

Wellenlängenzuteilung in optischen WDM-Netzen

Mohammad Nasser

Hauptseminar AFS

Technische Universität Ilmenau

Gliederung

- Optische Kommunikationsnetze
- Problemdefinition
- Überblick über bekannte Ergebnisse
- Algorithmen für Pfadfärbung

Gliederung

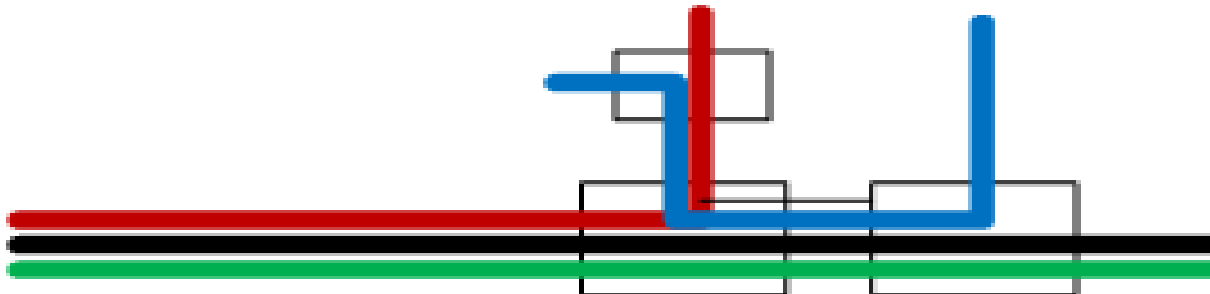
- **Optische Kommunikationsnetze**
- Problemdefinition
- Überblick über bekannte Ergebnisse
- Algorithmen für Pfadfärbung

Optische Kommunikationsnetze

- Datenübertragung mit Laserstrahlen durch Glasfaserkabel
- Haupt-Vorteile der optischen Übertragung:
 - extrem hohe Bandbreite (25-30 THz), Übertragungsrate bis zu mehreren Terabits 10^{12} pro Sekunde
 - geringe Bitfehlerraten
- Problem bei der hohen Bandbreite:
Übliche elektronische Komponenten können Signale im Terahertz-Bereich nicht verarbeiten.
- Lösung: Wellenlängen-Multiplex(WDM, wavelength-division multiplexing)
 - Aufteilung der Bandbreite eines Glasfaserkabels in Kanäle mit verschiedenen Wellenlängen
 - Daten verschiedener Verbindungen können dann mittels Laserstrahlen verschiedener Wellenlängen gleichzeitig durch dasselbe Glasfaserkabel übertragen werden.
 - Auf einer Wellenlänge: Übertragung von Daten mit Raten typischerweise 2,4 oder 10 Gbps

