Teil 8: Graphen: Maximale Flüsse

Bipartites Matching

Ein Problem aus dem Alltag

An einem Online-Rollenspiel möchten insgesamt n Spieler teilnehmen, von denen jeder eine Rasse wählen muß.

Nun ist das Spiel aber schlampig programmiert, so dass von jeder der m Rassen nur eine beschränkte Anzahl von Spielern erlaubt ist. Seien $l_1, \ldots, l_m$ diese Grenzen.

Um die Rassenauswahl möglichst fair zu gestalten, einigen sich die Spieler darauf, dass jeder von ihnen eine Menge von Rassen wählt, die für ihn in Frage kommen. Diese Mengen nennen wir $R_1, \ldots, R_n$.

Nun sollen den Spielern Rassen zugeteilt werden, so dass möglichst viele eine ihrer Wunschrassen bekommen.

Frage

Wie kann man dieses Problem lösen?

Matching

Das vorgestellte Problem ist, wie wir sehen werden, eng mit dem Matching-Problem verwandt.

Definition (Matching)

$G = (V, E)$ sei ein ungerichteter Graph. Ein Matching M ist eine Teilmenge $M \subseteq E$ von Kanten, so dass für jeden Knoten $v \in V$ höchstens eine inzidente Kante in M ist.

Ein maximales Matching M ist ein Matching mit möglichst vielen Kanten, d.h. für jedes Matching M' gilt $|M| \geq |M'|$.

Wir wollen uns im Folgenden auf den Fall eines bipartiten Matchings beschränken.

Bipartite Graphen

Definition (Bipartiter Graph)

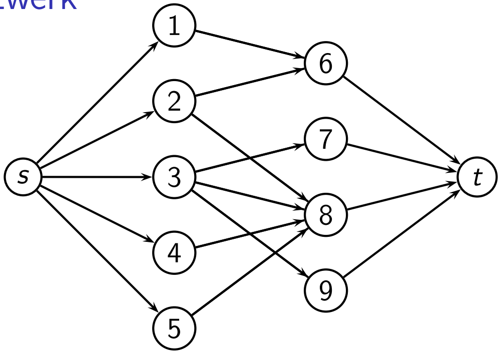
Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heisst bipartit, wenn die Knotenmenge $V = L \cup R$ in zwei disjunkte Teilmengen L und R unterteilt werden kann, so dass für jede Kante (u, v) gilt $u \in L$ und $v \in R$.

Definition (Bipartites Matching)

Ein bipartites Matching ist ein Matching auf einem bipartiten Graphen.

Die Idee ist, ein Flussnetzwerk N_G zu bauen, so dass jeder Fluss f durch dieses Netzwerk ein Matching M_f gleicher Grösse beschreibt, und umgekehrt. Damit wäre dann das Problem ein maximales bipartites Matching zu finden, identisch zu dem Problem einen maximalen Fluss zu finden.

Das Flussnetzwerk



- $G = (L \cup R, E)$ sei der gegebene bipartite Graph.
- Wir orientieren die Kanten in G von L nach R.
- Wir fügen Eine Quelle s und eine Senke t hinzu.
- s wird mit allen Knoten in L verbunden.
- t wir mit allen Knoten in R verbunden.

Das Flussnetzwerk

Formal definiert man das Flussnetzwerk $N_G = (V', E'; c; s, t)$ mittels:

- $V' := V \cup \{s, t\}$
- $E' :=$
  $\{(l, r) \mid (l, r) \in E, l \in L, r \in R\} \cup \{(s, l) \mid l \in L\} \cup \{(r, t) \mid r \in R\}$
- $c(u, v) := 1$

Da alle Kanten das Gewicht 1 haben, können wir c getrost weglassen, d.h. $N_G = (V, E; s, t)$.

Lemma

$G = (L \cup R, E)$ sei ein bipariter Graph und M ein Matching in G. Dann existiert ein Fluss f_M in N_G mit ganzzahligen Kapazitäten und $|f_M| = |M|$.

