



„Komplexitätstheorie“ Übungsblatt 7, SS 2009

Aufgabe 1 (BINPACKING ist stark NP-vollständig)

Betrachten Sie die in der Vorlesung durchgeführte polynomielle Reduktion von 3-PM auf BINPACKING, welche zusammen mit der Tatsache, dass 3-PM NP-vollständig ist, beweist, dass BINPACKING stark NP-vollständig ist. Bei dieser Reduktion wird eine 3-PM-Eingabe $x = (A, B, C, E)$ mit Knotenmengen $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, und $C = \{c_1, \dots, c_n\}$, sowie mit Kantenmenge $E \subseteq A \times B \times C$, $|E| = m$, auf eine BINPACKING-Eingabe aus $4m$ Objekten und einer Bingröße von $b = 15 + 40K^4$ abgebildet, $K = 100n$. Die $4m$ Objekte werden durch eine Liste L dargestellt, die je 4 Kopien jeder Kante $(a_i, b_j, c_k) \in E$ hintereinander auflistet. Die erste Kopie bleibt unverändert. In der zweiten bzw. dritten bzw. vierten Kopie wird jedoch a_i bzw. b_j bzw. c_k unterstrichen. (Dies liefert für die Kante (a_i, b_j, c_k) z. B. die Objekte (a_i, b_j, c_k) , $(\underline{a_i}, b_j, c_k)$, $(a_i, \underline{b_j}, c_k)$, und $(a_i, b_j, \underline{c_k})$.) Zudem wird in L jedes erste unterstrichene Vorkommen eines Knotens a_i , b_j , oder c_k noch mit 1 markiert. (So erhält man z. B. das Objekt $(\underline{a_i}^1, b_j, c_k)$ für das erste unterstrichene Vorkommen von a_i in L .) Den verschiedenen Objekt-Typen werden die folgenden Volumina zugeordnet:

$$\begin{aligned}
 (a_i, b_j, c_k): & \quad 8 + 10K^4 - iK - jK^2 - kK^3 \\
 (\underline{a_i}^1, b_j, c_k): & \quad 1 + 10K^4 + iK \\
 (\underline{a_i}, b_j, c_k): & \quad 1 + 11K^4 + iK \\
 (a_i, \underline{b_j}^1, c_k): & \quad 2 + 10K^4 + jK^2 \\
 (a_i, \underline{b_j}, c_k): & \quad 2 + 11K^4 + jK^2 \\
 (a_i, b_j, \underline{c_k}^1): & \quad 4 + 10K^4 + kK^3 \\
 (a_i, b_j, \underline{c_k}): & \quad 4 + 8K^4 + kK^3
 \end{aligned}$$

Die Zahlengrößen sind polynomiell in n und ihre Bitlänge ist $O(\log n)$.

Von der Reduktionseigenschaft

„ E enthält ein 3-partites Matching genau dann, wenn die $4m$ Objekte in m Behälter passen.“

wurde in der Vorlesung die Richtung „ \Rightarrow “ gezeigt.

- (a) Gegeben sei eine 3-PM-Eingabe (A, B, C, E) mit $n = 3$ und $m = 7$, sowie

$$E = \{122, 123, 231, 233, 311, 312, 222\},$$

wobei ijk jeweils abkürzend für die Kante (a_i, b_j, c_k) steht. Finden Sie ein 3-partites Matching in E und konstruieren Sie die dazugehörige Verteilung der $4m$ Objekte auf m Behälter.

- (b) Betrachten Sie die folgende Aufteilung der 28 Objekte auf 7 Behälter.

2 2 2	3 1 1	1 2 3 ¹	1 ¹ 2 2	2 3 3	2 3 1 ¹	3 1 2
1 2 3	2 3 3	2 3 ¹ 1	1 2 ¹ 2	2 2 2	3 1 ¹ 1	3 1 2
2 3 3	2 2 2	2 ¹ 3 1	1 2 2 ¹	1 2 3	3 ¹ 1 1	3 1 2
2 2 2	2 3 1	2 3 3	1 2 2	1 2 3	3 1 1	3 1 2

Finden Sie heraus, wie man aus dieser Aufteilung ein 3-partites Matching ermittelt, und begründen Sie die Korrektheit Ihrer Lösung.

Aufgabe 2 (co-NPC)

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Satz. Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist NP-vollständig genau dann, wenn ihr Komplement $\bar{L} = \Sigma^* - L$ co-NP-vollständig ist.

Aufgabe 3 (Erweiterung von Blattfärbungen)

Ein Knoten v eines Graphen G heiße ein *Blatt*, wenn der Grad von v eins ist.

Nun ist das Problem der *Erweiterung von Blattfärbungen* informal wie folgt definiert. Gegeben ein zusammenhängender Graph G mit ≥ 3 Knoten, entscheide, ob man *jede* 3-Färbung der Blätter von G zu einer *legalen* 3-Färbung des gesamten Graphen G erweitern kann.

- (a) Geben Sie je zwei Graphen an, bei denen die Antwort „ja“ bzw. „nein“ ist.
- (b) Formulieren Sie das Problem als Sprache L .
- (c) Ordnen Sie L in eine der Klassen Σ_k^p , Π_k^p ein, und begründen Sie die Einordnung.

Aufgabe 4 (Fragen)

Aufgabe 4 von Blatt 6.