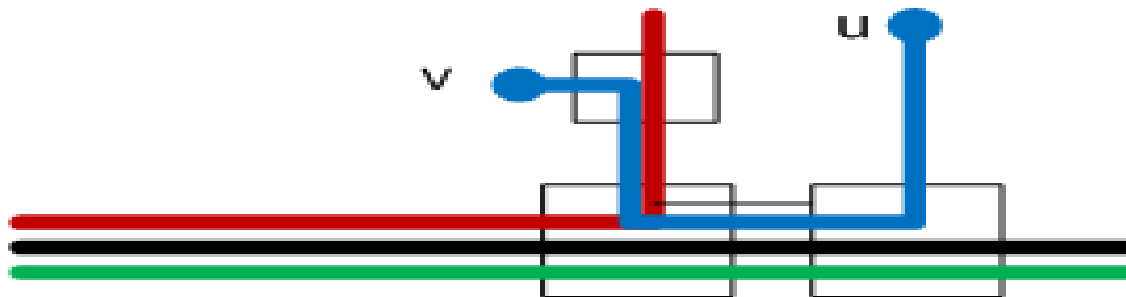
Optische Kommunikationsnetze

- **Add-Drop-Multiplexer (ADM)**: Einspeisung/ Extrahieren einzelner Wellenlängen
 - Die elektronischen Komponenten des Netzes müssen dann nur die Bitrate einer einzelnen Wellenlänge verarbeiten können, was problemlos möglich ist.
- Frei konfigurierbare **Optische Switches**: Weiterleitung der eingehenden Signale abhängig von ihrer Wellenlänge auf beliebige ausgehende Links ohne zwischenzeitliche Umwandlung in elektronische Form
 - Die Weiterleitung damit so gut wie verzögerungsfrei
- Mit den heute verfügbaren Switches: Bei der Weiterleitung keine Veränderung der Wellenlänge eines Signals möglich.



Optische Kommunikationsnetze

- **Wellenlängenrouting:** eine Verbindung von Knoten v zu Knoten u wird wie folgt eingerichtet:
 - Reservierung einer Wellenlänge entlang eines Pfades von v nach u
 - Konfiguration aller Switches: Weiterleitung der mit dieser Wellenlänge ankommenden Daten auf den nächsten Link dieses Pfades.
- Der Weg der Daten nach Einrichtung der Verbindung nur noch von Wellenlänge abhängig, deswegen Bezeichnung als *Wellenlängenrouting*
- Das Netz ist völlig unabhängig von der Art der übertragenen Daten und den verwendeten Protokollen.



Gliederung

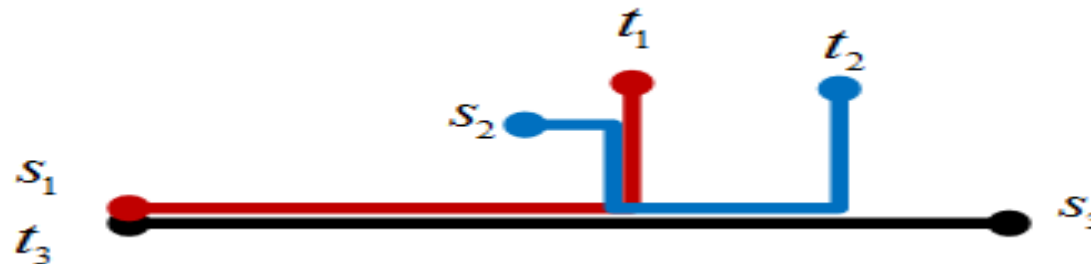
- Optische Kommunikationsnetze
- **Problemdefinition**
- Überblick über bekannte Ergebnisse
- Algorithmen für Pfadfärbung

Problemdefinition

- Bei der Einrichtung einer Verbindung muss eine Wellenlänge entlang eines Pfades für diese Verbindung reserviert werden.
- Zuordnung der Wellenlängen muss konfliktfrei sein: d.h. Zwei Verbindungen, deren Pfade denselben Link enthalten, dürfen nicht dieselbe Wellenlänge erhalten.
- Anzahl der verfügbaren Wellenlängen ist beschränkt: je mehr Wellenlängen, umso größer die Kosten für das Netz.
 - Heute: Systeme mit höchstens etwa 80 Wellenlängen kommerziell verfügbar.
- Deswegen das folgende Optimierungsproblem:
 - Für eine Menge von Verbindungsanfragen: Die Pfade und Wellenlängen so zuordnen, dass Anzahl der nötigen Wellenlängen minimiert wird.
- Wellenlängen als Farben vorstellbar; Deswegen der Name: *Routing und Pfadfärbung* (engl. *Routing and path coloring*, RPC)
- Pfade eindeutig bestimmt (z.B. in Bäumen) oder fest vorgegeben: dann einfach *Pfadfärbung* (engl. *Path coloring*, PC)

Problemdefinition

- Modellierung des Netzes als symmetrisch gerichteter Graph $G = (V, E)$
- Eine Verbindungsanfrage r : Durch den Sender $s_r \in V$ und den Empfänger $t_r \in V$ bestimmt.
- Für Einrichtung der Verbindung r :
 - Bestimmen eines gerichteten Pfades $P(r)$ in G von s_r nach t_r
 - Bestimmen einer Farbe (Wellenlänge) $w(r)$
- **Konfliktfreie** Zuordnung von Pfaden und Farben an Verbindungsanfragen: für jede Kante $e \in E$ und jede Farbe w existiert höchstens eine Anfrage, deren Pfad e enthält und der die Farbe w zugeordnet ist.