Beweis

Wir definieren den Fluss f_M auf den Kanten folgendermaßen (die anderen Richtungen sind durch die Anti-Symmetrie vorgegeben):

$$
\begin{aligned}
f_M(l, r) &:= \begin{cases} 1 & falls\ (l, r) in M \\ 0 & falls\ (l, r) \notin M \end{cases} \\
f_M(s, l) &:= \begin{cases} 1 & falls\ ein\ r \in R\ existiert\ mit (l, r) \in M \\ 0 & sonst \end{cases} \\
f_M(r, t) &:= \begin{cases} 1 & falls\ ein\ l \in L\ existiert\ mit (l, r) \in M \\ 0 & sonst \end{cases}
\end{aligned}
$$

Beweis (Fortsetzung)

Der Beweis, dass f_M ein Fluss ist, beschränkt sich somit auf den Nachweis, dass der Erhaltungssatz erfüllt ist.

Da für jeden Knoten l höchstens eine Kante (l, r) in M ist, gilt

$$f(l,s) + \sum_{r \in R \mid (l,r) \in E} f(l,r) = \begin{cases} -f(s,l) + f(l,r) = 0 & \textit{falls } (l,r) \in M \\ 0 + 0 = 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

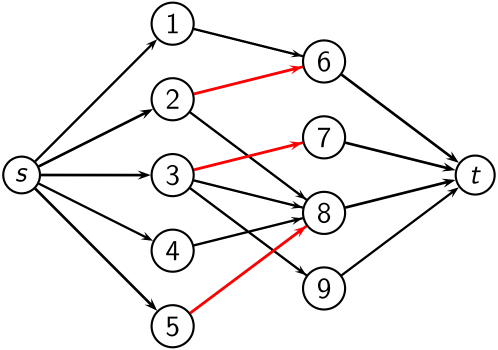
Analog ergibt sich

$$\sum_{l \in L \mid (l,r) \in E} f(r,l) + f(r,t) = 0.$$

Offensichtlich gilt

$$|f_M| = \sum_{l \in L} f(s,l) = \sum_{(l,r) \in M} 1 = |M|. \quad \square$$

Ein Beispiel



Lemma

$G = (L \cup R, E)$ sei ein bipariter Graph und f ein Fluss in N_G mit ganzzahligen Kapazitäten. Dann existiert ein Matching M_f in G mit $|f| = |M_f|$.

Beweis

Wir zeigen, dass die im Folgenden definierte Menge M_f ein Matching in G ist.

$$M_f := \{(l, r) \mid f(l, r) > 0\}.$$

Um zu zeigen, dass M_f ein Matching ist, müssen wir zeigen, dass zu jedem Knoten $l \in L$ und $r \in R$ höchstens eine inzidente Kante in M_f ist.

Da für jede Kante $(l, r) \in M_f$ der Fluss über sie echt größer als 0 ist und ganzzahlig ist, muss $f(l, r) = 1$ gelten.

Da l nur eine eingehende Kante, nämlich (s, l) besitzt, und diese Kapazität 1 hat, kann höchstens ein Fluss von 1 den Knoten l verlassen. Wegen der Flusserhaltung muss es sogar genau eine Einheit sein.

Beweis (Fortsetzung)

Da $f(l,r) = 1$ *ist, muss für alle anderen von* l *ausgehenden Kanten* (l,r') *der Fluss* 0 *sein. Damit ist höchstens eine an* l *angrenzende Kante in* M_f.

Für $r \in R$ *ergibt sich analog, dass höchstens eine inzidente Kante in* M_f *ist. Damit ist* M_f *ein Matching.*

Es bleibt zu zeigen, dass $|M_f| = |f|$ *gilt.*

Da über jede Kante in M_f *ein positiver, ganzzahliger Fluss fliesst (nämlich 1), gilt*

$$|M| = \sum_{(l,r)\in E} f(l,r) = \sum_{l\in L} f(s,l) = |f|.$$

Die zweite Gleichheit folgt, da jede Einheit Fluss, die $l \in L$ *verlässt über die Kante* (s,l) *gekommen sein muss.* $\square$

Der „Ganzheitssatz“

Um abschließend zu zeigen, dass ein maximaler Fluss f in N_G ein maximales Matching M_f beschreibt, müssen wir zeigen, dass jeder maximale Fluss ganzzahlig ist.

Satz („Ganzheitssatz“)

Sei $N = (V, E; c; s, t)$ ein Flussnetzwerk mit ganzzahligen Kapazitäten $c(e)$. Dann gibt es einen ganzzahligne maximalen Fluss f.

