left(\frac{n}{2}\right)^2 \\ &= m\left(\sum_{i=0}^{k-2} m^i a 2^{2(k-2-i)} + m^{k-1}\right) + a\left(2^{k-1}\right)^2 \end{aligned}$$

Beweis (Fortsetzung)

$$\begin{aligned}T(n) &= m \left(\sum_{i=0}^{k-2} m^i a 2^{2(k-2-i)} + m^{k-1} \right) + a \left(2^{k-1} \right)^2 \\&= \sum_{i=0}^{k-2} m^{i+1} a 2^{2(k-2-i)} + m^k + m^0 a \left(2^{k-1} \right)^2 \\&= \sum_{i=1}^{k-1} m^i a 2^{2(k-1-i)} + m^0 a \left(2^{k-1} \right)^2 + m^k \\&= \sum_{i=0}^{k-1} m^i a 2^{2(k-1-i)} + m^k \quad \square\end{aligned}$$

Die Analyse der ersten Idee

Für $m = 8$ und $a = 4$ ergibt sich somit

$$\begin{aligned}T(n) &= \sum_{i=0}^{k-1} 4 \cdot 8^i \cdot 2^{2(k-1-i)} + 8^k = \sum_{i=0}^{k-1} 2^{3i+2} \cdot 2^{2(k-1-i)} + 2^{3k} \\&= \sum_{i=0}^{k-1} 2^{3i+2+2(k-1-i)} + 2^{3k} = \sum_{i=0}^{k-1} 2^{i+2k} + (2^k)^3 \\&= 2^{2k} \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + n^3 = (2^k)^2(2^k - 1) + n^3 \\&= n^2(n - 1) + n^3 = 2n^3 - n^2\end{aligned}$$

Konsequenz

Damit ist dieses rekursive Verfahren nicht besser als die Schulmethode!

Strassens Beobachtung

Lemma (Strassen)

Seien $A, B \in M_2(R)$. Dann ergeben sich die Einträge c_{ij} von $C = A \cdot B$ als:

$$c_{11} = m_1 + m_2 - m_4 + m_6$$

$$c_{12} = m_4 + m_5$$

$$c_{21} = m_6 + m_7$$

$$c_{22} = m_2 - m_3 + m_5 - m_7$$

mit

$$m_1 := (a_{12} - a_{22})(b_{21} + b_{22})$$

$$m_2 := (a_{11} + a_{22})(b_{11} + b_{22})$$

$$m_3 := (a_{11} - a_{21})(b_{11} + b_{12})$$

$$m_4 := (a_{11} + a_{12})b_{22}$$

$$m_5 := a_{11}(b_{12} - b_{22})$$

$$m_6 := a_{22}(b_{21} - b_{11})$$

$$m_7 := (a_{21} + a_{22})b_{11}$$

Beweis.

Fleißarbeit



Strassens Matrizenmultiplikation

Unter Verwendung dieser Beobachtung ergibt sich ein rekursives Verfahren mit $m = 7$ und $a = 18$ und somit für $n = 2^k$

$$\begin{aligned}T(n) &= \sum_{i=0}^{k-1} 7^i \cdot 18 \cdot 2^{2(k-i-1)} + 7^k = 18 \cdot 2^{2(k-1)} \sum_{i=0}^{k-1} 7^i 2^{-2i} + 7^k \\&= 18 \frac{n^2}{4} \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{7}{4}\right)^i + 7^k = 18 \frac{n^2}{4} \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^k - 1}{\frac{7}{4} - 1} + 7^k \\&= 18 \frac{n^2}{4} \frac{4}{3} \left(\frac{7}{4}\right)^k - 1 + 7^k = 6n^2 \left(\frac{7^k}{n^2} - 1\right) + 7^k \\&= 6 \cdot 7^k + 7^k - 6n^2 = 7 \cdot \left(2^{\log 7}\right)^k - 6n^2 \\&= 7 \cdot n^{\log 7} - 6n^2\end{aligned}$$

Strassens Matrizenmultiplikation

Falls n keine Zweierpotenz ist, wird die Matrix bis zur nächsten Zweierpotenz mit Nullen aufgefüllt. dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} T(n) &= 7(2^{\lceil \log n \rceil})^{\log 7} - 6 \cdot 2^{2\lceil \log n \rceil} \\ &\leq 7 \cdot (2n)^{\log 7} = 7 \cdot 7n^{\log 7} = 49n^{\log 7} = O(n^{\log 7}). \end{aligned}$$

Satz

Strassens Multiplikationsmethode benötigt für die Multiplikation zweier $n \times n$ -Matrizen höchstens $O(n^{\log 7}) \sim O(n^{2.81})$ Ringoperationen.