Problemdefinition

- **Problem RoutingAndPathColoring (RPC)**
 - **Instanz:** symmetrisch gerichteter Graph $G = (V, E)$, Menge R von Verbindungsanfragen der Form $r = (s_r, t_r)$ mit $s_r, t_r \in V$
 - **Lösung:** konfliktfreie Zuordnung von gerichteten Pfaden $P(r)$ und Farben $w(r)$ für alle $r \in R$
 - **Ziel:** minimiere die Anzahl verwendeter Farben
- **Problem PathColoring (PC)**
 - **Instanz:** symmetrisch gerichteter Graph $G = (V, E)$, Menge P von gerichteten Pfaden in G
 - **Lösung:** konfliktfreie Zuordnung von Farben $w(p)$ für alle $p \in P$
 - **Ziel:** minimiere die Anzahl verwendeter Farben

Problemdefinition

- Das MaxRPC-Problem: Wenn die verfügbaren Wellenlängen eines existierendes Netzes nicht ausreichen, um alle gewünschten Verbindungen konfliktfrei einzurichten.
- **Problem** MaximumRoutingAndPathColoring (MaxRPC)
 - **Instanz:** symmetrisch gerichteter Graph $G = (V, E)$, Menge R von Verbindungsanfragen der Form $r = (s_r, t_r)$ mit $s_r, t_r \in V$, Anzahl W verfügbarer Wellenlängen
 - **Lösung:** Wahl einer Teilmenge $R' \subseteq R$ und konfliktfreie Zuordnung von gerichteten Pfaden $P(r)$ und Farben $w(r) \in \{1, 2, \dots, W\}$ für alle $r \in R'$
 - **Ziel:** maximiere $|R'|$
- **Problem** MaxPC : wie MaxRPC, Pfade sind aber bereits vorgegeben

Problemdefinition

- Spezialfall von MaxRPC und MaxPC bei $W = 1$:
 - Das Finden einer maximalen Anzahl kantendisjunkter Pfade
- **Problem** MaximumEdgeDisjointPaths (MEDP)
- **Instanz:** symmetrisch gerichteter Graph $G = (V, E)$, Menge R von Verbindungsanfragen der Form $r = (s_r, t_r)$ mit $s_r, t_r \in V$
- **Lösung:** Wahl einer Teilmenge $R' \subseteq R$ und Zuordnung von Kantendisjunkten gerichteten Pfaden $P(r)$ für alle $r \in R'$
- **Ziel:** maximiere $|R'|$

Gliederung

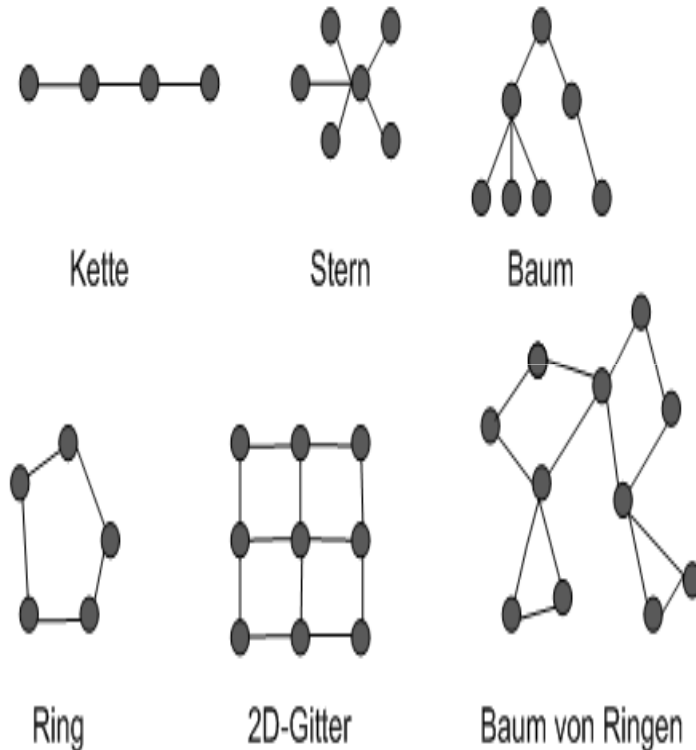
- Optische Kommunikationsnetze
- Problemdefinition
- **Überblick über bekannte Ergebnisse**
- Algorithmen für Pfadfärbung