Beweis (Skizze)

Der Satz ergibt sich induktiv aus dem Algorithmus von Ford-Fulkerson.

Jeder augmentierende Weg hat ganzzahliges Gewicht. Damit bleiben die Kapazitäten des resultierenden Flusses ganzzahlig.

Satz

Die Größe eines maximalen Matchings M in einem bipartiten Graphen $G = (L \cup R, E)$ ist gleich dem Gewicht eines maximalen Flusses f in N_G. Ist f ganzzahlig, so ist $M_f := \{(l, r) \in E \mid f(l, r) > 0\}$ ein maximales Matching.

Beweis.

Der satz folgt direkt aus den beiden Lemmata und dem Ganzheitssatz. $\square$

Unser ursprüngliches Problem

Wie kann man nun das bipartite Matching auf unser ursprüngliches Problem anwenden?

Wir haben:

- m Rassen mit einer Mengenbeschränkung von $l_1, \ldots, l_m$.
- n Spieler mit Wunschrassen $R_1, \ldots, R_n \subseteq \{1, \ldots, m\}$.

Eine Spieler-Rassen-Zuordnung A ist nun eine Menge (i, j) von Paaren, so dass $i \in \{1, \ldots, n\}$ einen Spieler repräsentiert und $j \in \{1, \ldots, m\}$ eine Rasse, so dass

- höchstens ein Paar (i, j) für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ exisitert,
- $j \in R_i$ für jedes Paar (i, j) gilt,
- die Anzahl aller Paare (i, j) für ein festes j kleiner gleich l_j ist.

Unser ursprüngliches Problem

Wir konstruieren einen bipartiten Graphen $G = (L \cup R, E)$:

- $L = \{p_1, \ldots, p_n\}$, d.h. ein Knoten pro Spieler.
- $R = \bigcup_{i=1}^{m} \left\{ r_i^1, \ldots, r_i^{l_i} \right\}$, d.h. für die Rasse i insgesamt l_i Knoten.
- $(p_i, r_j^k) \in E$ genau dann, wenn $j \in R_i$.

Sei M ein Matching von G. Dann besteht M aus Paaren der Form (p_i, r_j^k). Wir definieren A_M folgendermaßen:

$$A_M := \left\{ (i,j) \mid \text{ es ex. } k \text{ mit } (p_i, r_j^k) \in M \right\}.$$

A_M ist dabei eine Spieler-Rassen-Zuordnung, denn

- für jedes i exisiter höchstens ein Paar $(p_i, r_j^k) \in M$ und somit höchstens ein Paar (i,j) in A_M,
- für $(i,j) \in A_M$ gilt $j \in R_i$,
- für jedes $j \in \{1, \ldots, m\}$ existieren höchstens l_j Paare der Form (p_i, r_j^k) in M und somit höchstens l_j Paare der Form (i,j) in A_M.

Unser ursprüngliches Problem

Umgekehrt definiert jede Spieler-Rassen-Zuordnung A ein Matching M_A in G.

Dazu ordnen wir für jedes j alle Paare der Form (i, j) (z.B. aufsteigend nach i), und erhalten so Tripel (i, j, k), wobei $1 \leq k \leq l_j$.

Damit definieren wir M_A folgendermaßen:

$$M_A := \left\{ (p_i, r_j^k) \mid (i, j, k) \in A \right\}.$$

Bemerkung

Das Spieler-Rassen-Problem lässt sich als bipartites Matching auffassen.

Unser ursprüngliches Problem

Statt die Rassenknoten zu vervielfältigen, könnte man auch anders Verfahren:

- Ein Knoten p_i in L pro Spieler,
- ein Knoten r_j in R pro Rasse,
- eine Kante (p_i, r_j) mit Kapazität 1 genau dann, wenn $j \in R_i$,
- eine Quelle s und eine Senke t,
- eine Kante (s, p_i) mit Kapazität 1 für jeden Spieler,
- eine Kante (r_j, t) mit Kapazität l_j für jede Rasse.

Dann entspricht jede Spieler-Rassenzuordnung einem (ganzzahligen) Fluss von s nach t und eine maximale Zuordnung somit einem maximalen Fluss.

Ein Beispiel