Beurteilung der Verbesserung

Asymptotisch ist die Methode von Strassen definitiv besser als die Schulmethode. Es bleibt allerdings die Frage, ab welcher Matrizengröße dieser Vorteil sich tatsächlich durchsetzt.

Dazu werden wir versuchen die kleinste Zweierpotenz $n = 2^{k_0}$ zu bestimmen, ab der Strassens Methode weniger Ringoperationen benötigt als die Schulmethode, d.h.

$$7^{k+1} - 6(2^k)^2 \leq 2(2^k)^3 - (2^k)^2 \text{ für alle } k \geq k_0.$$

Beurteilung der Verbesserung

Ringoperationen für $n = 2^k$		
k	Strassen	Schule
0	1	1
1	25	12
2	247	112
3	2017	960
4	15271	7936
5	111505	64512
6	798967	520192
7	5666497	4177920
8	39960391	33488896
9	280902385	268173312
10	1971035287	2146435072
11	13816121377	17175674880
12	96788347111	137422176256
⋮	⋮	⋮

Es zeigt sich, dass dies für $k \geq 10 = k_0$ der Fall ist. D.h. Das Verfahren von Strassen wird frühestens für 1024×1024 -Matrizen besser als die Schulmethode.

Damit bietet sich an, kleine Matrizen mit der Schulmethode zu multiplizieren und große mit Strassens Methode.

Zeitpunkt des Methodenwechsels

Bei dieser Betrachtung sind wir allerdings davon ausgegangen, dass die Strassenmethode bis $zuk = 1$, d.h. 2×2 -Matrizen ausgeführt wird.

Da für kleine k aber die Schulmethode besser ist, sollte man rechtzeitig wechseln.

Im Folgenden wollen wir ermitteln, welches die günstigste Größe für einen Wechsel von der Strassen auf die Schulmethode ist.

Wir betrachten das folgende Verfahren für $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ mit **geradem n** .

- 1 Spalte A und B in $4 \frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ -Matrizen, die Quadranten, auf.
- 2 Berechne die benötigten Produkte dieser $\frac{n}{2} \times \frac{n}{2}$ -Matrizen nach der Schulmethode.
- 3 Berechne $A \cdot B$ nach der Methode von Strassen.

Gesucht ist das kleinste n , für das diese Methode weniger Ringoperationen benötigt als die reine Schulmethode.

Zeitpunkt des Methodenwechsels

Für die gemischte Methode ergibt sich die folgende Anzahl von Ringoperationen:

$$7 \cdot \underbrace{\left(2 \left(\frac{n}{2} \right)^3 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \right)}_{\text{Schulmethode}} + 18 \underbrace{\left(\frac{n}{2} \right)^2}_{\text{Additionen}} = \frac{7}{4}n^3 + \frac{11}{4}n^2$$

Für die Schulmethode ergab sich $2n^3 - n^2$, d.h. uns interessiert der Geltungsbereich von

$$\begin{aligned} \frac{7}{4}n^3 + \frac{11}{4}n^2 &< 2n^3 - n^2 \\ \Leftrightarrow \frac{15}{4}n^2 &< \frac{1}{4}n^3 \\ \Leftrightarrow 15 &< n \end{aligned}$$

Konsequenz

Bei $n < 15$ sollte der Methodenwechsel für gerade n erfolgen.

Ungerade Matrizengrößen

Bislang sind wir von einem geraden n ausgegangen. Wie behandeln wir nun ein ungerades n ?

Die Antwort ist relativ einfach: **Trenne die letzte Spalte und Zeile ab!**.

D.h. statt die vier Quadranten zu bilden, nehmen wir die folgende Aufteilung vor:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ \hline a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{array} \right) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

Damit ist A_{11} eine $(n-1) \times (n-1)$ -, A_{12} eine $(n-1) \times 1$ -, A_{21} eine $1 \times (n-1)$ - und A_{22} eine 1×1 -Matrix.

B wird analog aufgeteilt.

Ungerade Matrizengrößen

Das Produkt $A \cdot B$ lässt sich nun, analog zur Aufteilung der Matrizen in vier gleich große Quadranten, mittels der Schulmethode berechnen, d.h.

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

mit

$$\begin{array}{ll} C_{11} = A_{11} \cdot B_{11} + A_{12} \cdot B_{21} & (n-1) \times (n-1)\text{-Matrix} \\ C_{12} = A_{11} \cdot B_{12} + A_{12} \cdot B_{22} & (n-1) \times 1\text{-Matrix} \\ C_{21} = A_{21} \cdot B_{11} + A_{22} \cdot B_{21} & 1 \times (n-1)\text{-Matrix} \\ C_{22} = A_{21} \cdot B_{21} + A_{22} \cdot B_{22} & 1 \times 1\text{-Matrix} \end{array}$$

In der Summe ergibt sich der folgende Algorithmus.

Algorithmus (MATMULT)

Eingabe: Zwei $n \times n$ -Matrizen A, B über einem Ring R .

Ausgabe: Die Produktmatrix $C = A \cdot B$.

wenn $n < 16$ **dann** Berechne $C = A \cdot B$ nach Schulmethode

sonst

wenn n gerade ist **dann**

Spalte A und B in die vier Quadranten auf.

Berechne $C = A \cdot B$ mittels der Quadranten nach der

Strassenmethode. Verwende dabei rekursiv die Prozedur MATMULT

zur Berechnung der Produkte.

Ende

sonst

Spalte die letzte Zeile und Spalte von A und B ab.

Berechne das Produkt $C = A \cdot B$ aus den Teilen nach der

Schulmethode. Verwende dabei rekursiv die Prozedur MATMULT

zur Berechnung der Produkte.

Ende

Ende

Die Laufzeit von MATMULT

Satz

MATMULT benötigt für die Multiplikation zweier $n \times n$ -Matrizen über dem Ring R

- *für $n < 16$ genau so viel Ringoperationen wie die Schulmethode.*
- *für $n \geq 16$ echt weniger Ringoperationen als die Schulmethode.*
- *nie mehr als $4.8n^{\log_2 7}$ Ringoperationen.*

Schranken für die Matrizenmultiplikation

Frage

Wieviele Multiplikationen benötigt eine Matrizenmultiplikation über einem Körper K mindestens?

Sei $M(n)$ die minimale Anzahl von Multiplikationen in dem Körper, die benötigt werden um zwei $n \times n$ -Matrizen zu multiplizieren.

Wir gehen davon aus, dass $M(n)$ die Form $M(n) = n^{\omega_n(K)}$ hat. Insbesondere interessieren wir uns auch für den kleinsten Exponenten, d.h. für

$$\omega(K) := \inf \{ \omega_n(K) \mid n \geq 2 \}.$$

Schranken für die Matrizenmultiplikation

Was wir wissen

- $\omega(K) \leq 3$ (Schulmethode)
- $\omega(K) \leq \log 7 \sim 2.807$ (Strassen, 1969)
- $\omega(K) \leq \frac{\log 47216}{\log 48} \sim 2.780$ (Pan, 1978)
48 × 48-Matrizen mit 47216 Multiplikationen
- $\omega(K) \leq \frac{\log 1000}{\log 12} \sim 2.779$ (Bini, 1979/80)
12 × 12-Matrizen mit 1000 Multiplikationen
- $\omega(K) < 2.548$ (Schönhage, 1980)
- $\omega(K) \leq 2.522$ (Pan, 1980)
- $\omega(K) \leq 2.495364$ (Coppersmith & Winograd, 1982)
- $\omega(K) \leq 2.374$ (Coppersmith & Winograd, 1988)