Überblick über bekannte Ergebnisse

- Einige Netztopologien wurden untersucht
- Davon Baum von Ringen:

Definition:

- Ein einzelner Ring ist ein Baum von Ringen
- B_1, B_2 Bäume von Ringen, so auch B , der durch Identifizierung eines Knotens von B_1 mit einem Knoten von B_2 entsteht.



Überblick über bekannte Ergebnisse

Ergebnisse für RPC und PC:

- PC in Kette: polynomiell
- PC in Stern: polynomiell
- PC in Baum: NP-schwer, 5/3-Appr.Alg.
- PC in Ring: NP-schwer, 3/2-Appr.Alg.
- RPC in Ring: NP-schwer, 2-Appr.Alg.
- RPC in 2D-Gitter: NP-schwer, $(\log \log n)^{o(1)}$ -Appr.Alg.
- RPC in Baum von Ringen: NP-schwer, 10/3-Appr.Alg.

Überblick über bekannte Ergebnisse

Ergebnisse für MEDP und MEDPwPP:

- MEDP in Kette: polynomiell
- MEDP in Stern: polynomiell
- MEDP in Baum: NP-schwer, 5/3-Appr.Alg.
- MEDP in Ring: polynomiell
- MEDPwPP in Ring: polynomiell
- MEDP in 2D-Gitter: NP-schwer, $O(1)$ -Appr.Alg.
- MEDP in allg. Graphen: NP-schwer, $O(\sqrt{m})$ -Appr.Alg.
mit m Kanten

Überblick über bekannte Ergebnisse

Ergebnisse für MaxRPC und MaxPC:

- MaxPC in Kette: polynomiell
- MaxPC in Stern: polynomiell
- MaxPC in Baum: NP-schwer, 2,22-Appr.Alg.
- MaxPC in Ring: NP-schwer, $e/(e-1) \approx 1.58$ -Appr.Alg.
- MaxRPC Ring: NP-schwer, $e/(e-1) \approx 1.58$ -Appr.Alg.
- MaxRPC in 2D-Gitter: NP-schwer, $O(1)$ -Appr.Alg.
- MaxRPC in allg. Graphen: NP-schwer, $O(\sqrt{m})$ -Appr.Alg.
mit m Kanten

Gliederung

- Optische Kommunikationsnetze
- Problemdefinition
- Überblick über bekannte Ergebnisse
- **Algorithmen für Pfadfärbung**

Algorithmen für Pfadfärbung

Notation:

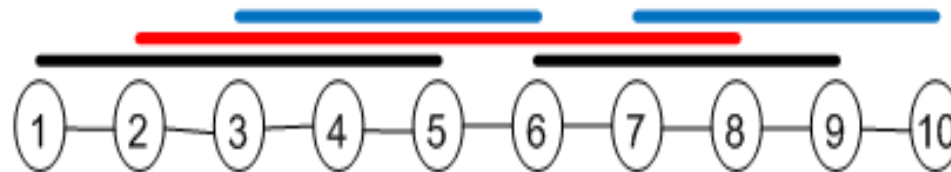
- $L(e)$: für eine gegebene Menge P von Pfaden ist $L(e)$ die Last der Kante $e \in E$,
- d.h. die Anzahl der Pfade in P , die e enthalten.
- $L_{\max} = \max_{e \in E} L(e)$ die maximale Kantenlast
- L_{\max} offensichtlich eine untere Schranke für die Anzahl von Farben in einer optimalen Färbung der gegebenen Pfade

