
Bewertung optischer Systeme

2. Physikalisch-optische Abbildung

Herbert Gross

Inhalt / Übersicht

2. Physikalisch-optische Abbildungstheorie

- 2.1 Fermat-Prinzip und optische Weglänge
- 2.2 Eikonal
- 2.3 Abbe-Sinusbedingung
- 2.4 Invarianten und Lichtleitwert
- 2.5 Phasenraum
- 2.6 Näherungen und Gültigkeitsbereiche

Inhalt / Übersicht

2. Physikalisch-optische Abbildungstheorie

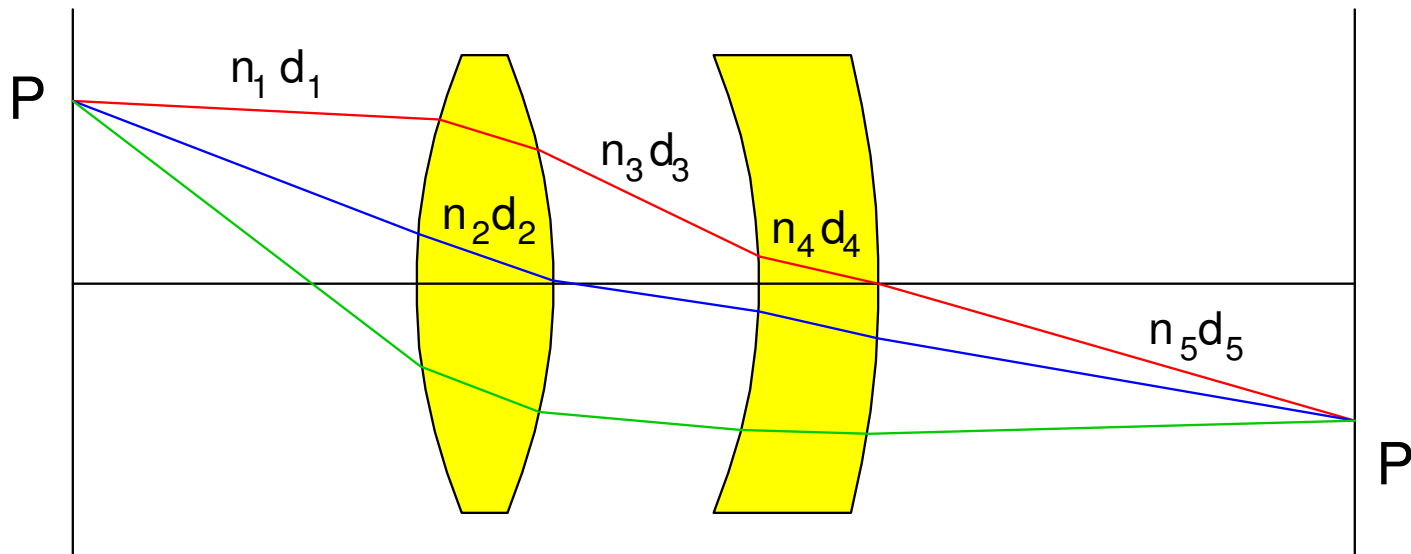
- 2.1 Fermat-Prinzip und optische Weglänge
- 2.2 Eikonal
- 2.3 Abbe-Sinusbedingung
- 2.4 Invarianten und Lichtleitwert
- 2.5 Phasenraum
- 2.6 Näherungen und Gültigkeitsbereiche

Fermatsches Prinzip

- Minimalprinzip von Fermat :
Zwischen zwei Wellenflächen ist der Lichtweg für alle Strahlwege gleich

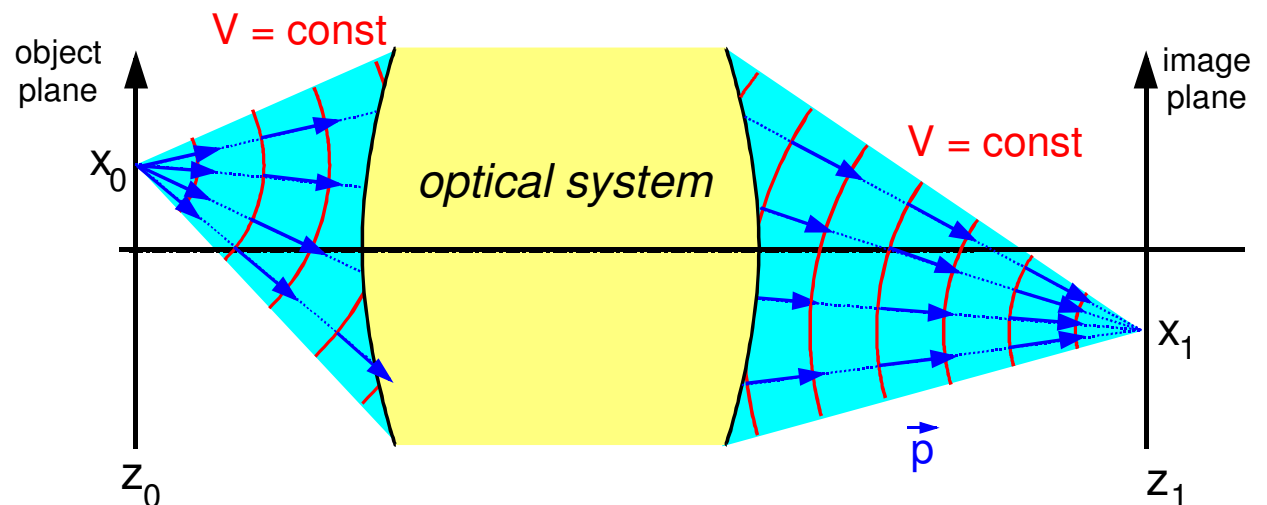
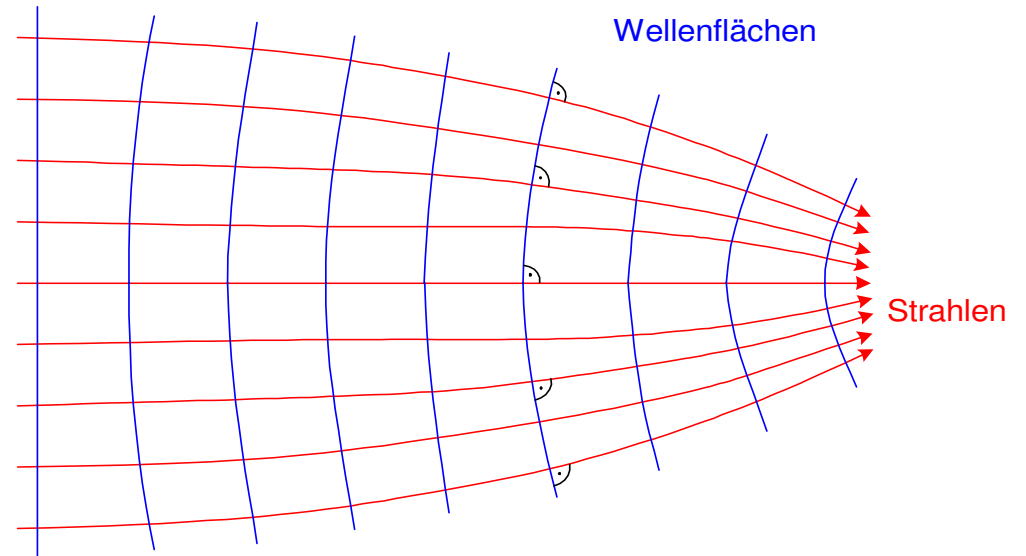
$$\int_{P1}^{P2} n \cdot \vec{s} \cdot d\vec{r} = const.$$

- Aus dem Fermatschen Prinzip lassen sich die Grundgesetze der Optik ableiten



Satz von Malus

- Satz von Malus :
Wellenflächen und Strahlen sind:
 - äquivalent
 - ineinander umrechenbar
 - bilden ein Orthogonalsystem.
- Voraussetzung :
Keine Kaustik
- Mathematisch :
Das Eikonal ist wirbelfrei



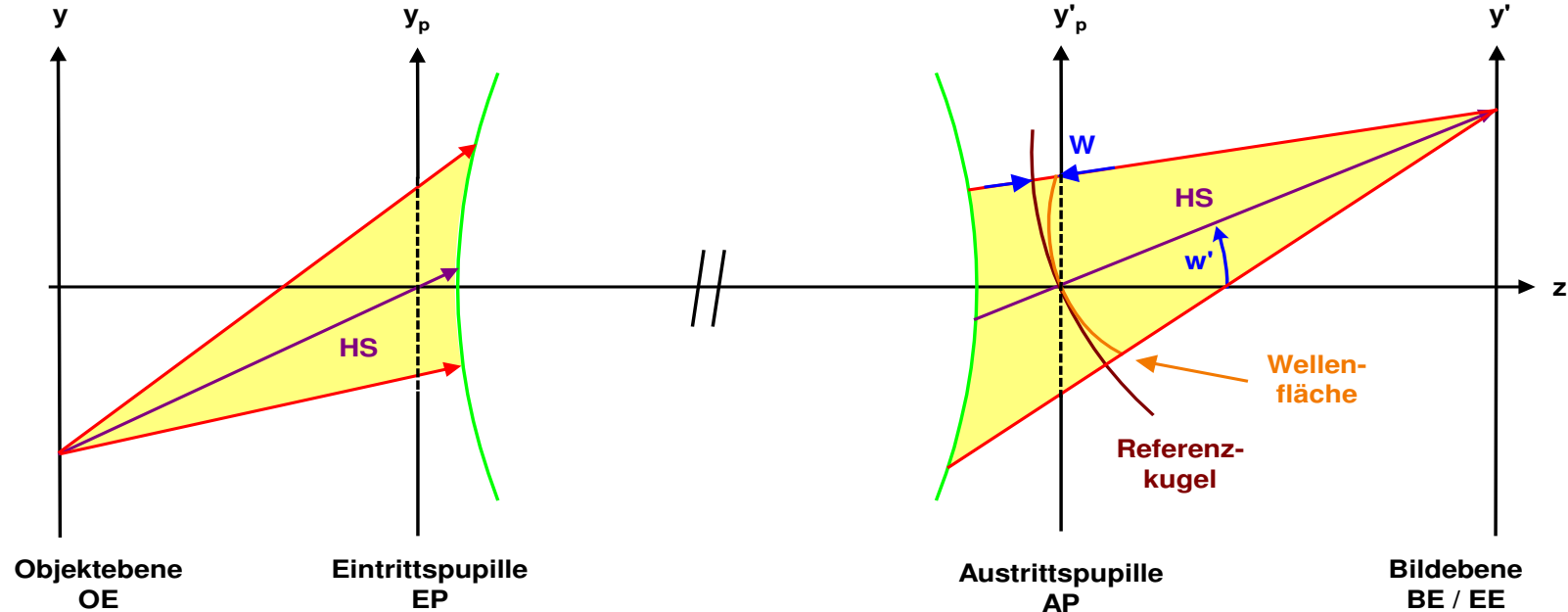
Optical Path Length

- Definition of OPL (optical path length):
Addition of the optical length as product of geometrical length and refractive index

$$l_{OPL} = \int_{OE}^{AP} n \cdot d\vec{r}$$

- OPD (optical path difference):
Difference of OPLs of ray and reference ray

$$\Delta_{OPD}(x, y) = l_{OPL}(x, y) - l_{OPL}(0, 0)$$



Inhalt / Übersicht

2. Physikalisch-optische Abbildungstheorie

- 2.1 Fermat-Prinzip und optische Weglänge
- 2.2 Eikonal
- 2.3 Abbe-Sinusbedingung
- 2.4 Invarianten und Lichtleitwert
- 2.5 Phasenraum
- 2.6 Näherungen und Gültigkeitsbereiche