- Zuerst Pfadfärbung in Ketten und in Bäumen: Pfade sind eindeutig bestimmt

Algorithmen für Pfadfärbung

Pfadfärbung in Ketten

- Ann.: Knoten von links nach rechts aufsteigend durchnummeriert
- Pfade, die von links nach rechts laufen, unabhängig von den Pfaden in der anderen Richtung
 - Deswegen können die Pfade in verschiedenen Richtungen unabhängig voneinander mit denselben Farben gefärbt werden.
- Ein einfacher Algorithmus für eine Färbung mit L_{\max} Farben für Pfade mit derselben Richtung
 - Bearbeite Pfade in der Reihenfolge aufsteigender linker Endknoten
 - Ordne jedem Pfad die kleinste Farbnummer zu, so dass kein Konflikt mit einem bereits gefärbten Pfad erzeugt wird
 - Um PC in Ketten zu lösen: Anwenden des Algorithmus einfach nacheinander auf die Pfade beider Richtungen



Algorithmen für Pfadfärbung

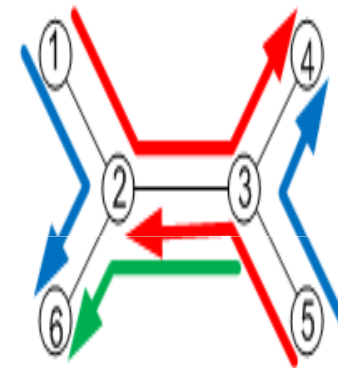
Pfadfärbung in Ketten

- **Satz 1:** Der angegebene Algorithmus berechnet für Pfade in Ketten in polynomieller Zeit eine optimale Färbung mit L_{\max} Farben
- **Beweis:**
- Offensichtlich kann der Algorithmus in polynomieller Zeit implementiert werden. Es ist klar, dass mindestens L_{\max} Farben benötigt werden.
- Per Induktion nach der Anzahl bearbeiteter Pfade zeigen wir, dass höchstens L_{\max} Farben verwendet werden.
- Zu Anfang (bevor ein Pfad gefärbt wurde) gilt die Behauptung.
- Annahme: die Behauptung gilt nach der Färbung der ersten k Pfade.
- Sei p der $(k+1)$ -te Pfad, der bearbeitet wird. Und sei (u,v) die erste Kante von p .
- Da alle vorher bearbeiteten Pfade ihre linken Knoten nicht rechts von u haben, enthalten alle vorher bearbeiteten Pfade, die den Pfad p schneiden, ebenfalls die Kante (u,v) . Da höchstens L_{\max} Pfade die Kante (u,v) enthalten können, gibt es höchstens $L_{\max} - 1$ Pfade, die bereits gefärbt sind und p schneiden. Wenn p die kleinste freie Farbe zugeordnet wird, so liegt diese freie Farbe also immer unter den ersten L_{\max} Farben. □

Algorithmen für Pfadfärbung


Pfadfärbung in Bäumen

- Im Gegensatz zu Ketten: Pfadfärbungsproblem in Bäumen NP-schwer
- Außerdem nicht immer möglich: eine Färbung mit L_{\max} Farben (im Bild ist $L_{\max} = 2$, mindestens 3 Farben sind aber nötig)
- Algorithmus für Pfadfärbung in Bäumen
 - Zu Anfang sind alle Pfade ungefärbt
 - Betrachte die Knoten des Baumes in Reihenfolge ihrer Präordernummern
 - Bei Knoten v betrachte alle ungefärbten Pfade, die v berühren, in beliebiger Reihenfolge und ordne jedem die kleinste mögliche Farbnummer zu, so dass kein Konflikt entsteht.



Algorithmen für Pfadfärbung

Pfadfärbung in Bäumen

- **Satz 2:** Der angegebene Algorithmus berechnet für Pfade in Bäumen in polynomieller Zeit eine Färbung mit höchstens $2L_{\max} - 1$ Farben. Da die optimale Farbanzahl mindestens L_{\max} ist, ist das ein 2-Approximationsalgorithmus.
- **Beweis:**
- Offensichtlich läuft der Algorithmus in polynomieller Zeit und liefert eine konfliktfreie Färbung.
- Wir zeigen durch Induktion nach der Anzahl bearbeiteter Pfade, dass der Algorithmus höchstens $2L_{\max} - 1$ Farben verwendet.
- Zu Anfang (bevor ein Pfad gefärbt wurde) ist die Behauptung richtig.
- Annahme: die Behauptung gilt nach der Färbung der ersten k Pfade.
- Sei p der $(k+1)$ -te Pfad, der bearbeitet wird. Und sei v der Knoten bei dem p bearbeitet wird. 

Algorithmen für Pfadfärbung

Pfadfärbung in Bäumen

- Da alle vorher gefärbten Pfade einen Knoten mit Präordernummer kleiner gleich der von v berühren, müssen alle vorher gefärbten Pfade, die den Pfad p schneiden, den Knoten v berühren und den Pfad p in einer zu v inzidenten Kante schneiden.
- Da p höchstens zwei zu v inzidente Kanten enthält, kann p also höchstens $2(L_{\max} - 1)$ bereits gefärbte Pfade schneiden.
- Unter den ersten $2L_{\max} - 1$ Farben findet man also immer eine Farbe, die p konfliktfrei zugewiesen werden kann. □
- **Bemerkung:**
- Der beste bekannte Algorithmus für Pfadfärbung in Bäumen verwendet höchstens $\lceil \frac{5}{3} L_{\max} \rceil$ Farben.

Algorithmen für Pfadfärbung

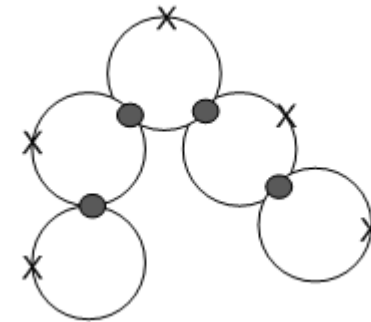
Pfadfärbung in Ringen

- RPC-Problem in Ringen: für jede Verbindungsanfrage muss einen der beiden möglichen Pfade (im oder gegen den Uhrzeigersinn) im Ring gewählt werden und ihm eine Farbe zugeordnet werden.
- Die Minimierung der Farbenanzahl ist auch hier NP-schwer.
- Der folgende einfache Algorithmus liefert eine konstante Approximationsrate:
 - Wähle zwei beliebige benachbarte Knoten u und v im Ring und „schneide“ die Kanten (u,v) und (v,u) durch. Man erhält so eine Kette mit Endknoten u und v .
 - Betrachte die gegebenen Verbindungsanfragen als Pfade in der Kette und verwende den optimalen Algorithmus für Ketten.

Algorithmen für Pfadfärbung

Pfadfärbung in Bäumen von Ringen

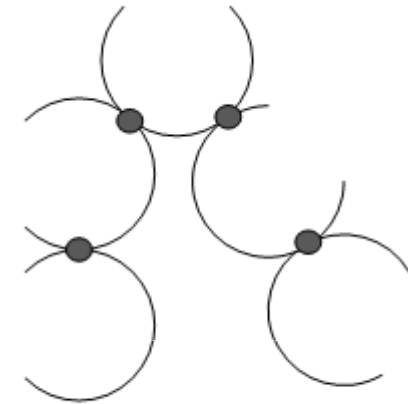
- Das RPC-Problem in Bäumen von Ringen ist auch NP-schwer, da dieses Problem bereits für einen einzelnen Ring NP-schwer ist.
- Die Idee, bei Ringen einfach einen beliebigen Ring „durchzuschneiden“, liefert auch hier einen einfachen Approximationsalgorithmus mit konstanter Approximationsrate:
 - Wähle in jedem Ring des Baums von Ringen zwei beliebige benachbarte Knoten u und v und schneide die Kanten (u,v) und (v,u) durch. Der verbleibende Graph ist ein Baum.
 - Verwende den Algorithmus für Pfadfärbung in Bäumen mit $\lceil \frac{5}{3} L_{\max} \rceil$ Farben.