Eikonal Equation

- Helmholtz-wave equation : ansatz, Eikonal S
- Limiting case geometrical optics
Eikonal equation describes rays.
No description of diffraction
- S : optical path length
S = const. is an equiphase surface
- Complex S : evanescent damped waves

$$E(\vec{r}) = E_o(\vec{r}) \cdot e^{ik_o S(\vec{r})}$$

$$\lambda_o \rightarrow 0$$

$$(\nabla S)^2 = n^2(\vec{r})$$

$$n^2(\vec{r}) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2$$

$$dS(\vec{r}, \vec{r}') = n' \cdot \vec{r} \cdot \vec{s} - n \cdot \vec{r}' \cdot \vec{s}'$$

$$S = \int n(\vec{r}) d\vec{r}$$

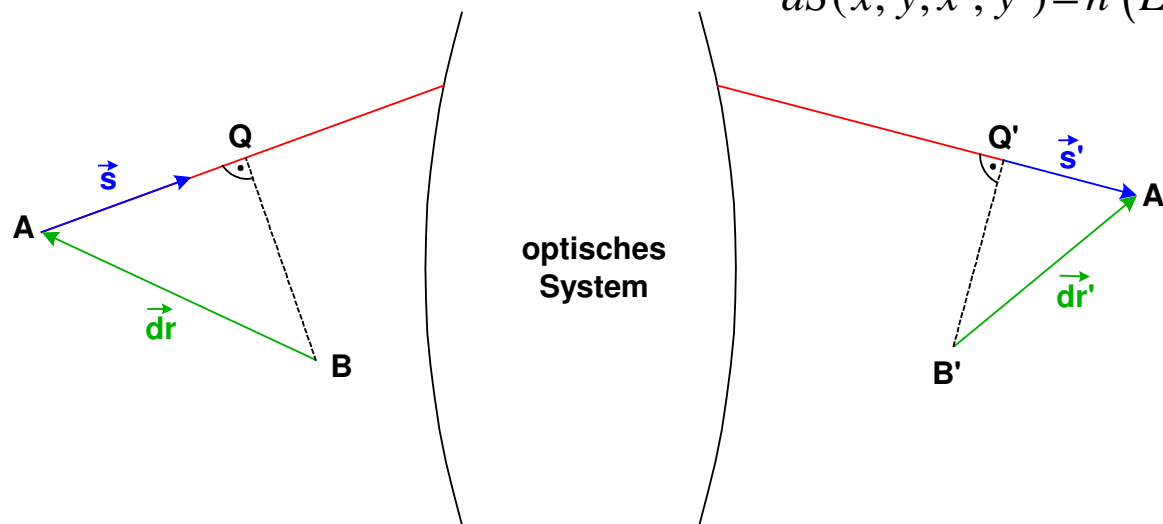
Punkteikonal

- Punkteikonal $S(x,y,x',y')$:
Optische Weglänge von einem Punkt x,y im Objektraum bis zu einem Punkt x',y' im Bildraum
- Beide Punkte liegen in definierten Referenzebenen bei z,z'
- Totales Differential des Hamiltonschen Eikonals

$$dS(\vec{r}, \vec{r}') = n' \cdot d\vec{r} \cdot \vec{s} - n \cdot d\vec{r}' \cdot \vec{s}'$$

mit Strahlrichtungskosinus (L,M,N) in Komponentendarstellung

$$dS(x, y, x', y') = n'(L' dx' + M' dy') - n(L dx + M dy)$$



Inhalt / Übersicht

2. Physikalisch-optische Abbildungstheorie

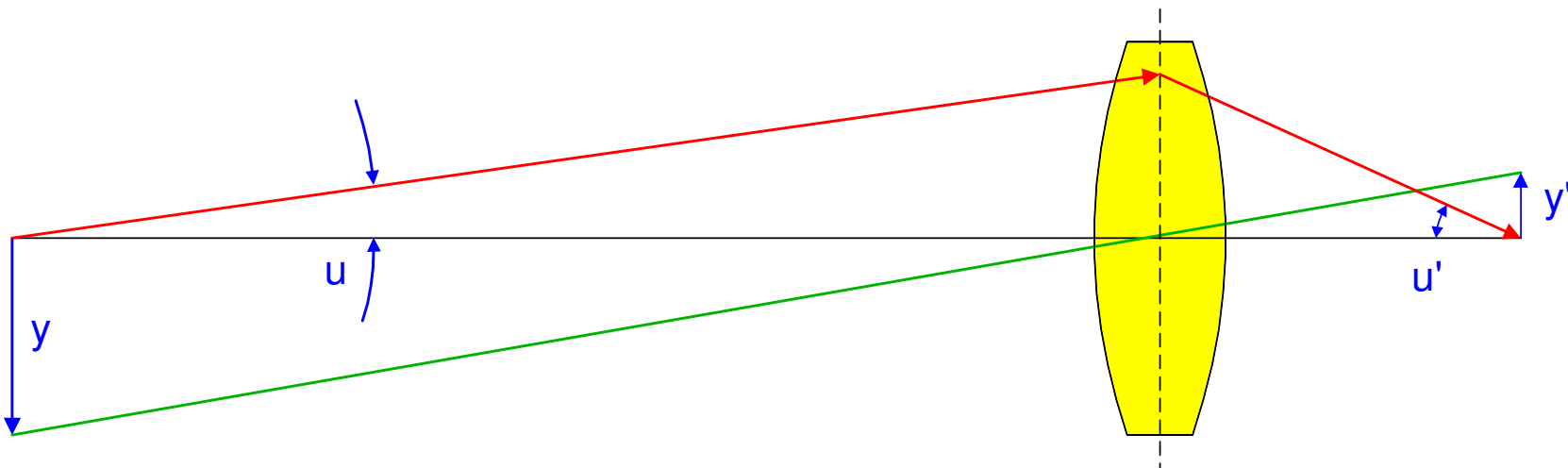
- 2.1 Fermat-Prinzip und optische Weglänge
- 2.2 Eikonal
- 2.3 Abbe-Sinusbedingung
- 2.4 Invarianten und Lichtleitwert
- 2.5 Phasenraum
- 2.6 Näherungen und Gültigkeitsbereiche

Invariante von Lagrange - Helmholtz

- Das Produkt aus numerischer Apertur und abgebildetem Feld ist in paraxialer Näherung konstant

$$L = n \cdot y \cdot u = n' \cdot y' \cdot u'$$

- Die Invariante L ist gleich dem Lichtleitwert (Etendue , Phasenraumvolumen)
- L beschreibt die Kapazität für den Informationstransport, Liouville-Theorem, Energieerhaltungssatz

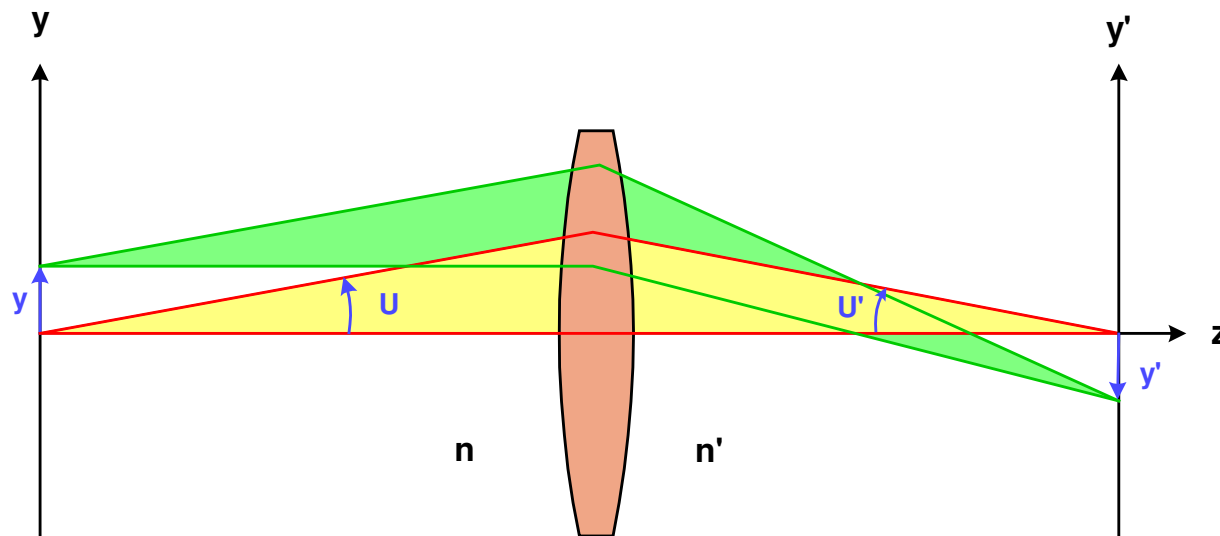


Sinusbedingung

- Formulierung der Lagrange Invariante für endliche Öffnungswinkel
- Entspricht Energierhaltung im System
- Konstante Vergrößerung für alle Aperturzonen

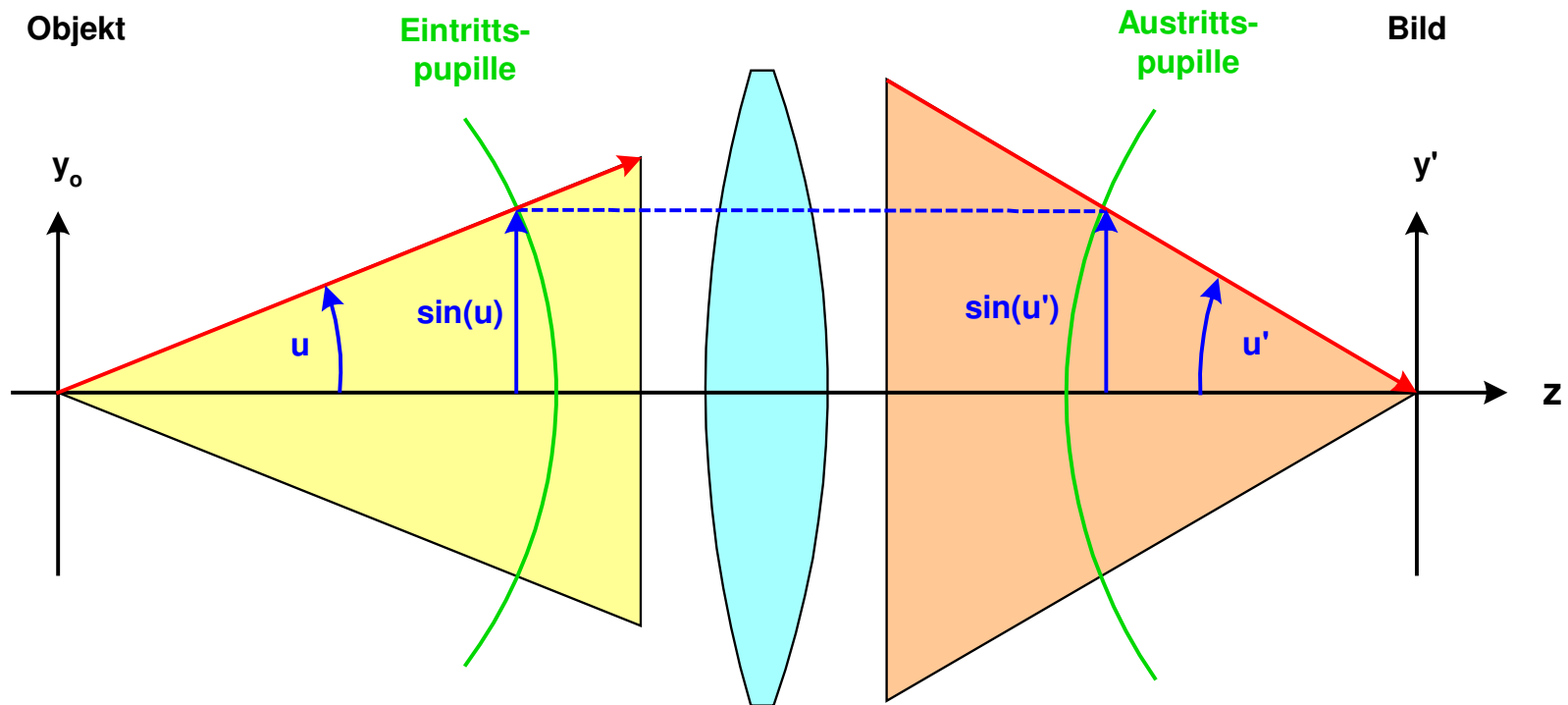
$$n \cdot y \cdot \sin u = n' \cdot y' \cdot \sin u'$$

$$\frac{\sin u}{U} = \frac{\sin u'}{U'}$$



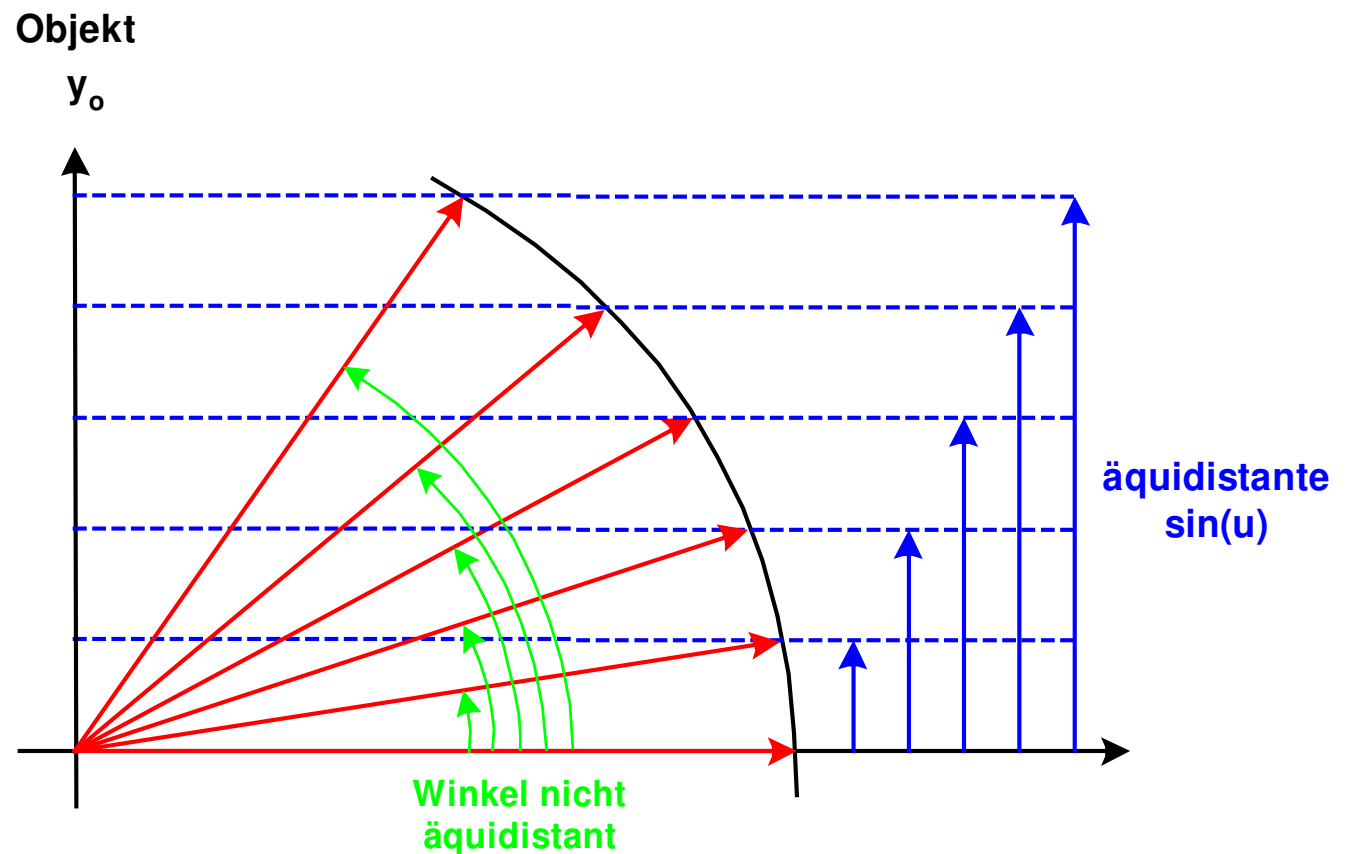
Sinusbedingung

- Sinusbedingung: lineare Übertragung der Richtungskosinus
- Pupillen sind Kugeln



Sinusbedingung

- Sinusbedingung : äquidistante Abstufung der $\sin u$
- Lineare Übertragung der Frequenzen



Aplanasie / Isoplanasie

- Aplanasie:

- Sphärische Aberration korrigiert
- Sinusbedingung erfüllt
- Komakorektion für kleine Objektfelder gegeben
- Einzelne aplanatische Fläche für spezielle Schnittweite möglich, Abbildung virtuell

- Isoplanasie:

- Sphärische Aberration nicht notwendigerweise korrigiert
- Komabüschel liegt symmetrisch um den Hauptstrahl
- In erster Näherung ist die Wellenfläche bei kleinen Objekthöhen invariant
- Staebble-Lihotzky-Bedingung für Isoplanasie:

$$s' - S' = \frac{S' - s_p'}{\beta} \left(\frac{n \sin u}{n' \sin u'} - \beta \right)$$

- Quantitatives Maß bei Verletzung der Isoplanasie: OSC

Aplanasie / Isoplanasie

- Allgemeine Übersicht:

Nr	Sinus- bed.	Isoplana- siebed.	Sph Abe.	Sag. Koma	Tang. Koma	Abbildung
1						allgemein
2		erfüllt		0	0	isoplanatisch
3	erfüllt			0		axiale Aplanasie
4	erfüllt	automat. erfüllt	0	0	0	aplanatisch

Inhalt / Übersicht

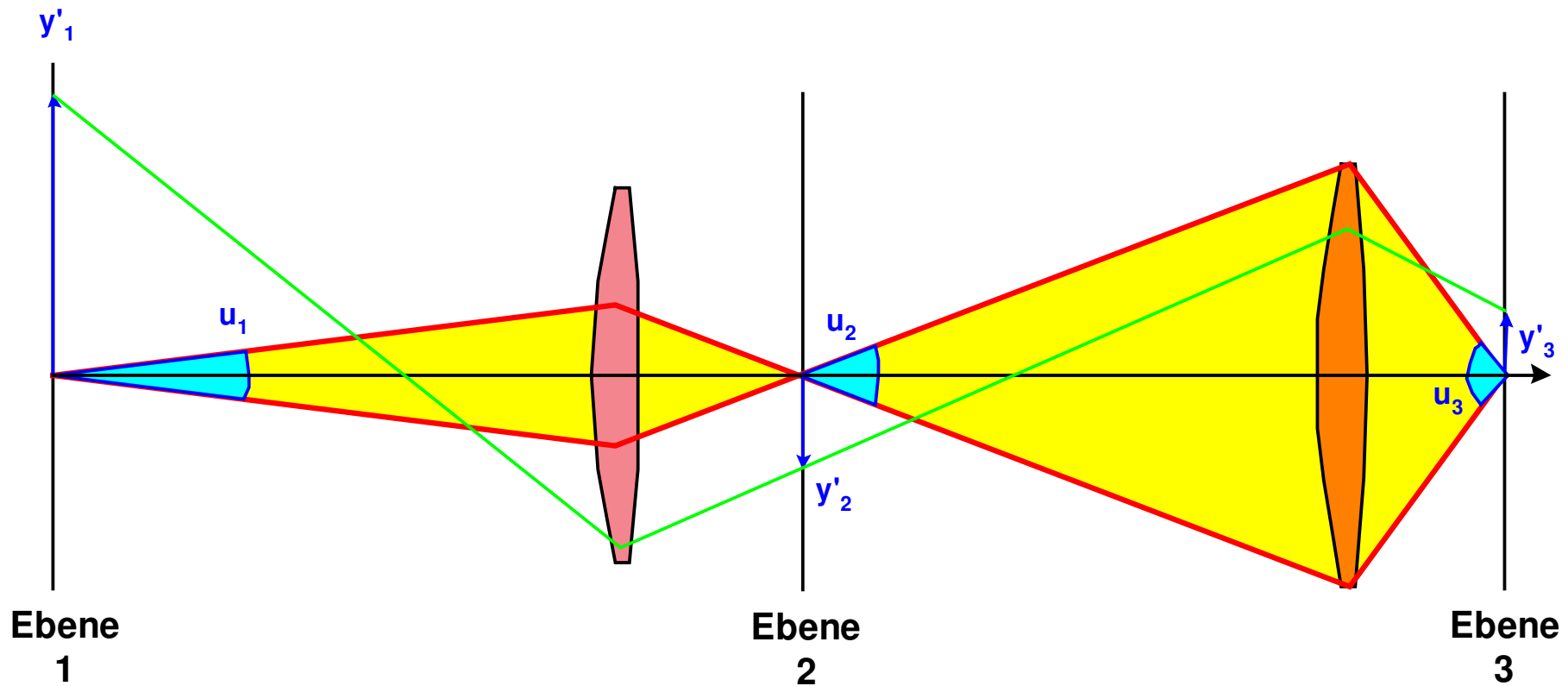
2. Physikalisch-optische Abbildungstheorie

- 2.1 Fermat-Prinzip und optische Weglänge
- 2.2 Eikonal
- 2.3 Abbe-Sinusbedingung
- 2.4 Invarianten und Lichtleitwert
- 2.5 Phasenraum
- 2.6 Näherungen und Gültigkeitsbereiche

Invariante von Helmholtz-Lagrange

- Phasenraumkonstanz
Gemessen stets in konjugierten Bildebenen

$$n \cdot y \cdot \sin u = n' \cdot y' \cdot \sin u'$$

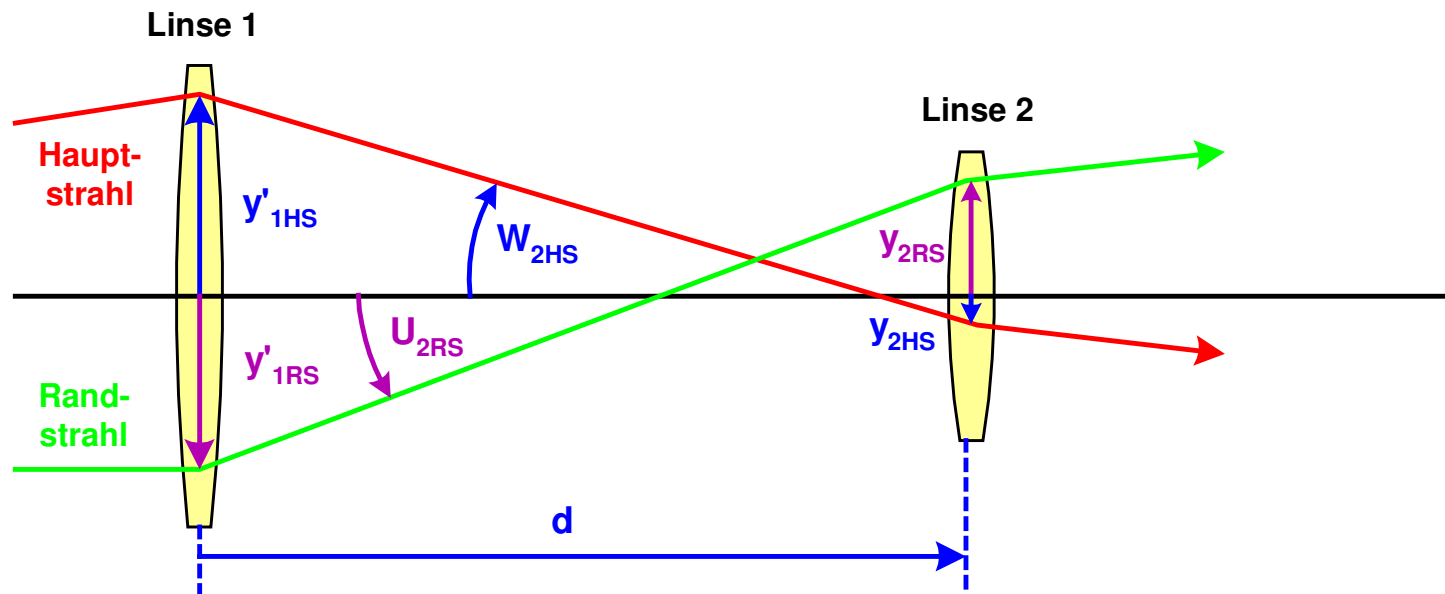


Lagrange-Invariante eines Systems

- Paraxiales System aus zwei Linsen :
Lagrange-Invariante mit Strahlhöhen ausgedrückt :

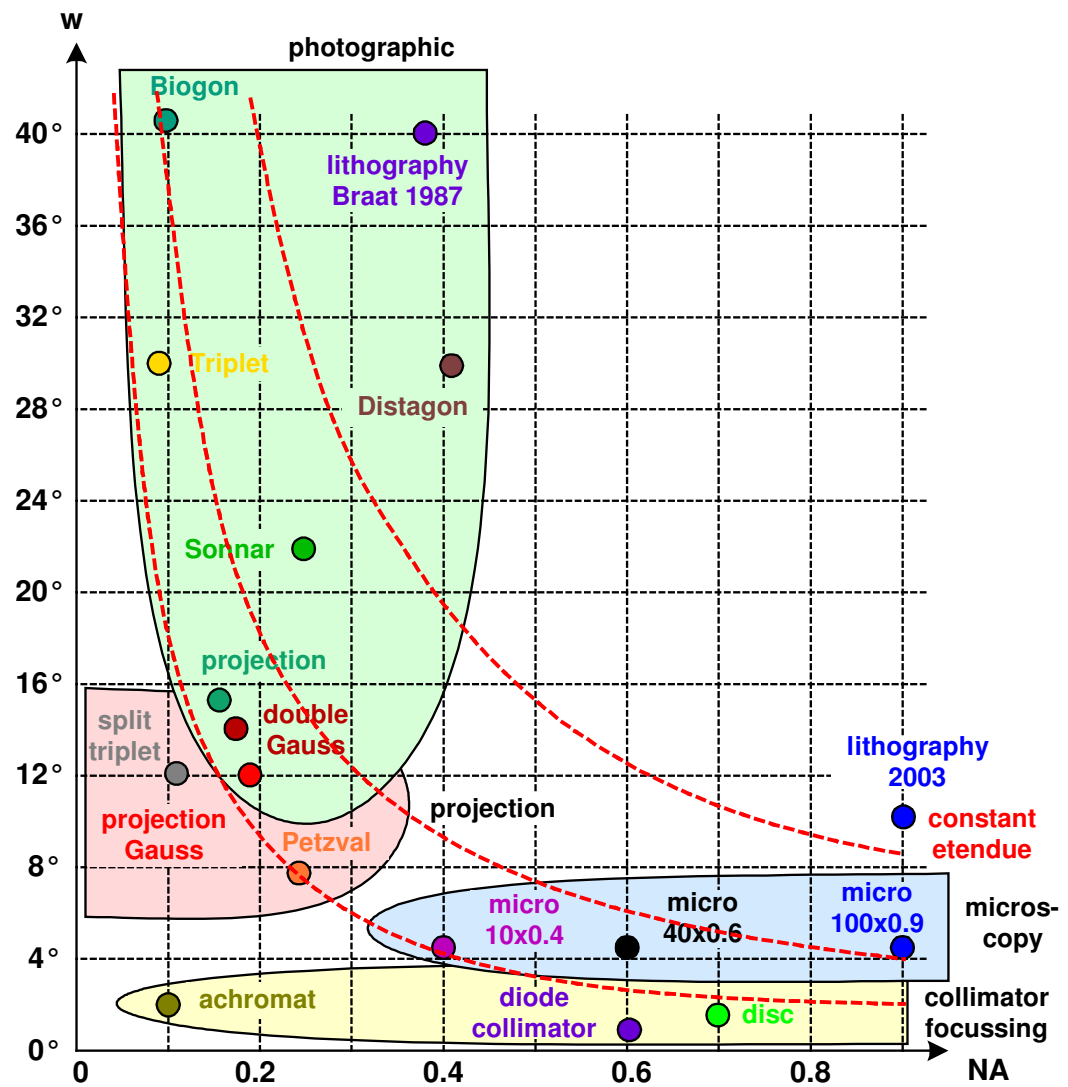
$$L = \frac{y'_{1RS} \cdot y_{2HS} - y_{2RS} \cdot y'_{1HS}}{d}$$

- Hauptstrahl (y) und Randstrahl(u) legen Lichtleitwert fest
- Lichtleitwert als Lichtröhre proportional $1 / d$



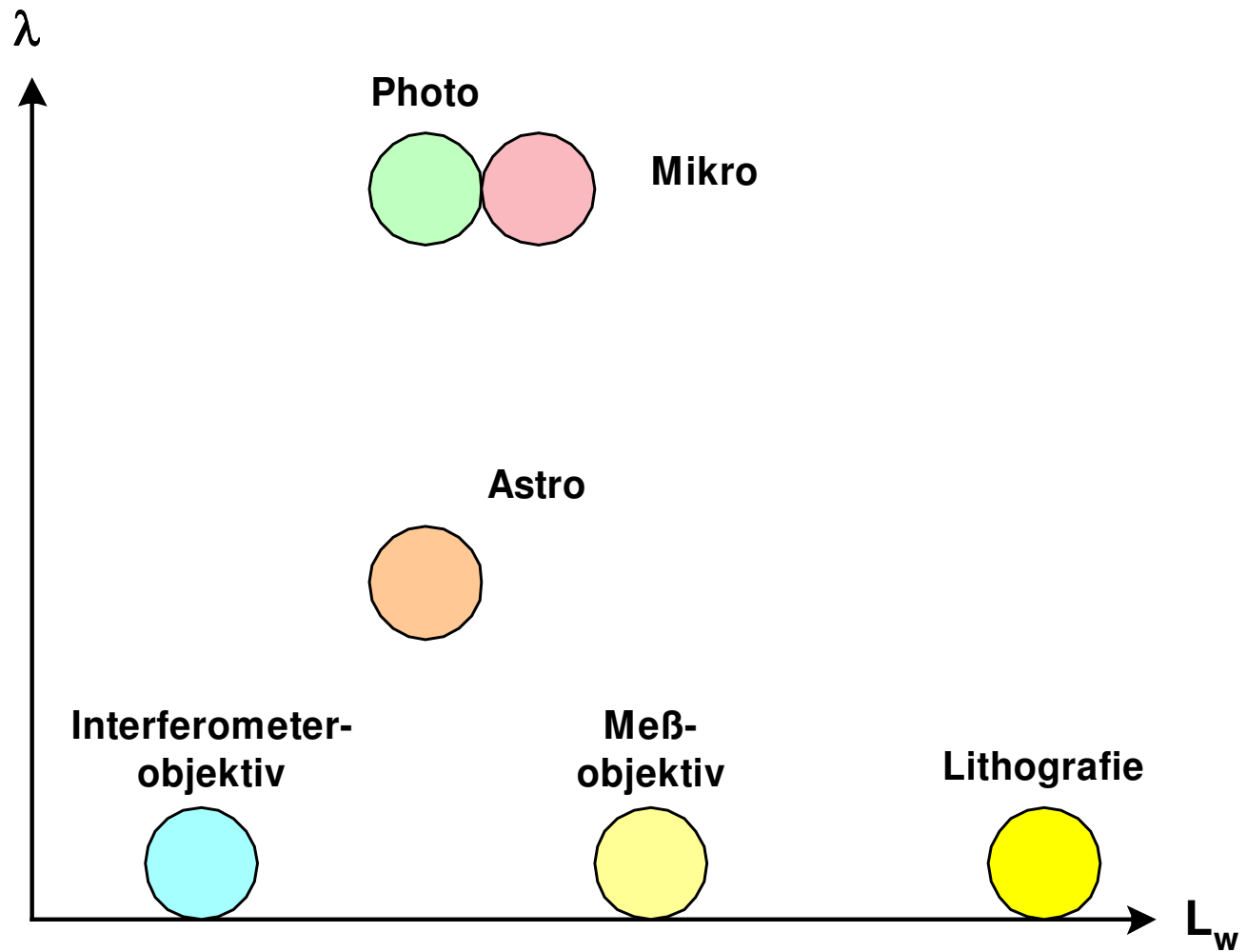
Field-Aperture-Diagram

- Classification of systems
- Aperture dominated :
Disk lenses, microscopy,
Collimator
- Field dominated :
Projection lenses,
camera lenses,
Photographic lenses



Systemtypologie : λ - L_w -Diagramm

- Leitwert als Produkt aus Apertur und Feld
- Spektrale Anforderung als 3. Größe



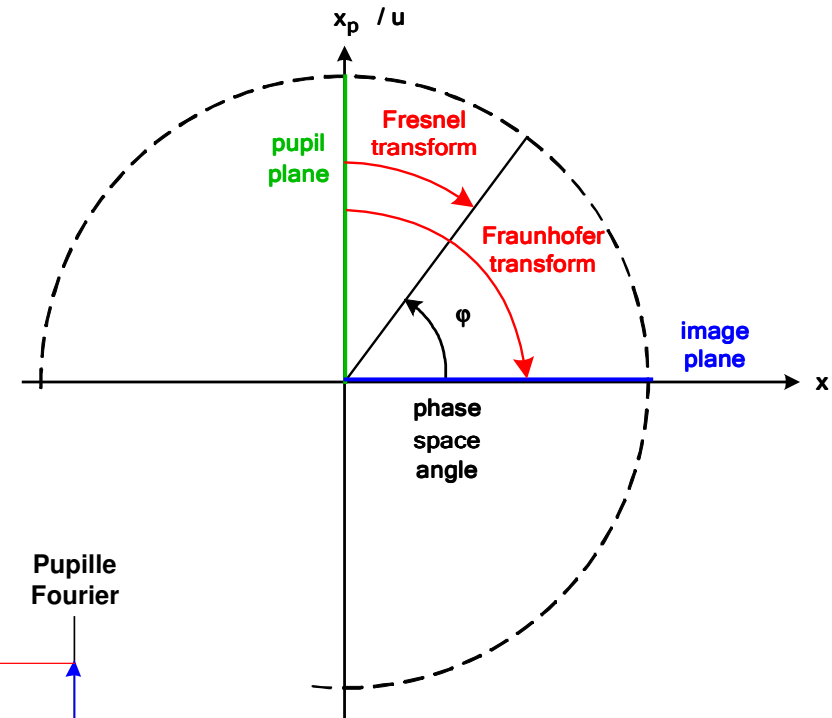
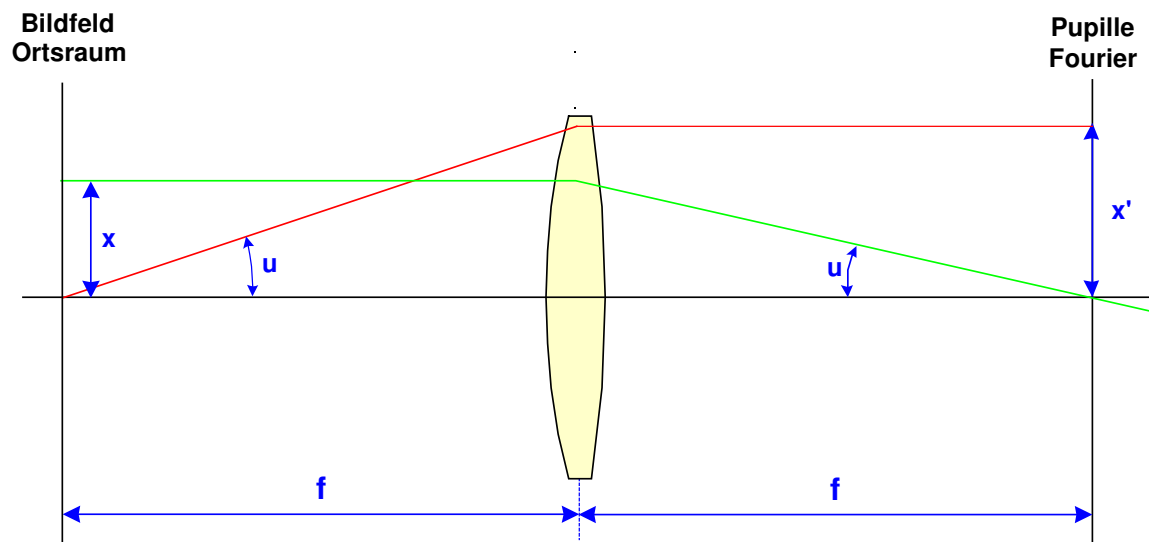
Inhalt / Übersicht

2. Physikalisch-optische Abbildungstheorie

- 2.1 Fermat-Prinzip und optische Weglänge
- 2.2 Eikonal
- 2.3 Abbe-Sinusbedingung
- 2.4 Invarianten und Lichtleitwert
- 2.5 Phasenraum
- 2.6 Näherungen und Gültigkeitsbereiche

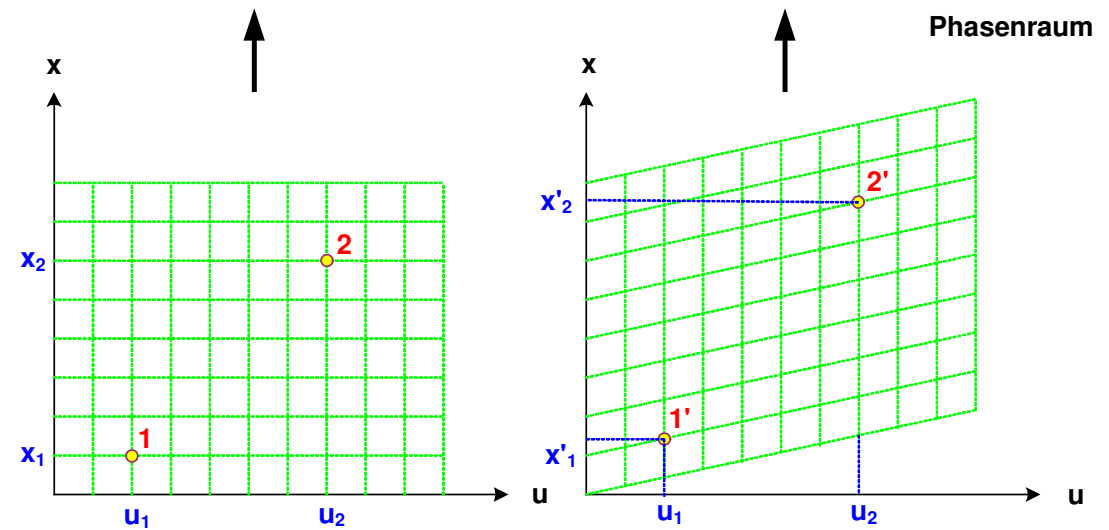
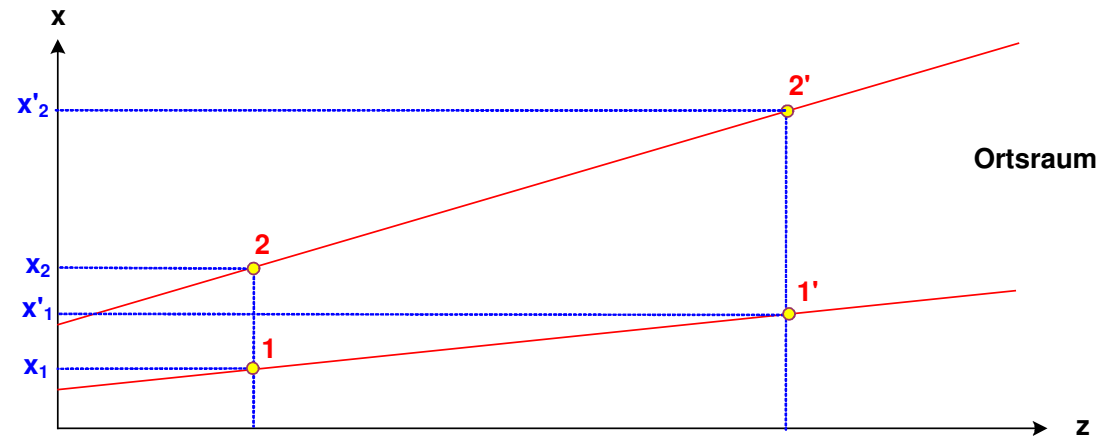
Phasenraum : 90° - Übergang

- Übergang Pupille - Bildfeld :
90°-Drehung im Phasenraum
- Fourier-inverse Ebenen,
Fraunhofer Transformation
- Winkel $0 < \varphi < 90$:
Fractional Fourier Transformation,
Fresnel Transformation

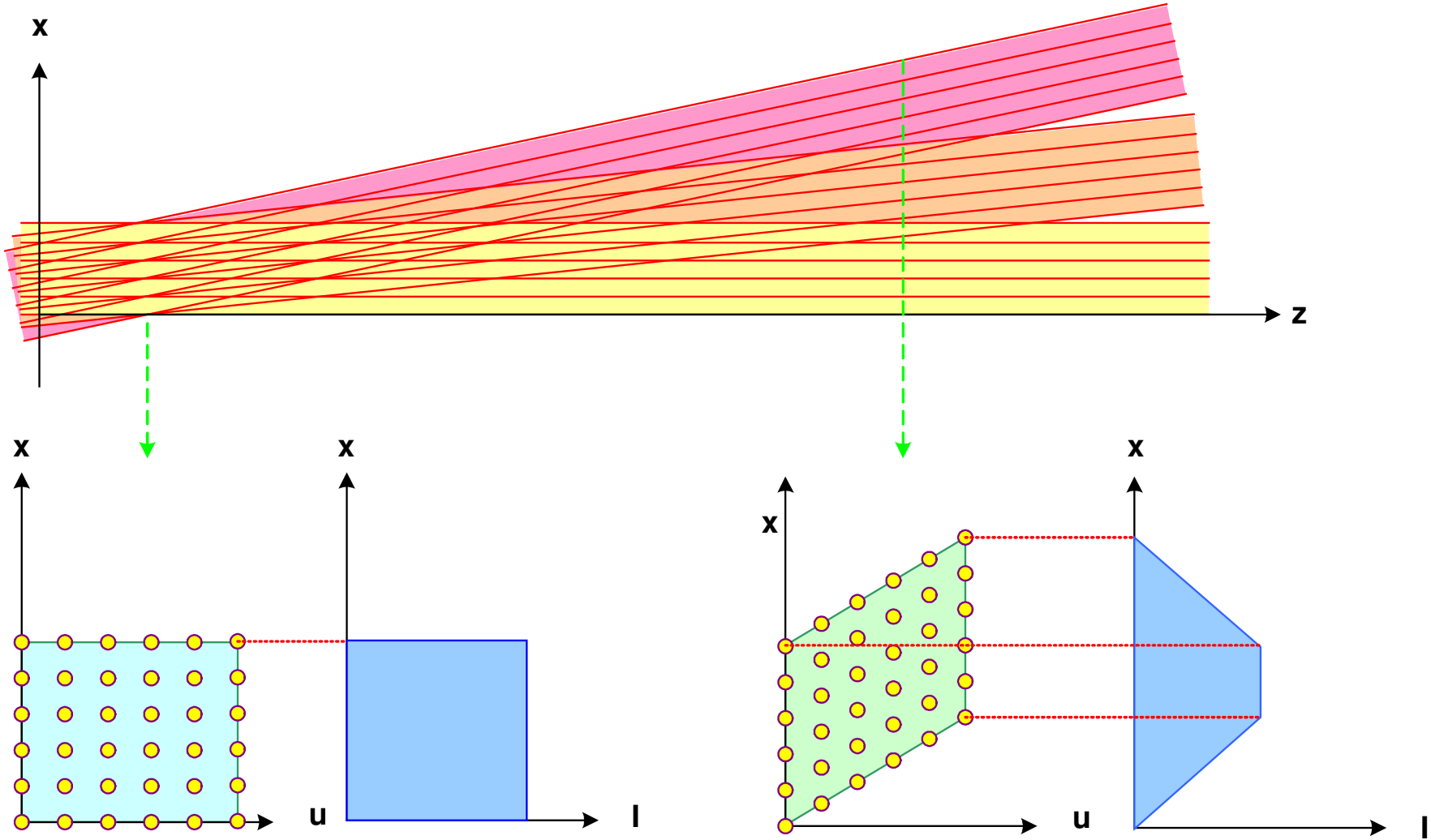


Phasenraum

- Direkte Darstellung des Phasenraums $x-u$ über das Raytracing

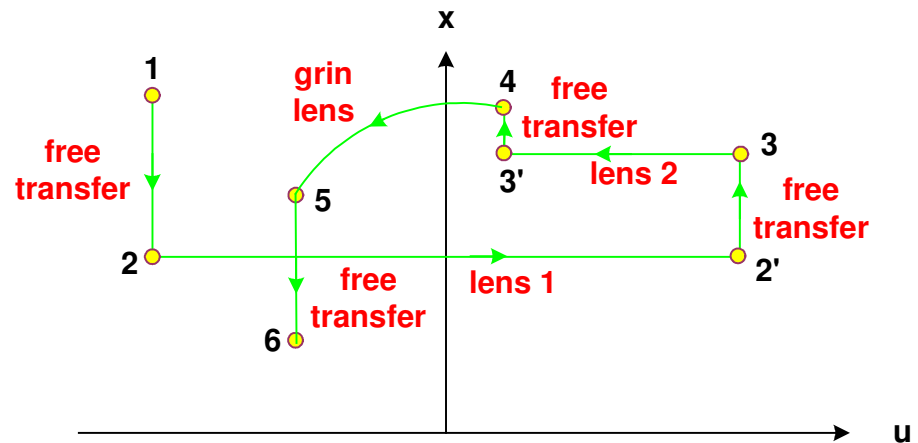
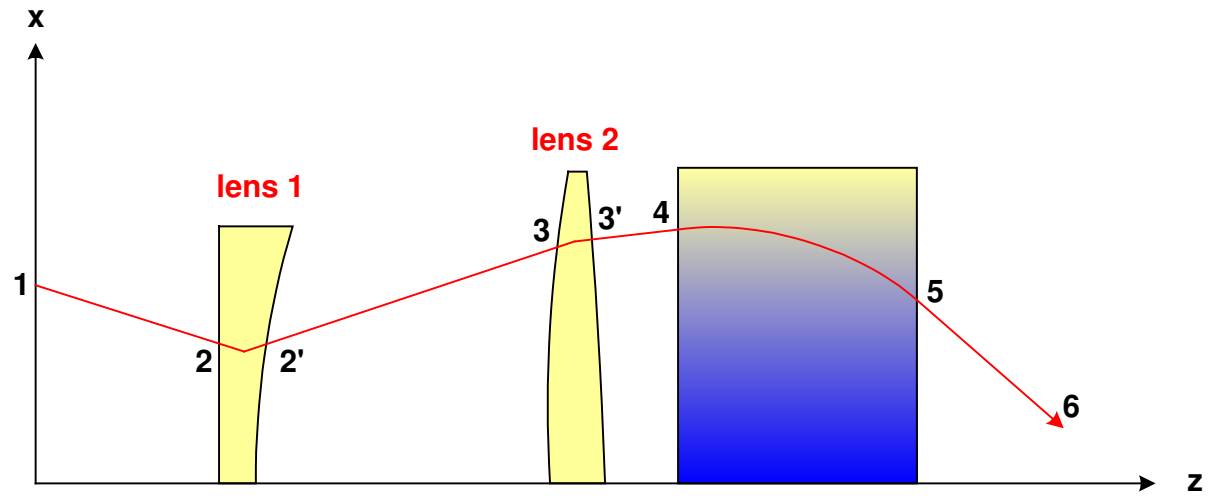


Phasenraum



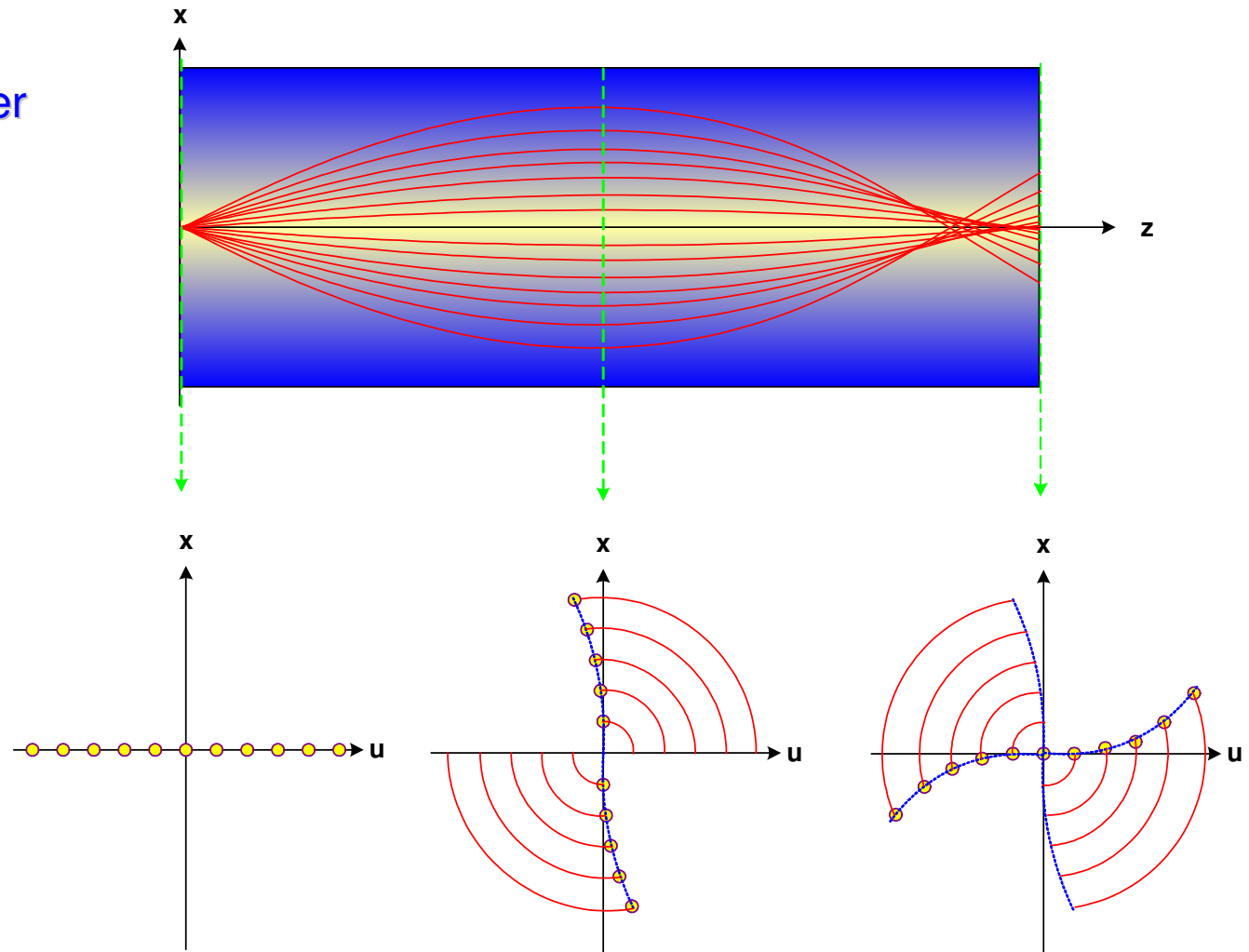
Phasenraum

- Direkte Darstellung des Phasenraums $x-u$ über das Raytracing



Phasenraum

- Phasenraumbild und Aberrationen einer Grin-Linse



Phasenraum

- Geometrische Optik :
Lichtleitwert / Etendue

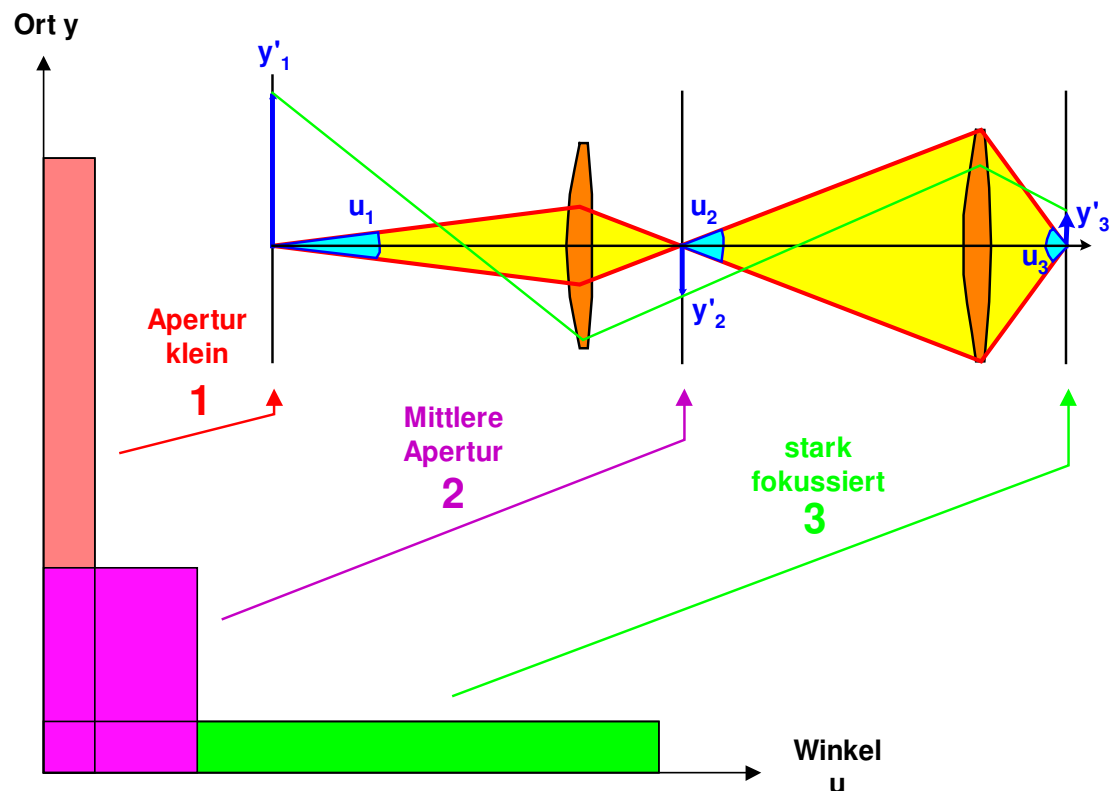
$$L_{Geo} = \frac{\emptyset}{2} \cdot \sin u$$

- Paraxialoptik : Invariante von Lagrange / Helmholtz

$$L = n \cdot y \cdot u = n' \cdot y' \cdot u'$$

- Konstanz von L entspricht
Energierhaltungssatz

- x-u-Phasenraum
in der Optik :
Fläche bleibt
konstant



Phasenraum

- Laseroptik : Strahlparameterprodukt aus Tailenradius und Fernfelddivergenz

$$L_{GB} = w_o \cdot \theta_o$$

- Minimalvolumen im Phasenraum : TEM₀₀ - Grundmode

$$L_{GB} = \frac{\lambda}{\pi}$$

- Elementarvolumen : Unschärferelation in der Optik

- Höhere Lasermoden

$$L_{GB} = w_n \cdot \theta_n = \frac{\lambda}{\pi} \cdot (2n+1)$$

- Geometrische Optik : Quasikontinuum

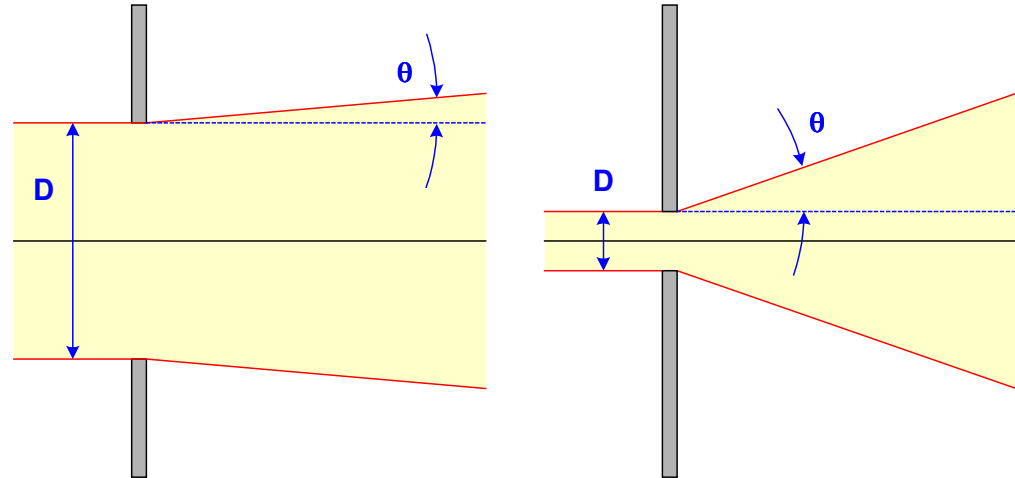
- L ist ein Qualitätsmaß für den Strahl bzgl. Fokussierbarkeit, größtmöglicher Bestrahlungsstärke

Uncertainty Relation in Optics

1. Slit diffraction

Diffraction angle inverse to slit width D

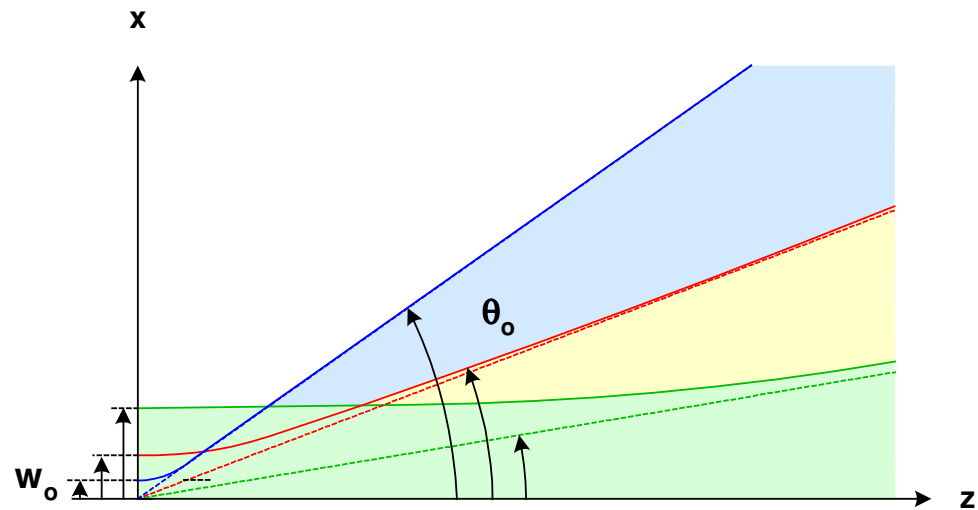
$$\theta = \frac{\lambda}{D}$$



2. Gaussian beam

Constant product of waist size w_0 and divergence angle θ_0

$$w_0 \theta_0 = \frac{\lambda}{\pi}$$

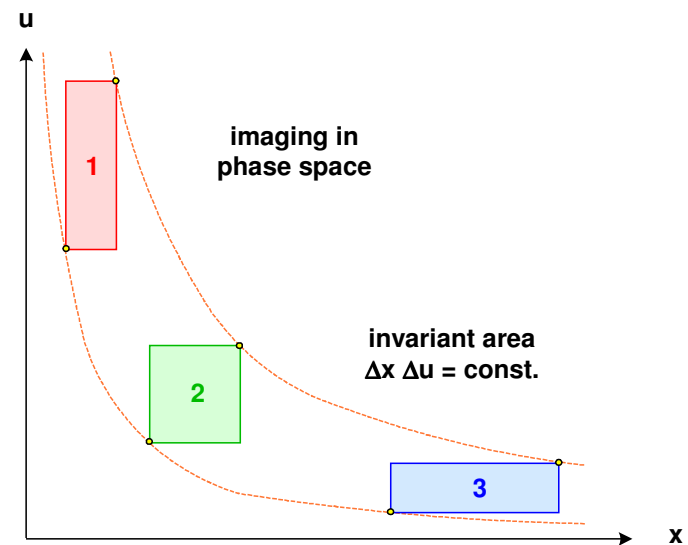


Conservation of Energy

- Invariance of Energy:
 - constant area in phase space in the geometrical model
 - constant integral over density in the wave optical model

- Incoherent ensemble, quasi continuum:
Jacobian matrix of transformation relates
the coordinate changes

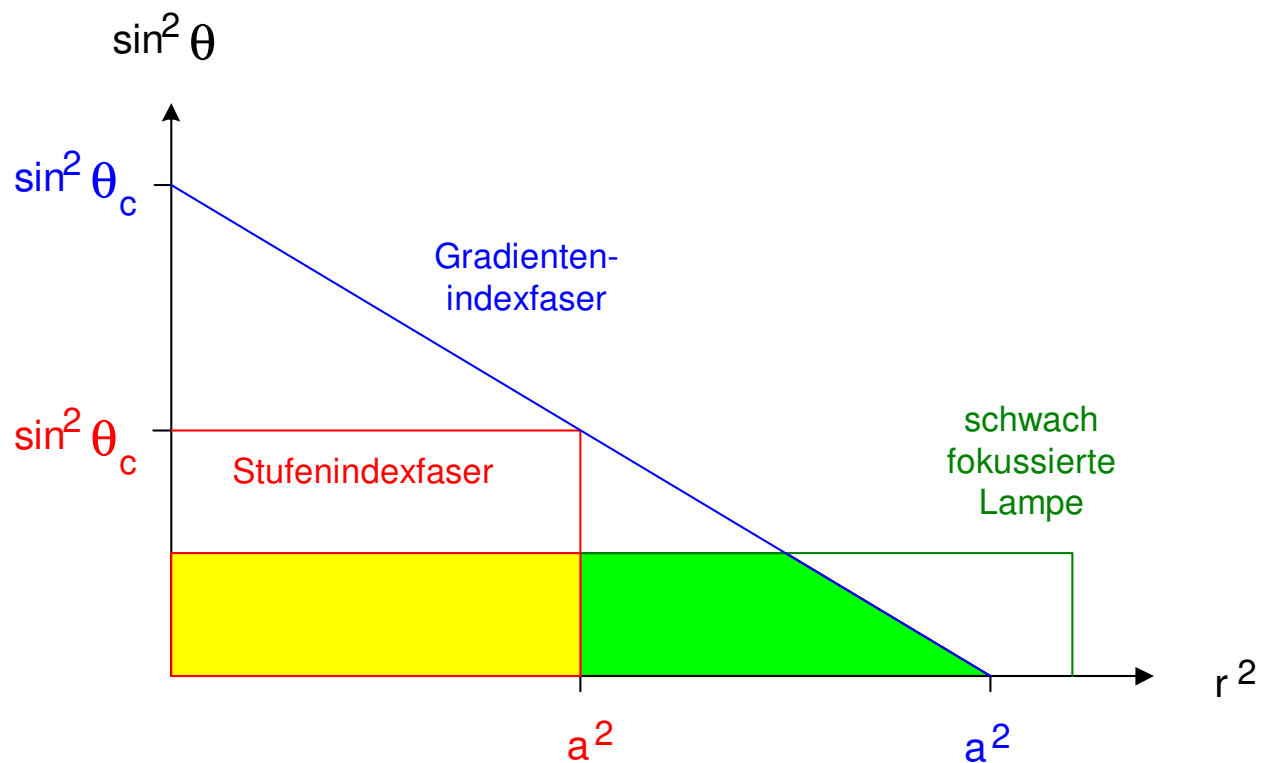
$$J = \frac{\partial L}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$



Phasenraumdarstellung von Kopplungsproblemen

- Diskussion von Koppelproblemen im Phasenraum :

Phasenraumfläche von Sender (Lichtquelle) und Empfänger (Faser) vergleichen.
Energieverlust bei unvollständigem Überlapp der Flächen



Photometrie im Phasenraum

- Strahlungsfluß

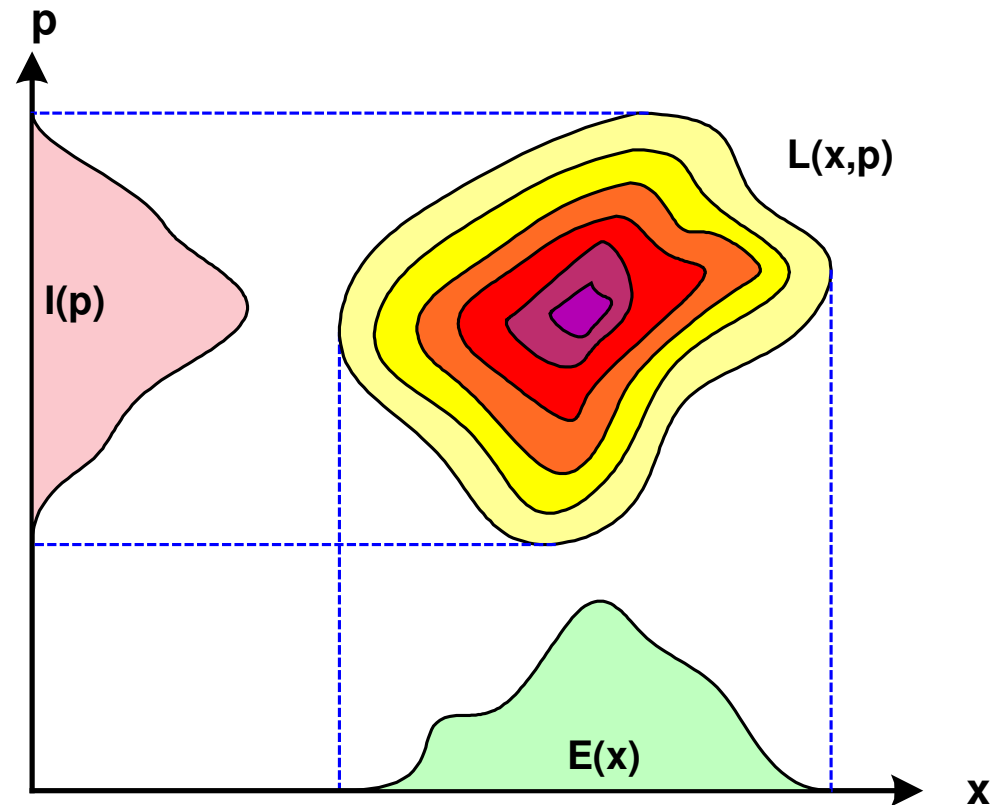
$$d\Phi = L(x, y, p, q) dx dy dp dq$$

- Projektionen der Leuchtdichte :
Intensität

$$I(p) = \int L(x, p) dx$$

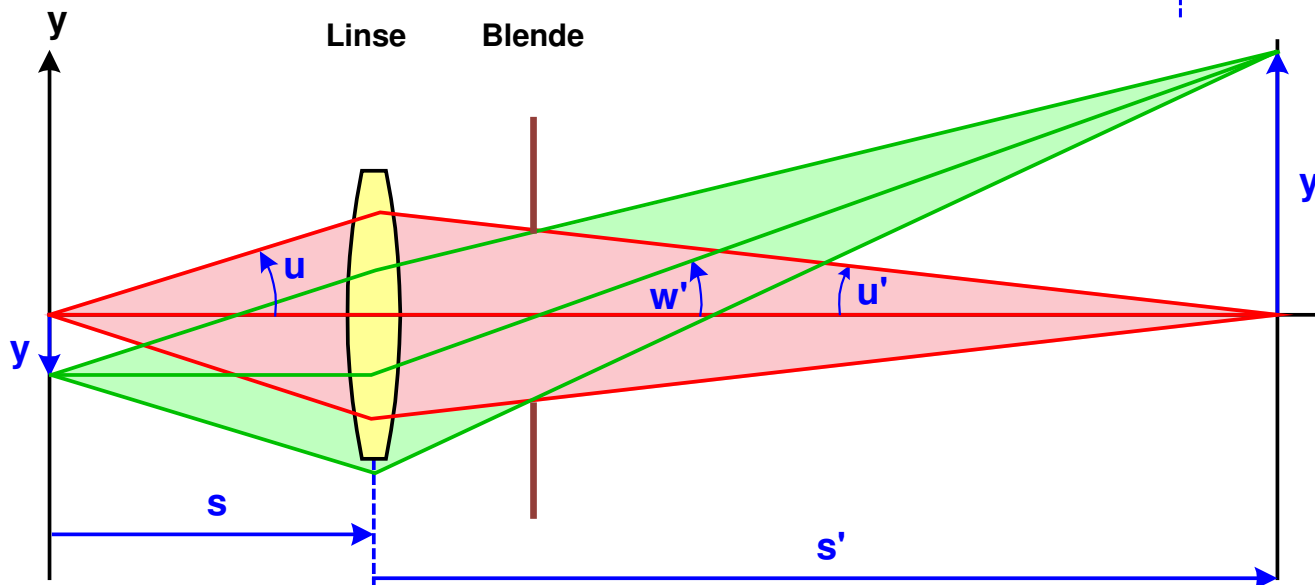
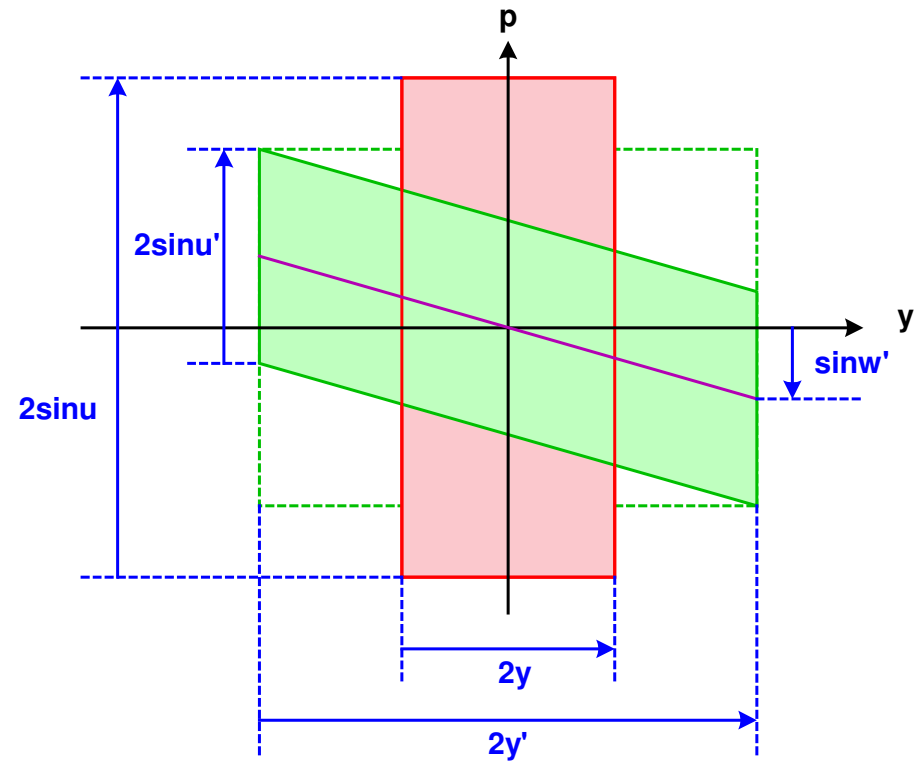
Bestrahlungsstärke

$$E(x) = \int L(x, p) dp$$



Photometrie im Phasenraum

- Strahltransport in Systemen
- Phasenraumfläche ändert Form
- Endliche Hauptstrahlneigung : Parallelogramm



Inhalt / Übersicht

2. Physikalisch-optische Abbildungstheorie

- 2.1 Fermat-Prinzip und optische Weglänge
- 2.2 Eikonal
- 2.3 Abbe-Sinusbedingung
- 2.4 Invarianten und Lichtleitwert
- 2.5 Phasenraum
- 2.6 Näherungen und Gültigkeitsbereiche

Fresnelzahl

- Fresnelzahl : Maßzahl zur Abgrenzung der Modell- und Näherungsbereiche

- Anordnung aus zwei Blenden im Abstand L

$$N_F = \frac{a_1 a_2}{\lambda L}$$

- Fraunhoferbeugung, Fernfeld, starke Beugungswirkung :

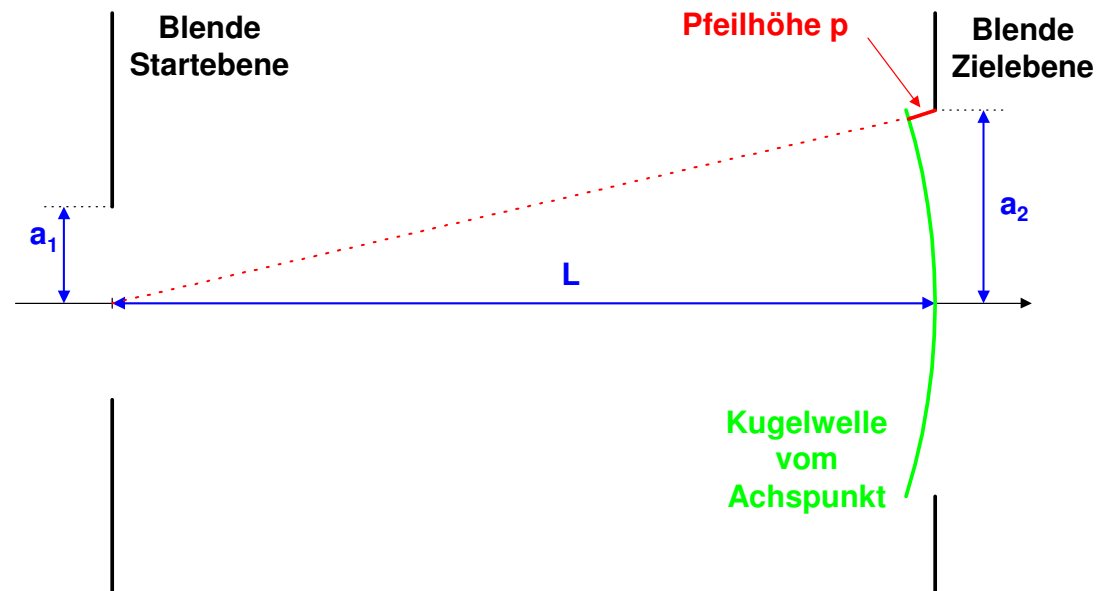
$$N_F < 1$$

- Fresnelbeugung mit merklicher Beugungswirkung :

$$N_F = 1$$

- Geometrisch-optischer Bereich ohne Beugungswirkung :

$$N_F \gg 1$$



Fresnelzahl

- Interpretationen der Fresnelzahl :
 - Pfeilhöhe p in $\lambda / 2$ gemessen (Anzahl Fresnelzonen)
 - Verhältnis Aperturwinkel zu Beugungswinkel
 - Verhältnis Brennweite zu Schärfentiefe
 - Verhältnis Blendendurchmesser zu Airyscheibchen
 - Lichtleitwert in λ skaliert
- Kleine Fresnelzahlen : Beugung muß berücksichtigt werden
Typische Szenarien dafür :
 - Fokalregion
 - Transport über lange Distanzen
- Modifizierte Definition der Fresnelzahl bei Kugelwellen

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{R} \right)$$

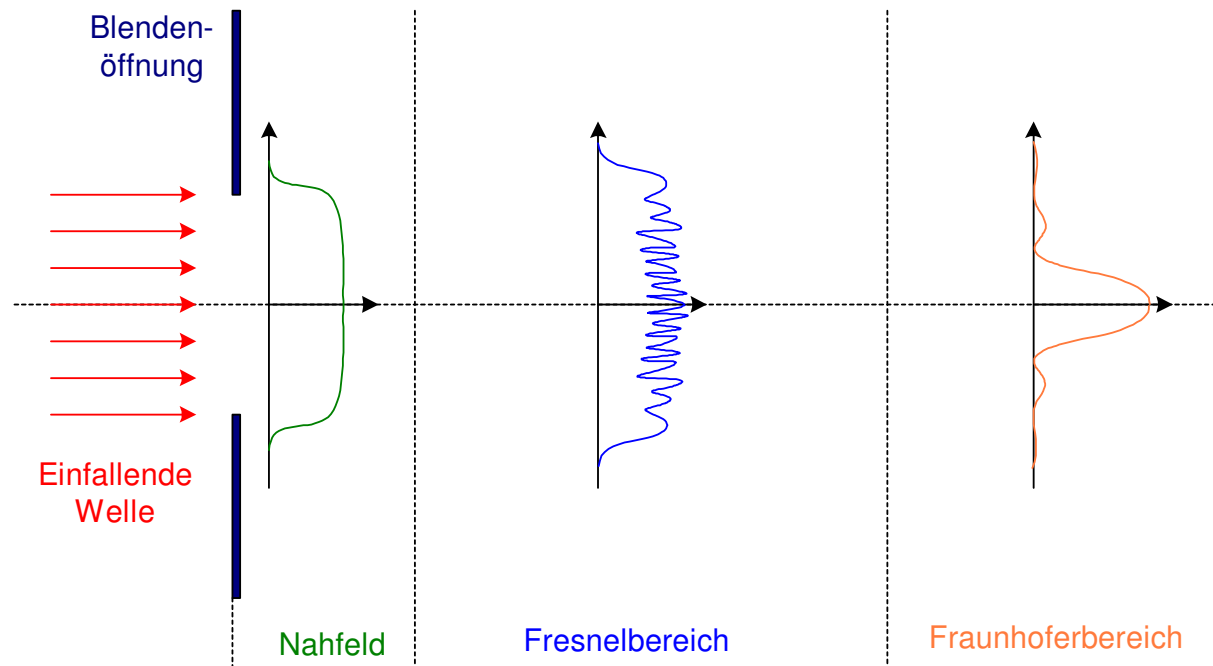
Beugungsbereiche

- Unterscheidung von drei Bereichen der Phänomenologie und Berechnung von Beugungseffekten.
Abgrenzung durch die Fresnelzahl

- Nahfeld :
Direkt hinter der Öffnung, N_F sehr groß

- Fresnelbereich :
Quadratische Approximation der Phase,
 N_F groß, starker Ripple

- Fernfeld (Fraunhofer) :
 N_F klein, Feinstruktur glatt



Nearfield - Farfield

- 2f-setup:
Fourier-conjugated planes
- Angle and spatial frequency are equivalent

$$\theta = v \cdot \lambda$$

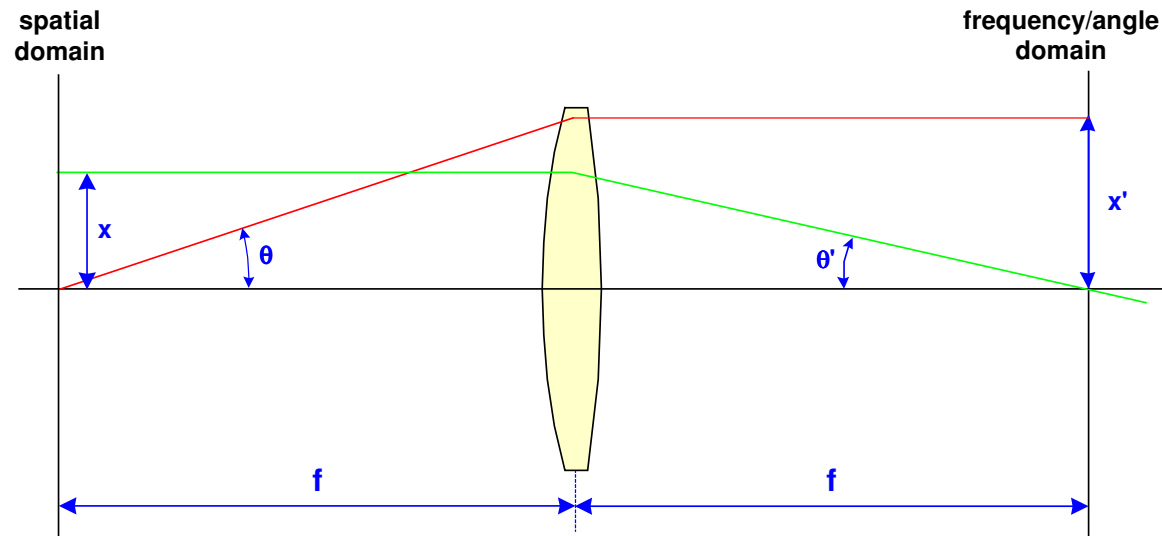
- Angle- and spatial coordinate are interchanged:

$$x \text{ ---> } \theta'$$

$$\theta \text{ ---> } x'$$

Corresponds to nearfield <---> farfield

- Relationship: $\theta' = \frac{x}{f}$, $x' = f \cdot \theta$



Nearfield - Farfield

- Nearfield: spatial domain
- Farfield: angle domain or frequency domain
- Near-farfield: reference interchangeable