Algorithmen für Pfadfärbung

Pfadfärbung in Bäumen von Ringen

- **Satz 4:** Der angegebene Algorithmus ist ein $\frac{10}{3}$ -Approximationsalgorithmus für RPC in Bäumen von Ringen.
- **Beweis:**
- Sei S^* eine optimale Lösung für das Pfadfärbungsproblem mit OPT Farben und sei L^* die maximale Kantenlast der Pfade, die S^* den Verbindungsanfragen zuordnet.
- Sei L die maximale Kantenlast der Pfade, die der angegebene Algorithmus den Verbindungsanfragen zuweist.
- Es kann gezeigt werden dass $L \leq 2L^*$.
- Da $L^* \leq OPT$, folgt $L \leq 2OPT$.
- Der Algorithmus benötigt $\frac{5}{3}L \leq \frac{10}{3}OPT$ Farben, um die Pfade im Baum zu färben. \square



Algorithmen für Pfadfärbung

Reduktion von MaxRPC auf MEDP

- Allgemein Verfahren, mit dem man einen Approximationsalgorithmus für MaxPC (MaxRPC) in einer Netztopologie erhält, wenn man bereits einen r -Approximationsalgorithmus für MEDPwPP (MEDP) hat.
- Wir zeigen es für MaxPC und MEDPwPP. Für MaxRPC und MEDP funktioniert es analog.
- Sei A_1 ein r -Approximationsalgorithmus für MEDPwPP, d.h. für jede vorgegebene Menge P von gerichteten Pfaden in einem symmetrisch gerichteten Graphen G liefert $A_1(G,P)$ eine Menge $P' \subseteq P$ von Kantendisjunkten Pfaden, so dass $|P'| \geq z^*/r$, wobei z^* die Anzahl von Pfaden in einer optimalen Lösung für MEDPwPP ist.
- wir erhalten einen Approximationsalgorithmus A für MaxPC, in dem wir bei einer Instanz mit W Farben den Algorithmus A_1 einfach W -mal nacheinander aufrufen.

Algorithmen für Pfadfärbung

Reduktion von MaxRPC auf MEDP

- **Algorithmus A**
 - **Eingabe:** Graph G , Menge P von Pfaden, Anzahl W von Farben
 - **Ausgabe:** disjunkte Teilmengen P_1, \dots, P_W von P (jedes P_i kantendisjunkt)
- ```
begin
 for $i = 1$ to W do
 begin
 $P_i := A_1(G, P);$
 $P := P \setminus P_i ;$
 end
end
```

# Algorithmen für Pfadfärbung

## Reduktion von MaxRPC auf MEDP

- **Satz 5:** Wenn  $A_1$  ein  $r$ -Approximationsalgorithmus für MEDPwPP ist, so hat der Algorithmus  $A$  für MaxPC eine Approximationsrate höchstens

$$r' = \frac{1}{1 - e^{-1/r}} \leq r + 1$$

- **Beweis:**

- Sei  $a_i = |P_i|$  für  $i = 1, 2, \dots, W$ . Die von  $A$  berechnete Lösung für MaxPC besteht aus  $a_1 + a_2 + \dots + a_W$  Pfaden. Sei  $O^*$  die Menge von Pfaden in einer optimalen Lösung für das MaxPC-Problem, und sei  $OPT = |O^*|$  die Anzahl von Pfaden in  $O^*$ .

- Da  $A_1$  ein  $r$ -Approximationsalgorithmus für MEDPwPP ist, gilt für alle  $k=1, 2, \dots, W$ :

$$a_k \geq \frac{OPT - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})}{r} \quad (1)$$

- Wenn der Algorithmus  $r^W A_1$  zum  $k$ -ten mal aufgerufen wird, sind höchstens  $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$  der Pfade aus  $O^*$  einer Menge  $P_i$  zugeordnet, und da die restlichen mindestens  $OPT - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})$  Pfade in  $O^*$  mit  $W$  Farben gefärbt werden können, gibt es in  $P$  zu diesem Zeitpunkt noch eine Menge von  $(OPT - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}))/W$  kantendisjunkten Pfade. →

# Algorithmen für Pfadfärbung

## Reduktion von MaxRPC auf MEDP

- Wir behaupten nun, dass für  $k = 1, \dots, W$  gilt:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq OPT \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^k\right) \quad (2)$$

- Der Beweis der Ungleichung (2) mittels Induktion nach  $k$ .
- Für  $k = 1$  folgt die Ungleichung direkt aus (1)
- Annahme: Die Ungleichung (2) sei für  $k-1$  richtig.

- Wir können wie folgt rechnen:

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_k &\geq a_1 + \dots + a_{k-1} + \frac{OPT - (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1})}{rW} && \text{wegen (1)} \\ &= (a_1 + \dots + a_{k-1}) \left(1 - \frac{1}{rW}\right) + \frac{OPT}{rW} \\ &\geq OPT \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^{k-1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{rW}\right) + \frac{OPT}{rW} && \text{(Induktionsannahme)} \\ &= OPT \cdot \left(1 - \left(1 - \frac{1}{rW}\right)^k\right) \end{aligned} \quad \longrightarrow$$

# Algorithmen für Pfadfärbung

## Reduktion von MaxRPC auf MEDP

- Mit  $k = W$  erhalten wir also, dass der Algorithmus  $A$  mindestens

$$OPT \cdot \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{rW} \right)^W \right)$$

Pfade mit den  $W$  zur Verfügung stehenden Farben färbt. Da die Folge  $\left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n$  bekanntermaßen mit wachsenden  $n$  von unten gegen  $e^{-1}$  konvergiert, gilt:

$$1 - \left( 1 - \frac{1}{rW} \right)^W = 1 - \left( \left( 1 - \frac{1}{rW} \right)^{rW} \right)^{1/r} \geq 1 - (e^{-1})^{1/r} = 1 - e^{-1/r}$$

damit folgt, dass Algorithmus  $A$  eine Approximationsrate höchstens  $r' = 1/(1 - e^{-1/r})$  hat. Da  $e^x \geq 1 + x$  gilt, folgt  $e^{1/r} \geq 1 + \frac{1}{r} = \frac{r+1}{r}$  und damit  $e^{-1/r} \leq \frac{r}{r+1}$ . Damit erhalten wir

$$\frac{1}{1 - e^{-1/r}} \leq \frac{1}{1 - \frac{r}{r+1}} = r + 1 \quad \text{und haben so den Satz bewiesen.} \quad \square$$

# Anhang

- Wir haben die Kanten  $(u,v)$  und  $(v,u)$  durchschnitten und alle Verbindungen in der verbleibenden Kette geroutet.
- Betrachten wir nun eine beliebige Kante  $(a,b)$  der Kette.
- Die Verbindungen, die unser Routing durch  $(a,b)$  gelegt hat, unterteilen wir in zwei Typen:
- Typ 1: Verbindungen, die auch die Optimallösung durch  $(a,b)$  routet.  
Die Last dieser Verbindungen ist höchstens  $L^*$ .
- Typ 2: Verbindungen, für die die Optimallösung den alternativen Pfad im Ring verwendet hat. Alle Verbindungen vom Typ 2 verwenden in der Optimallösung die durchschnittene Kante zwischen  $u$  und  $v$  in derselben Richtung. Daher ist die Anzahl der Verbindungen vom Typ 2 ebenfalls höchstens  $L^*$ .
- Insgesamt gehen durch  $(a,b)$  also höchstens  $L^* + L^* = 2L^*$ .

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit