

Linien und Kanten

Inhalt : Linien und Kanten

24.06.2008

1. Beugung an einer Kante
2. Abbildung einer Kante
3. Linienbild
3. Spaltbeugung und Spaltbild

Linien und Kanten

Inhalt :

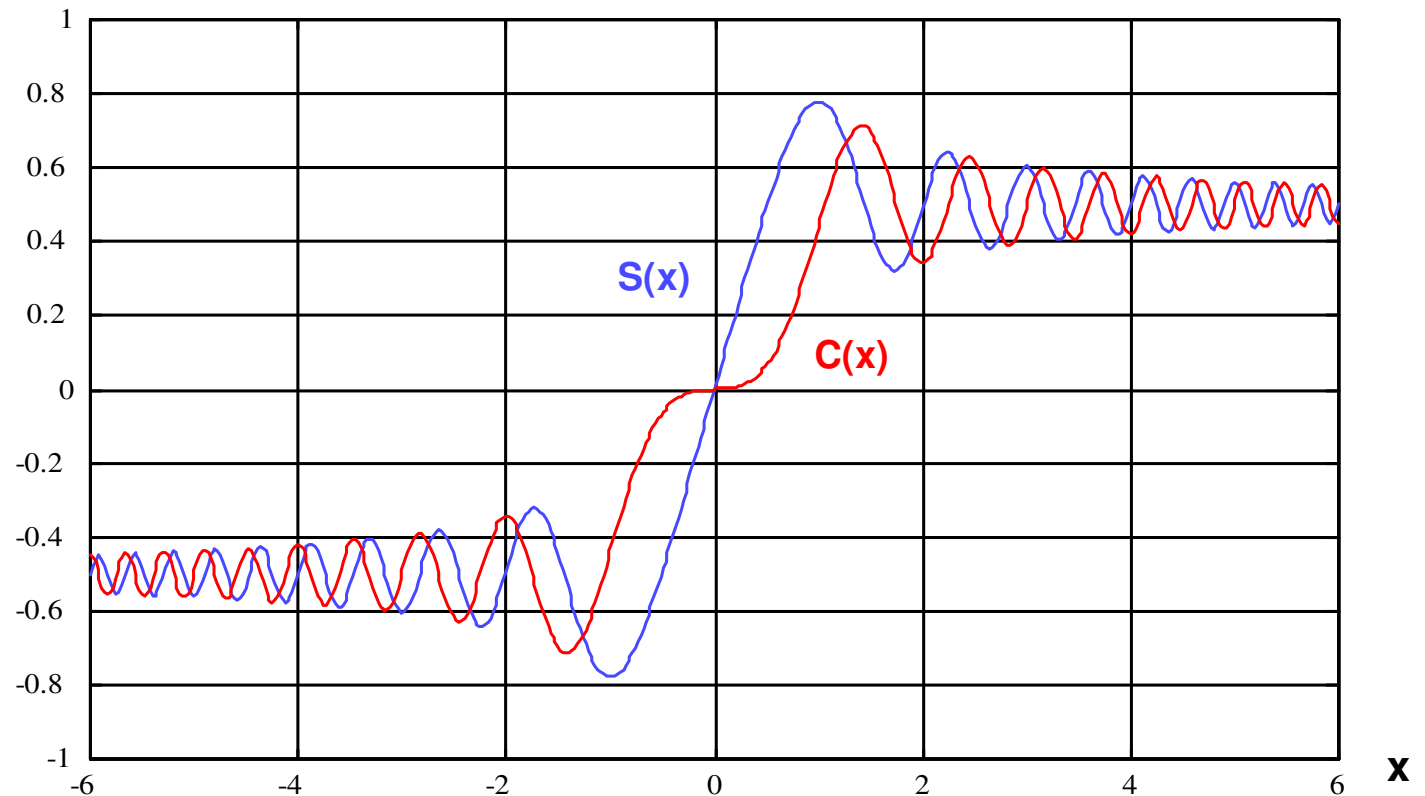
1. Beugung an einer Kante
2. Abbildung einer Kante
3. Linienbild
3. Spaltbeugung und Spaltbild

Linien und Kanten

Fresnelintegrale

- Fresnelintegrale zur Beschreibung der Kantenbeugung :

$$C(x) = \int_0^x \cos\left(\frac{1}{2} \pi t^2\right) dt \quad S(x) = \int_0^x \sin\left(\frac{1}{2} \pi t^2\right) dt$$



Linien und Kanten

Fresnelsche Kantenbeugung

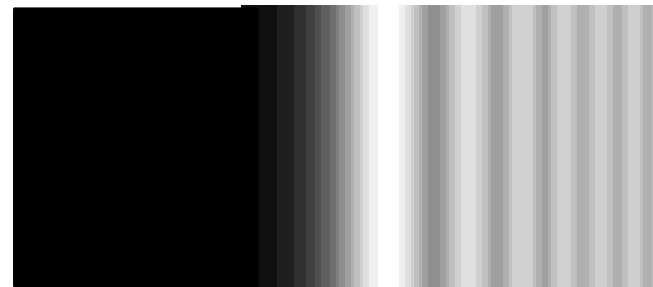
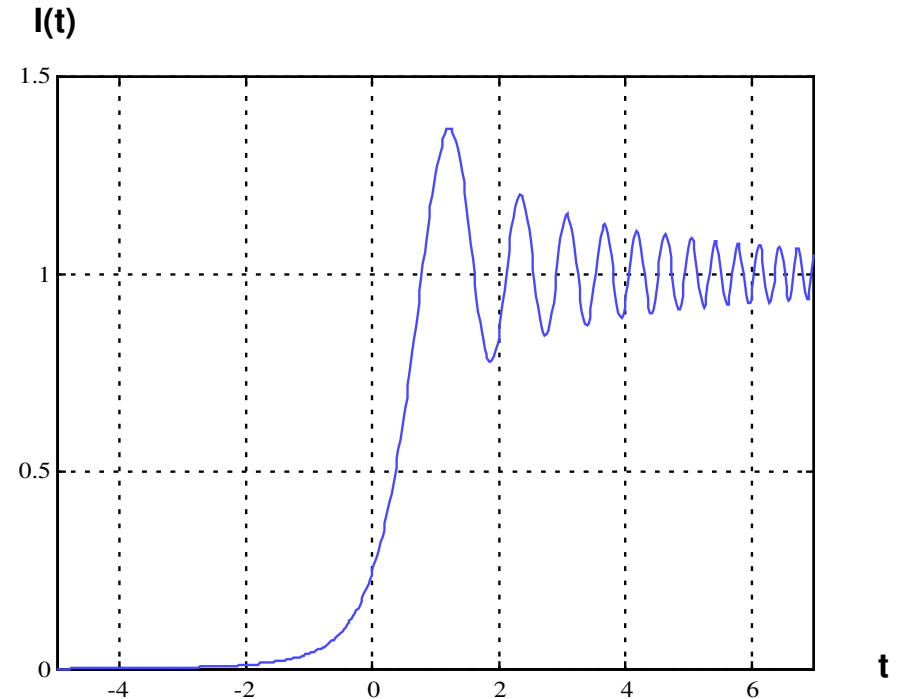
- Beugung an einer Kante in Fresnel-Näherung
- Intensitätsverteilung mit Fresnelintegralen

$$I(t) = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2} - C(t) \right)^2 + \left(\frac{1}{2} - S(t) \right)^2 \right]$$

skaliertes Argument

$$t = \sqrt{\frac{k}{z \cdot \pi}} \cdot x = \sqrt{\frac{2}{\lambda \cdot z}} \cdot x = \sqrt{2N_F}$$

- Intensitätswert auf der geometrischen Schattengrenze : 0.25
Schattenbereich : kontinuierliches Profil
Hellbereich : Oszillationen



Linien und Kanten

Inhalt :

1. Beugung an einer Kante
2. Abbildung einer Kante
3. Linienbild
3. Spaltbeugung und Spaltbild

Linien und Kanten

Abbildung einer Kante

- Amplitudenkante als Objekt :
Heavyside-Sprungfunktion

$$T(x) = \frac{1}{2} \cdot \text{sgn}(x)$$

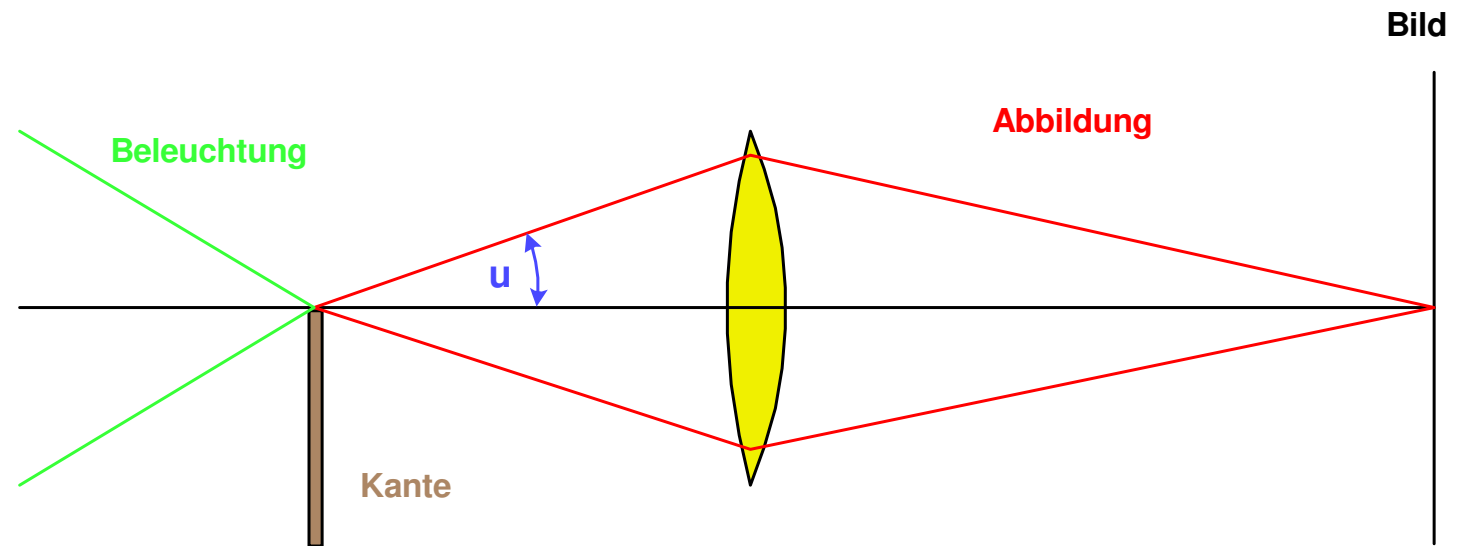
Spektrum :

$$T(\beta \cdot s) = \frac{1}{2} \cdot \left[\delta(s) - \frac{i}{\pi \cdot s} \right]$$

- Kante mit Amplituden-
und Phasenfunktion

$$T(x) = \frac{1}{2} \cdot \left\{ 1 + t_o \cdot e^{i\varphi_0} + \left[1 - t_o \cdot e^{i\varphi_0} \cdot \text{sgn}(x) \right] \right\}$$

- Abbildung einer
idealen Kante



Linien und Kanten

Kantenbildfunktion

- Kantenbild
(ESF : edge spread function)
Integral über Linienbild :

Umkehrung : Ableitung

- Mit PSF :

- Zusammenhang ESF mit OTF

$$I_{ESF}(x_i) = \int_0^{\infty} I_{LSF}(x_i - \beta \cdot x_o) dx_o$$

$$I_{LSF}(x_i) = \frac{d I_{ESF}(x_i)}{dx_i}$$

$$I_{ESF}(x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} \int_{-\infty}^{\infty} I_{PSF}(x_o, y_i) dy_i dx_o$$

$$I_{ESF}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi i} \cdot \int \frac{1}{s_x} H_{OTF}(s_x, 0) \cdot e^{-i \cdot x \cdot s_x} ds_x$$

Linien und Kanten

Kohärentes Kantenbild fokussiert

- Bild einer Kante bei kohärenter Beleuchtung

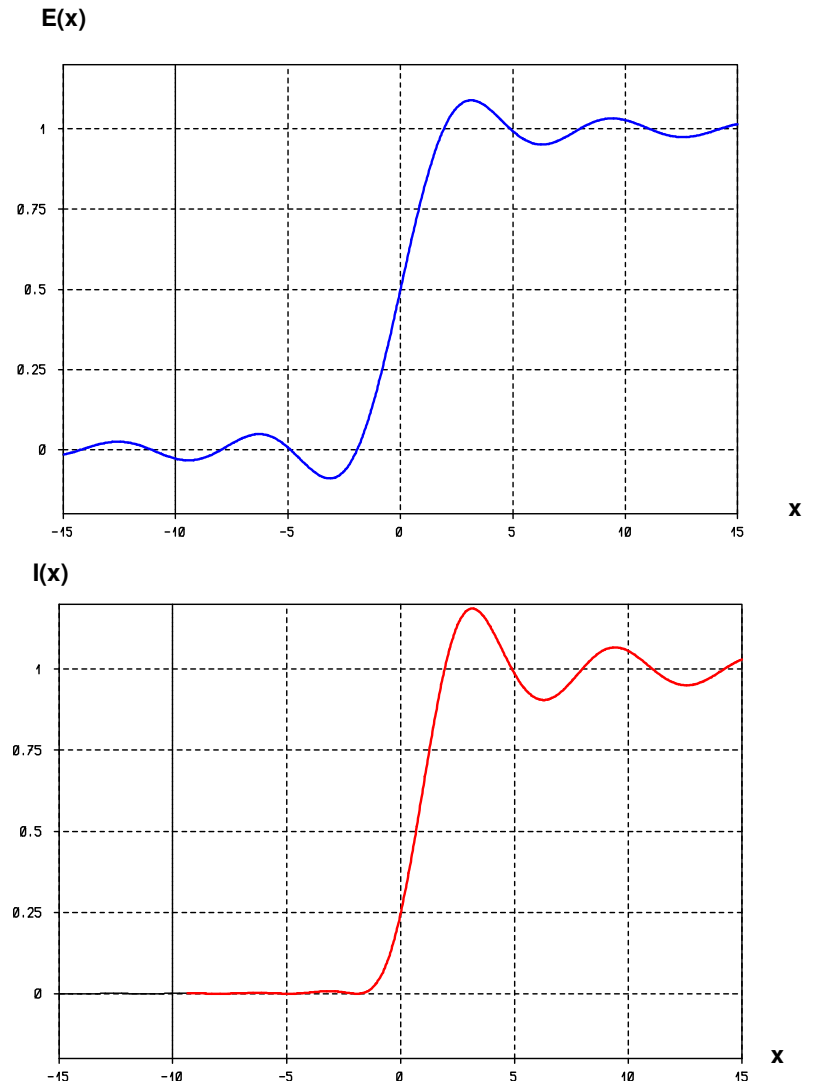
$$I_K^{(koh)}(y) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot Si\left(\frac{aky}{z}\right) \right]^2$$

mit Integralsinus $Si(x)$

- Fehlbestimmung der Kantenposition bei Kriterium 50 % Intensitätshalbwertsbreite

$$\Delta x = 0.212 \cdot \frac{\lambda z}{a}$$

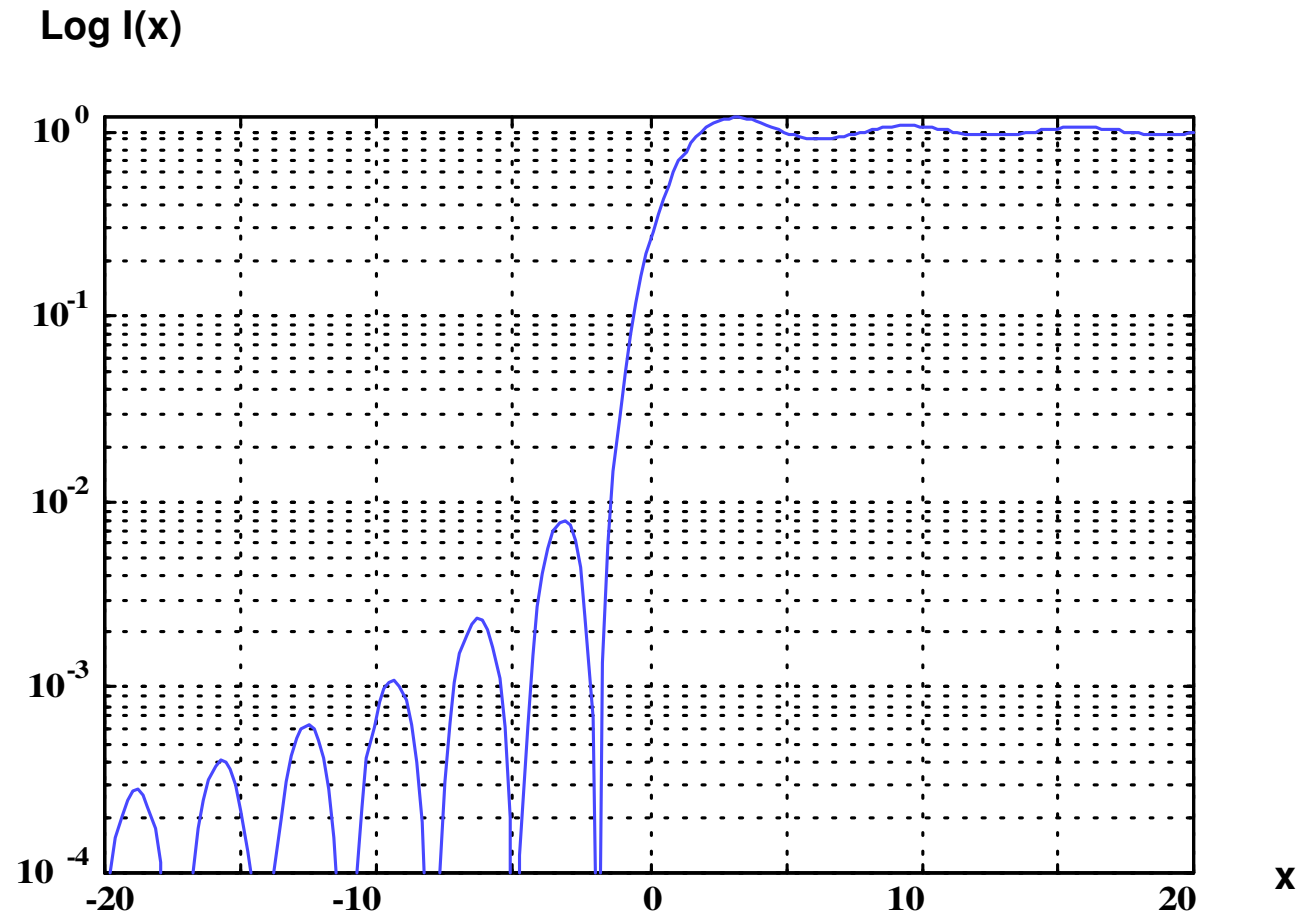
- Verlauf von Amplitude und Intensität, Im Intensitätsverlauf sind die Oszillationen im Schattenbereich kaum sichtbar



Linien und Kanten

Kohärentes Kantenbild fokussiert

- Intensität in logarithmischer Darstellung
- Ripple im Schattenbereich unter 1 %



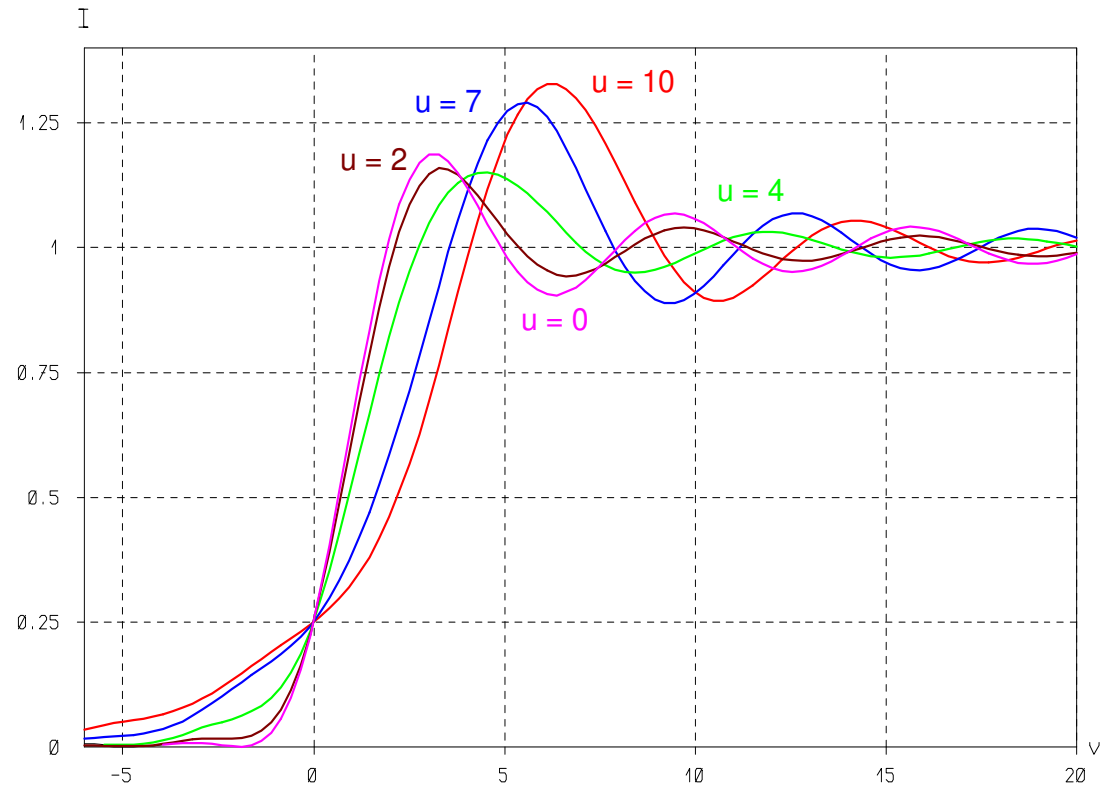
Linien und Kanten

Kohärentes Kantenbild defokussiert

- Kohärentes Kantenbild mit Defokussierung, normierter Parameter u :

$$u = kz \sin^2 \alpha$$

- Zunehmende Defokussierung :
Kantensteilheit wird kleiner,
Kante verwaschen
- Sehr große Defokussierung :
Fresnelsche Kantenbeugung

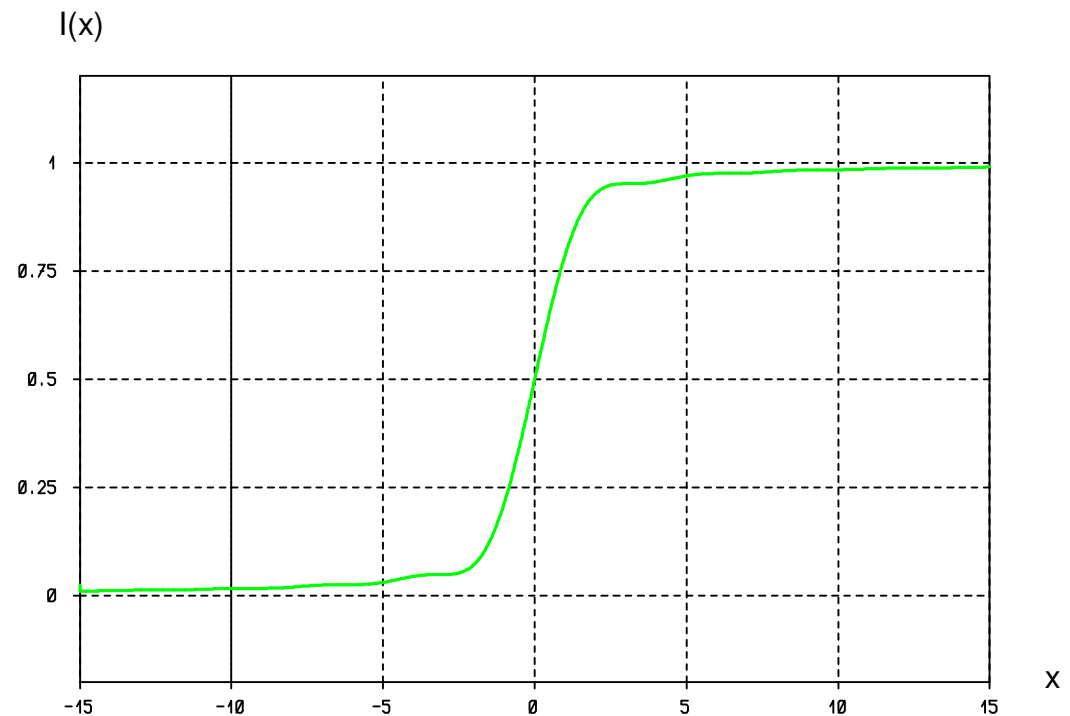


Linien und Kanten

Inkohärentes Kantenbild

- Inkohärentes Kantenbild :
Intensitätsprofil
- Keine Oszillationen, glatter Verlauf
- Ideale Kantenposition bei 50 %
Intensität
- Kantenbreite hängt von der
Punktbildbreite ab.

$$I_K^{(ink)}(y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot Si\left(\frac{2aky}{z}\right) + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\cos\left(\frac{2aky}{z}\right) - 1}{\frac{2aky}{z}}$$



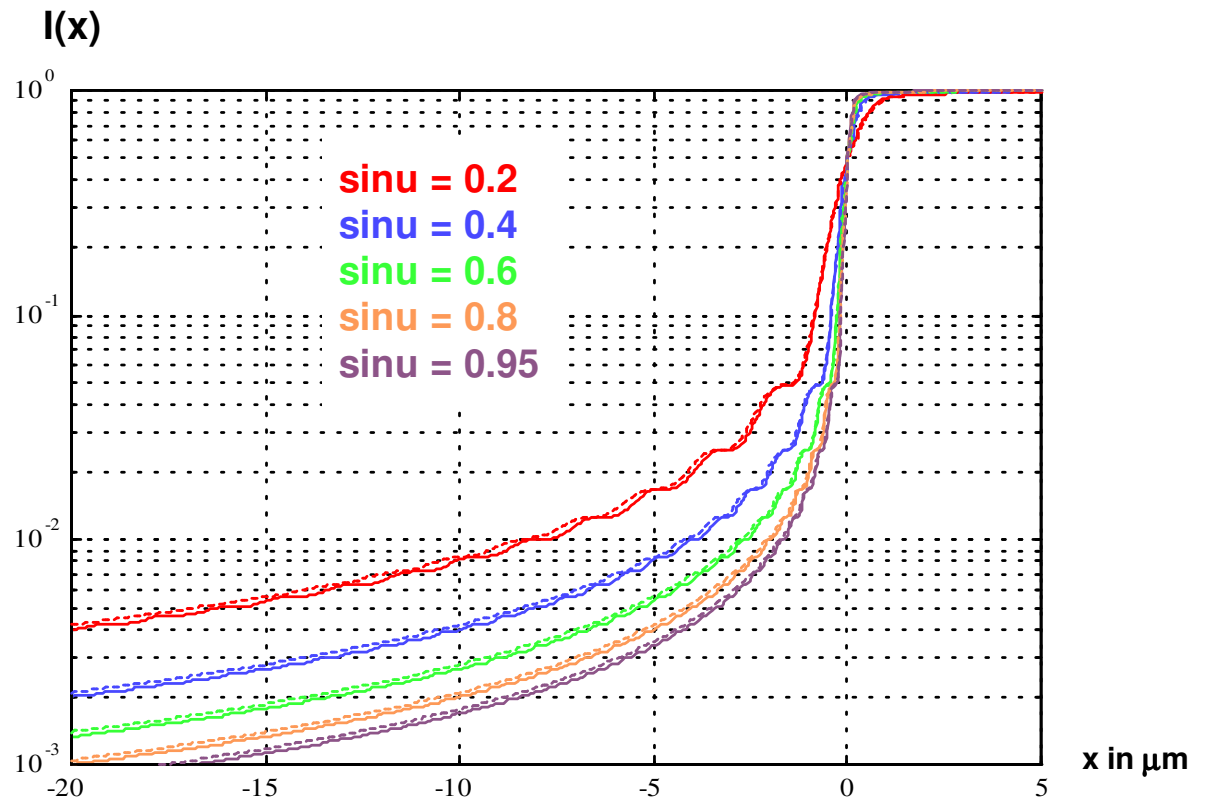
Linien und Kanten

Inkohärentes Kantenbild

- Inkohärentes Kantenbild :
monochromatisch
Intensitätsprofil für verschiedene
numerische Aperturen

Wellenlänge $\lambda = 660 \text{ nm}$

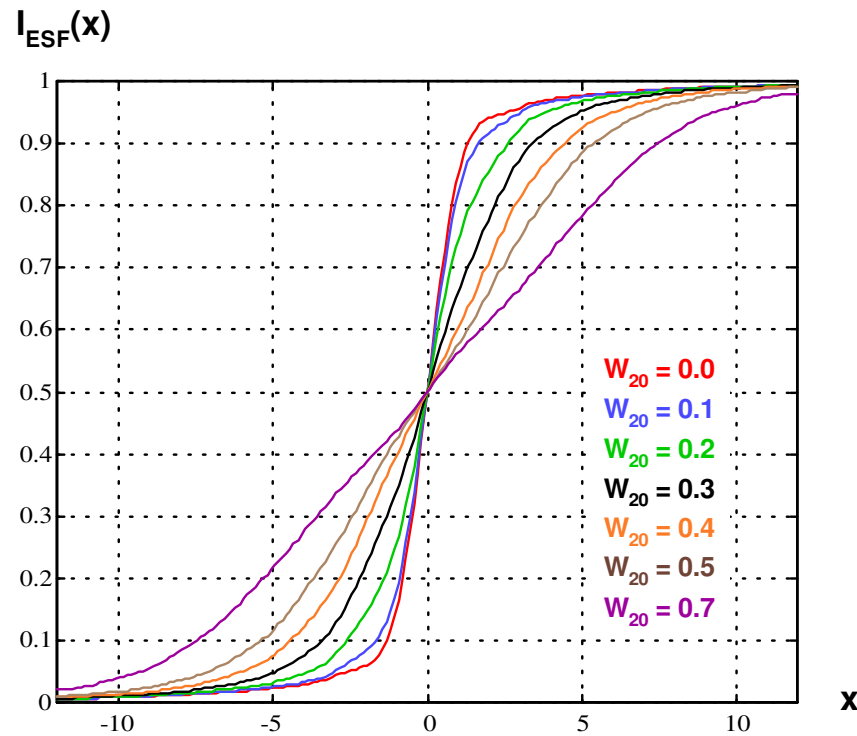
durchgezogen :
gestrichelt : Bandbreite 60 nm



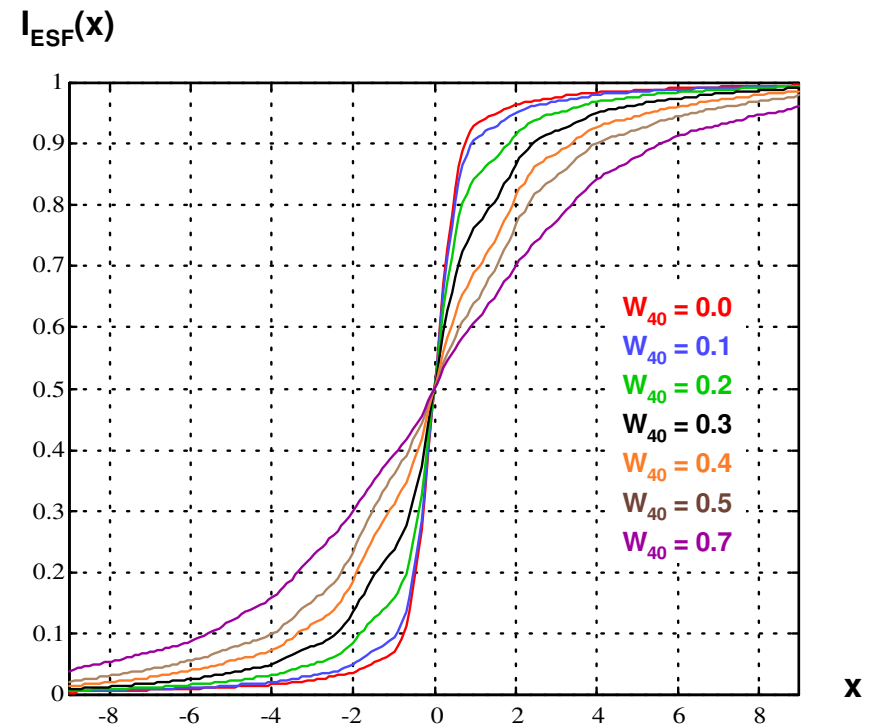
Linien und Kanten

Inkohärente Kantenbildfunktion

- ESF mit Defokussierung



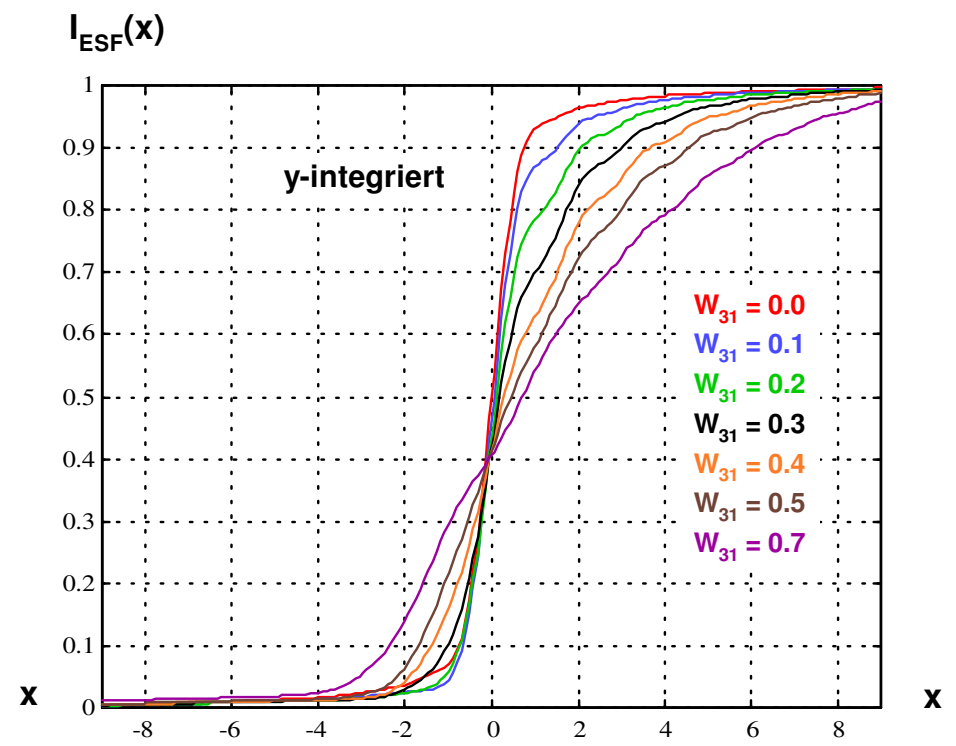
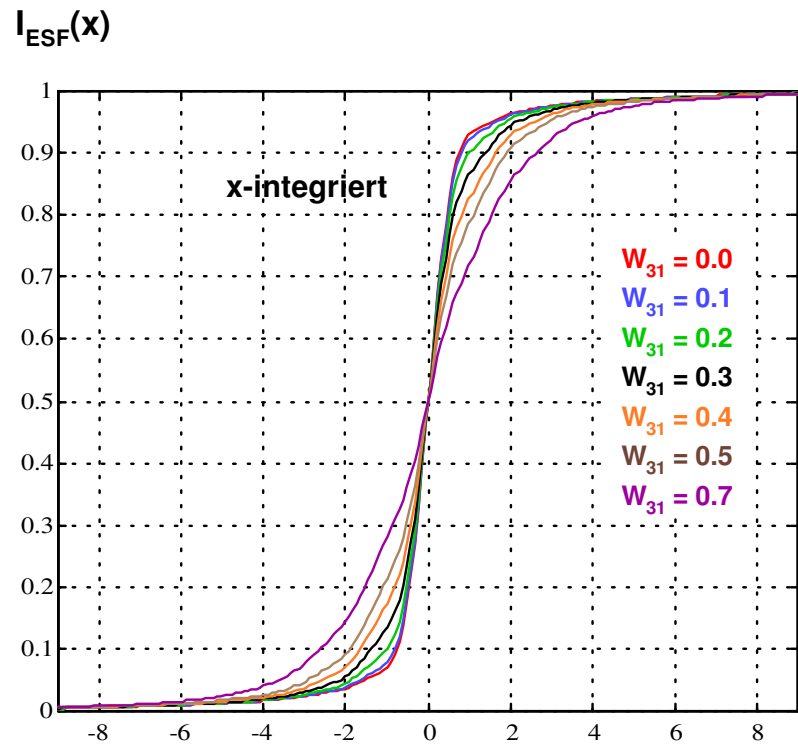
- ESF mit sphärischer Aberration



Linien und Kanten

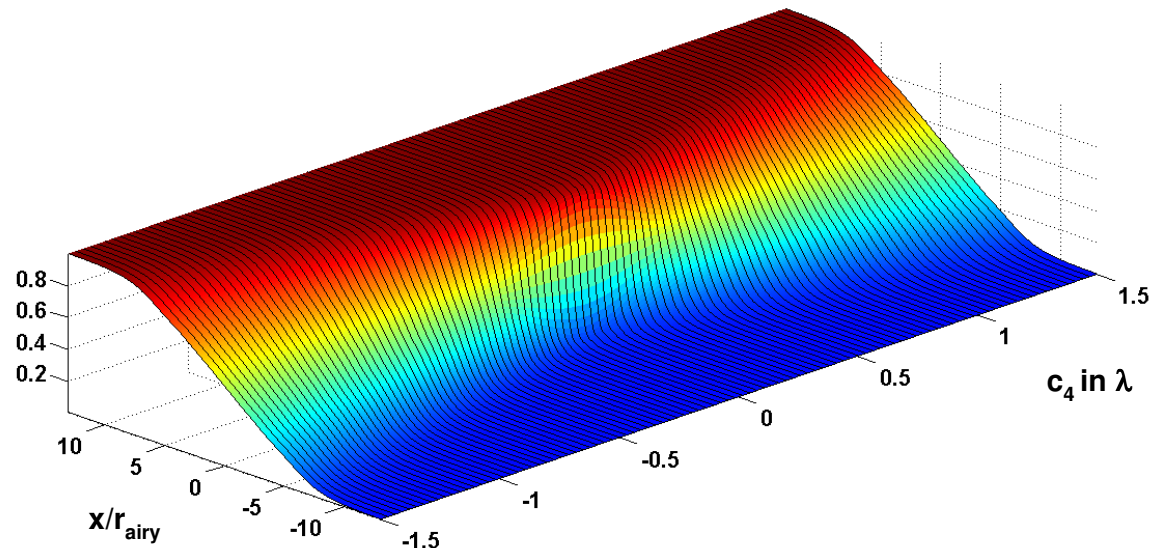
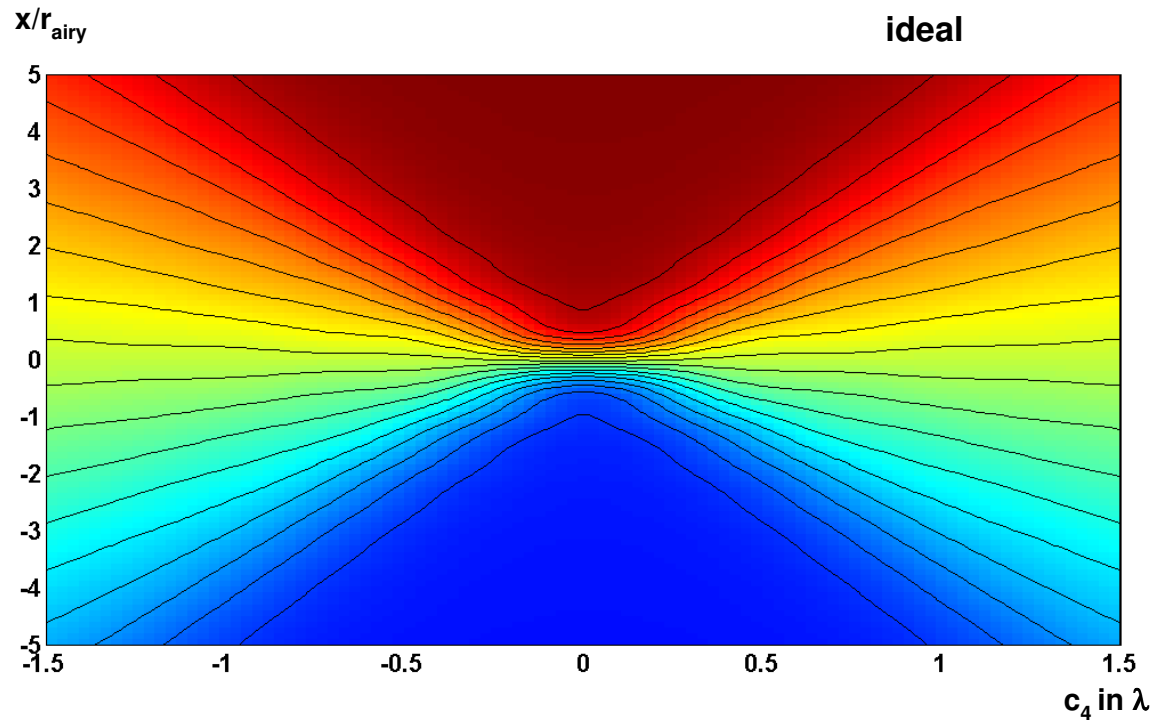
Inkohärente Kantenbildfunktion

- Kantenbild mit Koma



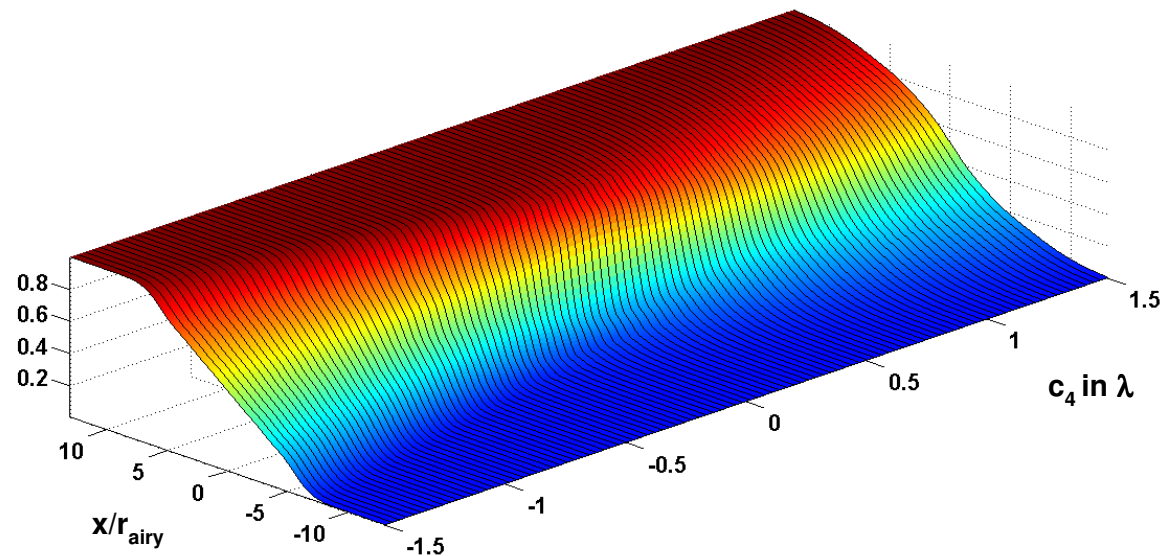
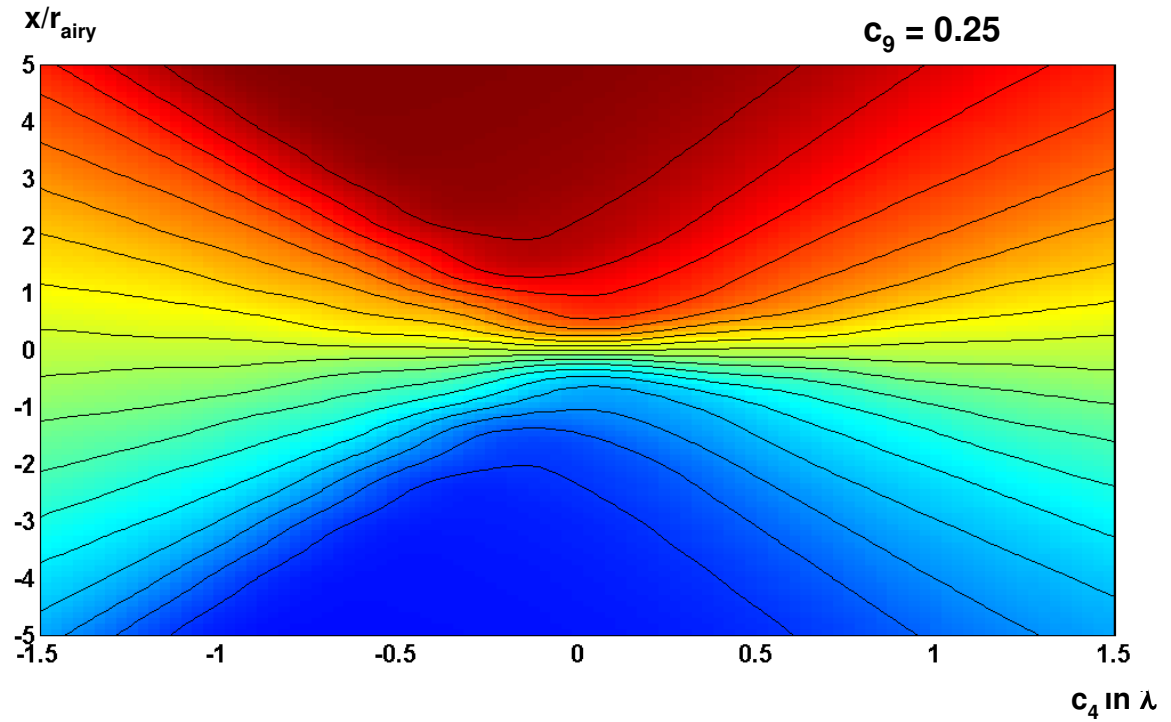
Linien und Kanten Kantenabbildung

Ideale Kante inkohärent



Linien und Kanten Kantenabbildung

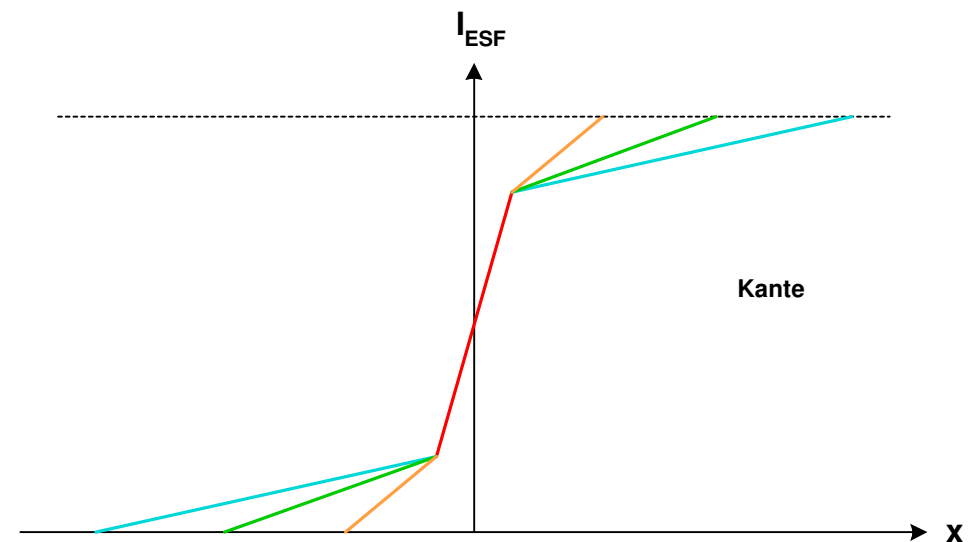
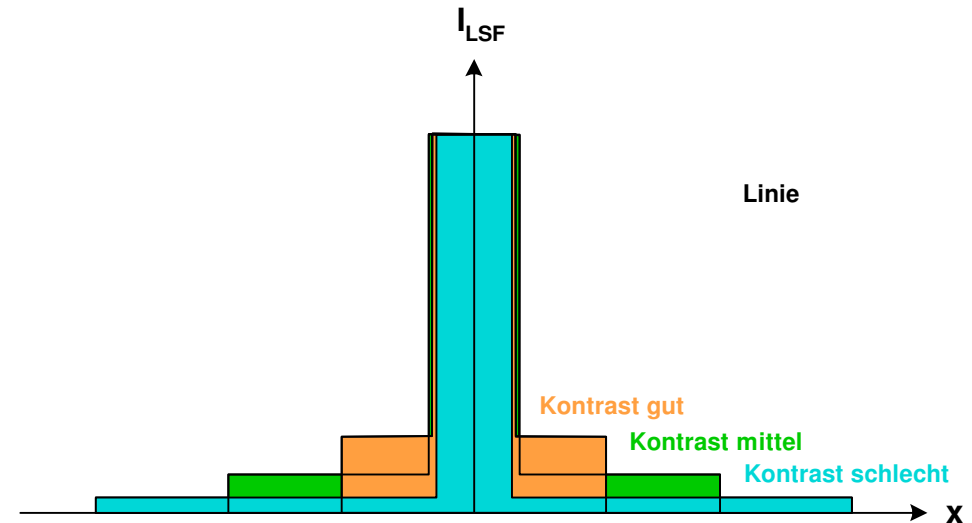
Kante inkohärent bei
sphärischer
Aberration



Linien und Kanten

Kantenabbildung

- Kantenabbildung :
 - breit auslaufende Randbereiche :
Kontrast gemindert
 - zentraler Bereich mit Gradient :
Bildschärfe
 - reagiert empfindlich auf Bild-
fehler
 - Anisotropie : Unterscheidung in
sagittale / tangentielle Richtung



Linien und Kanten

Kantenabbildung

- Kantensteilheit : NILS
(normalized image log slope)

$$S_{NILS} = \Delta x_{CD} \cdot \left. \frac{d \ln I(x)}{dx} \right|_{thresh} = \frac{\Delta x_{CD}}{I_{thresh}} \cdot \left. \frac{dI(x)}{dx} \right|_{thresh}$$

- Kantenschärfe
(acutance, sharpness)

$$A_{acut} = \frac{1}{x_{min} - x_{max}} \cdot \frac{\int_{x_{min}}^{x_{max}} \left(\frac{dI_{edge}(x)}{dx} \right)^2 dx}{I_{edge}(x_{max}) - I_{edge}(x_{min})}$$

- Kantendefekt : Rms-Abweichung
der realen von der idealen Kanten-
intensitätsverteilung

$$K_{Defekt} = \sqrt{\left[\int \left(I_{Kante}^{(real)}(x) - I_{Kante}^{(ideal)}(x) \right) dx \right]^2}$$

Linien und Kanten

Kantenbreite

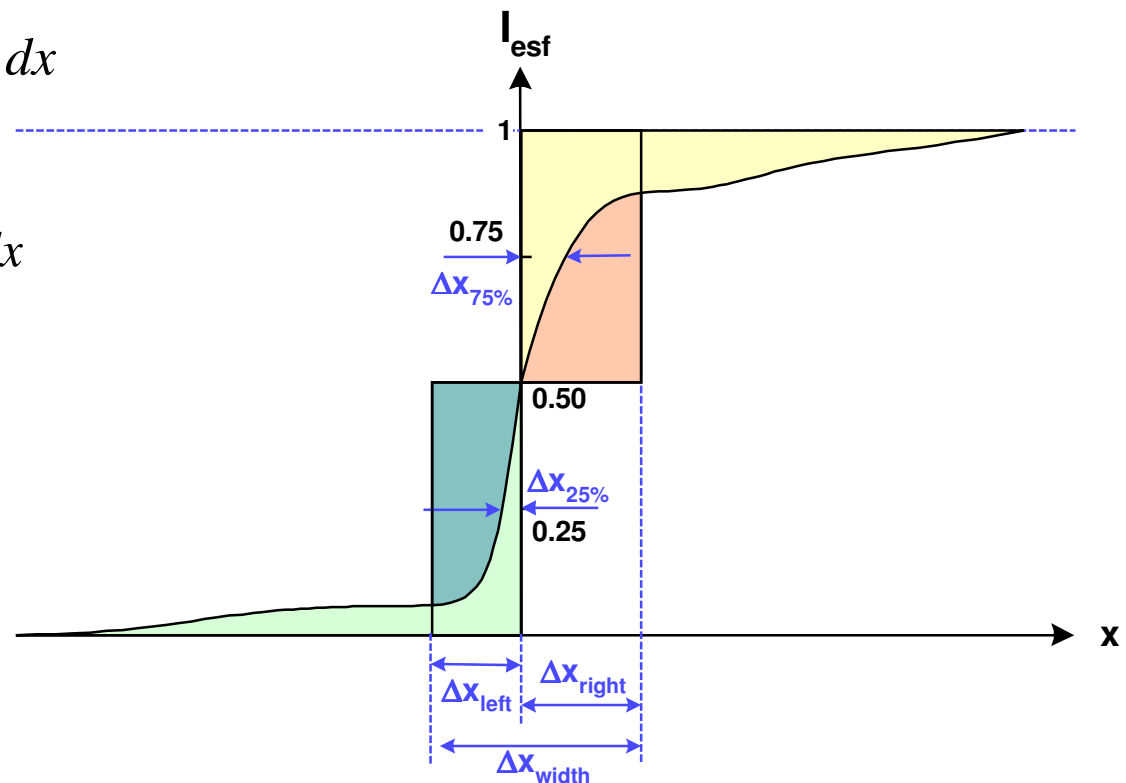
- Definition der Kantenbreite nach Thomas :
links- und rechtsseitig flächengleiche
Rechtecke mit Bezug auf 50 %

$$\Delta x_{IKb} = \frac{1}{I_0} \cdot \int_{-\infty}^0 [I_{real}(x) - I_{ideal}(x)] dx$$

$$\Delta x_{rKb} = \frac{1}{I_0} \cdot \int_0^{\infty} [I_{real}(x) - I_{ideal}(x)] dx$$

Breite : Mittelwert

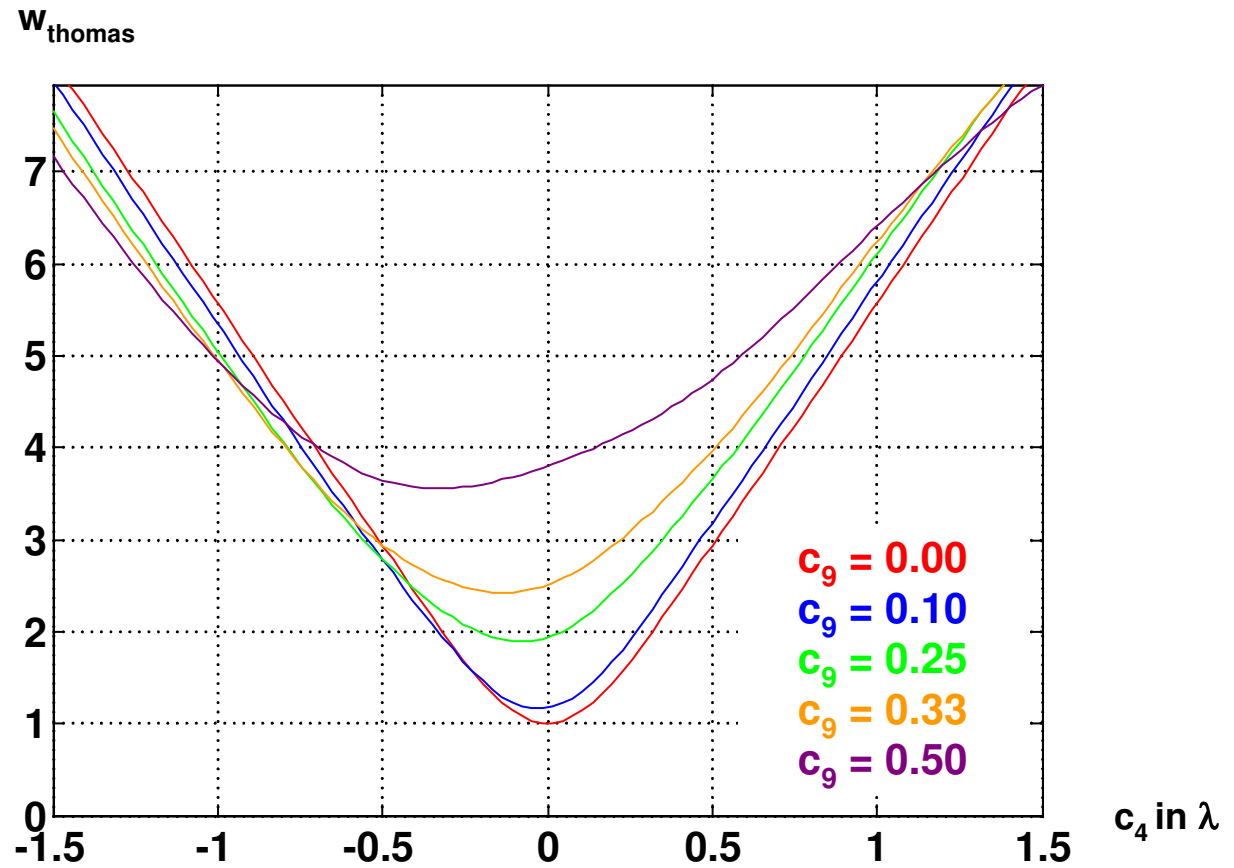
$$\Delta x_{Kb} = \frac{\Delta x_{IKb} + \Delta x_{rKb}}{2}$$



Linien und Kanten

Kantenbreite : Thomaskriterium

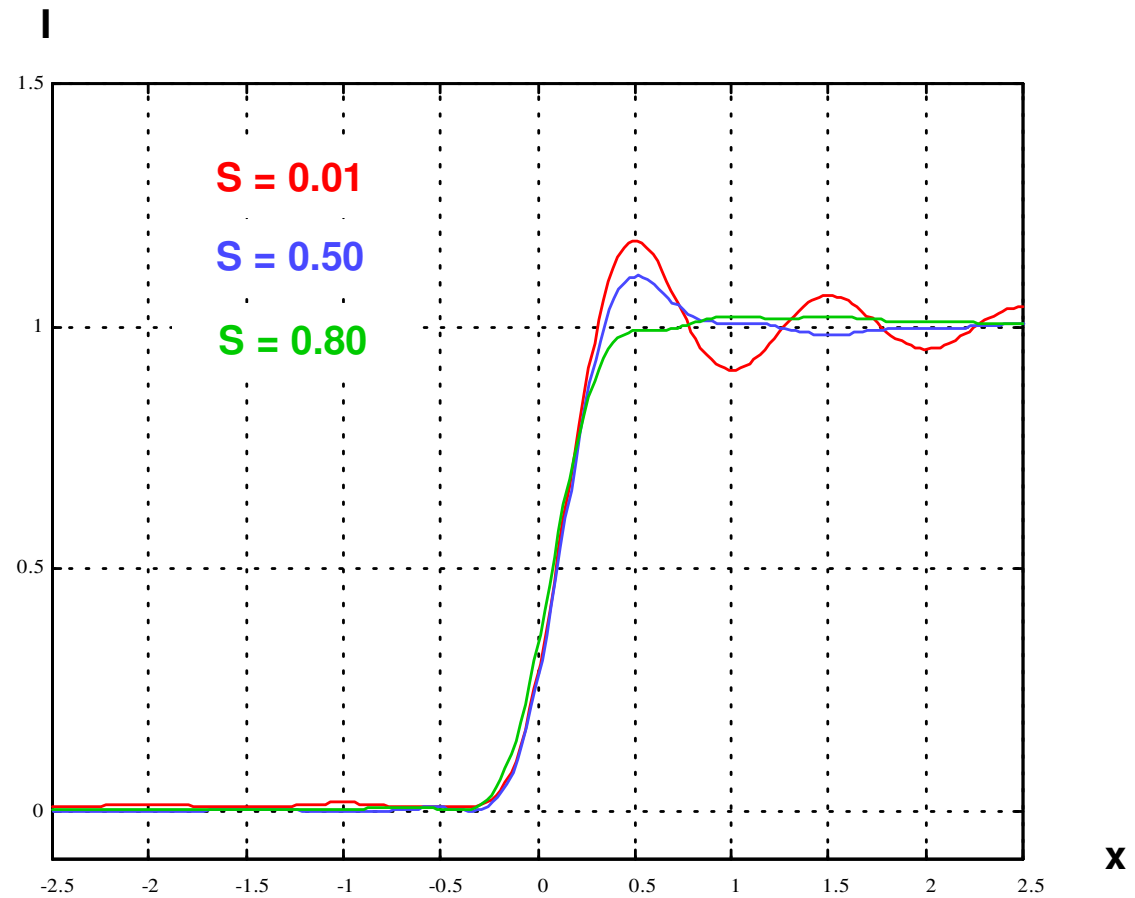
Kantenbreite nach Thomas bei sphärischer Aberration



Linien und Kanten

Kantenbeugung als Funktion der Kohärenz

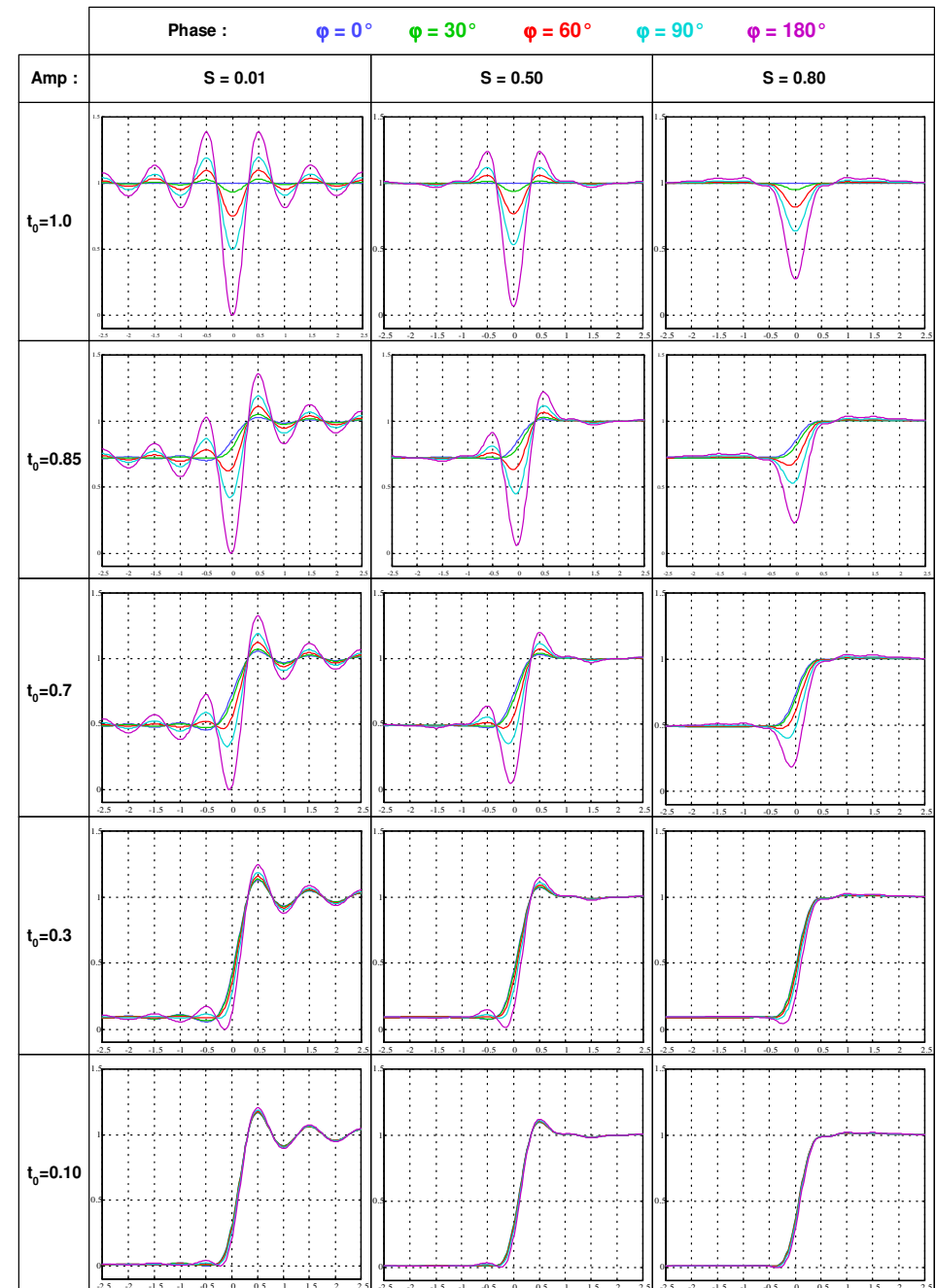
- Abbildung einer reinen Amplitudenkante mit veränderlicher Kohärenz :
Mit abnehmender Kohärenz sinkt die Interferenzfähigkeit und damit auch die Beugungstreifen



Linien und Kanten

Abgebildete Kante

- Allgemeine Amplituden-Phasenkante
- Abhängigkeit vom Kohärenzfaktor S (von links nach rechts)
- Abhängigkeit vom Amplitudensprung (von oben nach unten)
- Abhängigkeit vom Phasensprung (Farben in einem Diagramm)
- Amplitudenkante inkohärent : starke Ähnlichkeit mit kante
- Reine Phasenkante : symmetrisches Profil, keine Objektähnlichkeit



Linien und Kanten

Inhalt :

1. Beugung an einer Kante
2. Abbildung einer Kante
3. Linienbild
3. Spaltbeugung und Spaltbild

Linien und Kanten

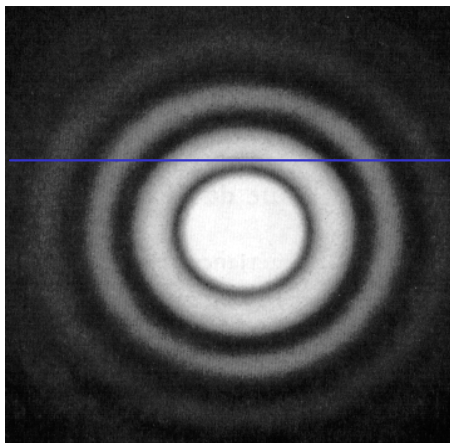
Linienbild

- Linienbild : Integral über die Punktbildfunktion
(LSF : line spread function)

$$I_{LSF}(x) = \int I_{PSF}(x, y) dy$$

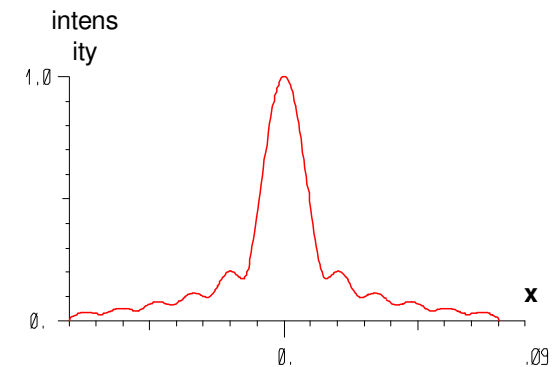
- Praktische Realisierung : Scan eines schmalen Spaltes über die PSF
(exakt : Faltung mit Spaltübertragungsfunktion)
- Rückgewinnung der PSF : Tomografie-Problem

PSF



Integration

$$I_{LSF}(x) = \int I_{PSF}(x, y) dy$$



Line spread function

Linien und Kanten

Linienbild-Kriterium

- Struve-Kriterium analog zur Strehlschen Definitionshelligkeit

$$S_{LSF} = \frac{I_{LSF}^{(real)}(0)}{I_{LSF}^{(ideal)}(0)}$$

- Rayleighkriterium zur Linienauflösung

$$\Delta x = 0.50 \cdot \frac{\lambda}{n \cdot \sin \theta}$$

- Sparrowkriterium : Inkohärent zur Auflösung

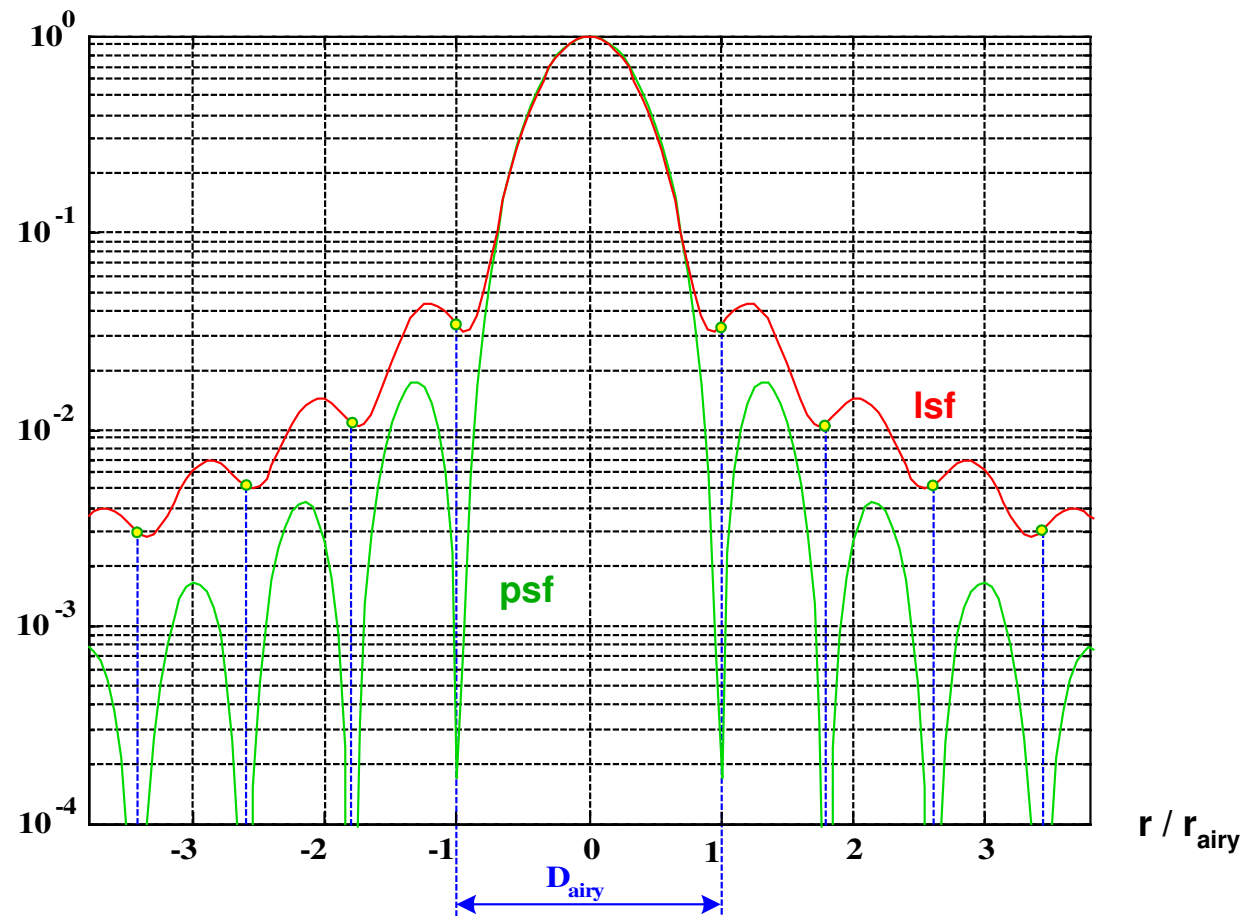
$$\Delta x_{Sparow}^{(ink)} = 0.415 \cdot \frac{\lambda}{n \cdot \sin \theta}$$

Kohärent

$$\Delta x_{Sparow}^{(coh)} = 0.663 \cdot \frac{\lambda}{n \cdot \sin \theta}$$

Linien und Kanten Line Spread Function

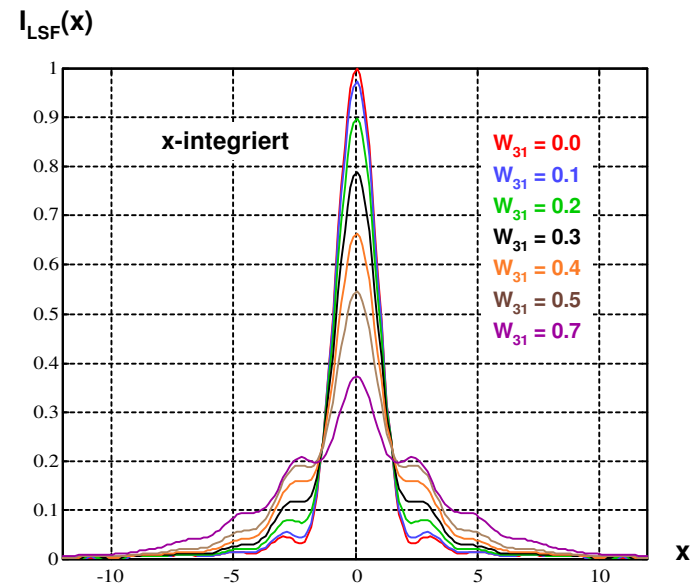
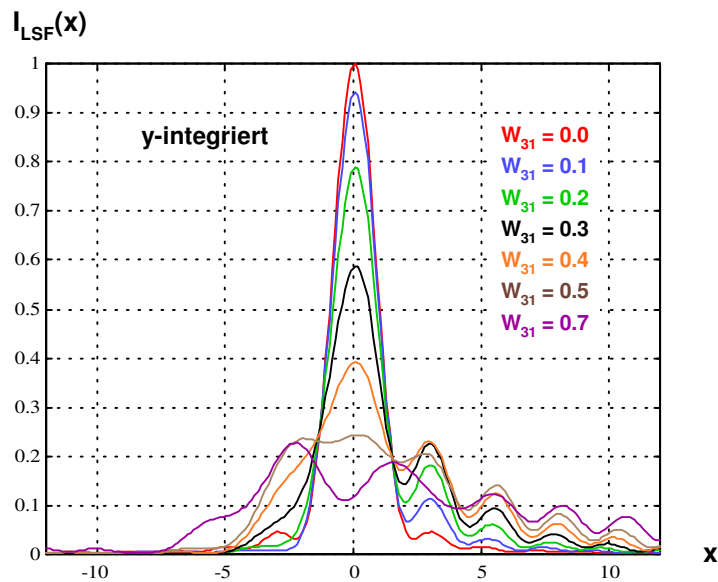
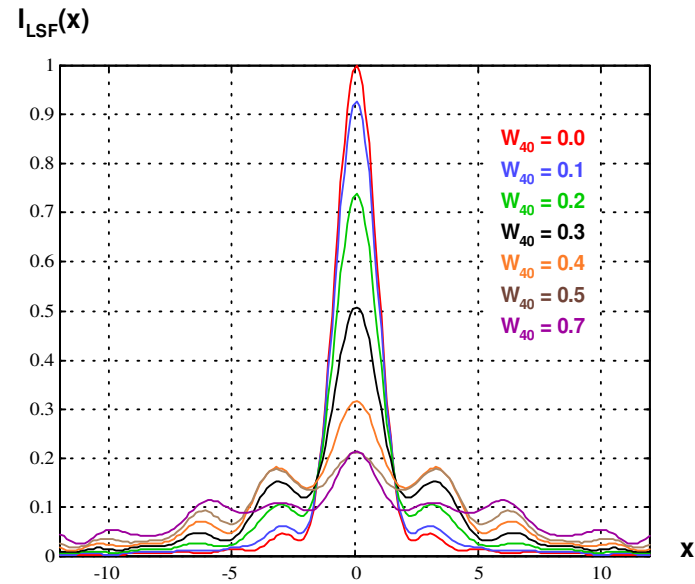
- Ideale Linienbildfunktion
- Vergleich mit
Punktbild



Linien und Kanten

Linienbildfunktion

- Linienbild mit Aberrationen :
Beispiel Öffnungsfehler
- Linienbild mit Aberrationen :
Beispiel Koma

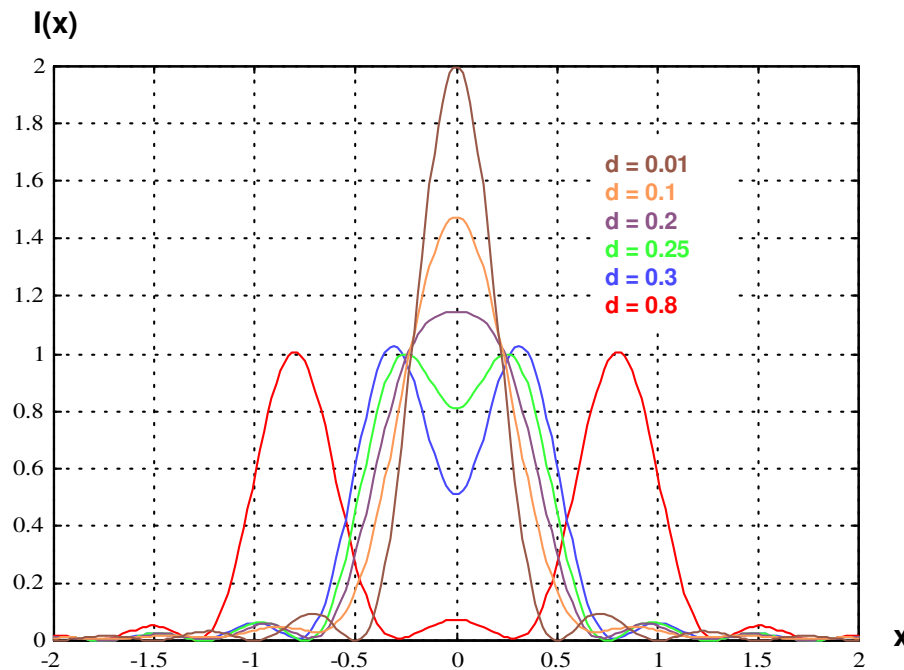


Linien und Kanten

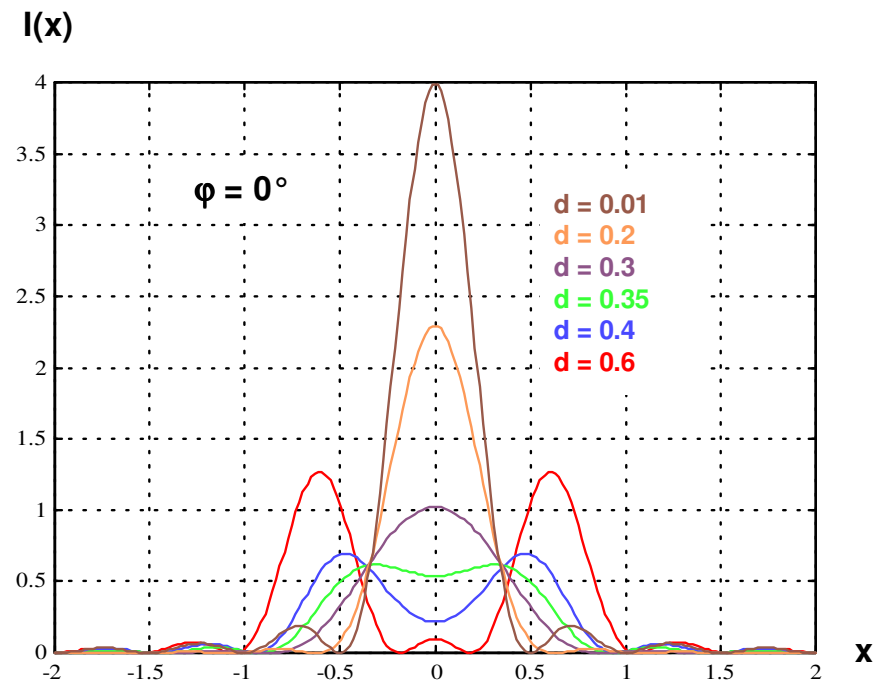
Linienauflösung

- Überlagerung zweier benachbarter Linienbilder :
- Analog zur Punktauflösung zwei Grenzfälle

1. Inkohärent



2. Kohärent, mit Phasenlage



Linien und Kanten

Inhalt :

1. Beugung an einer Kante
2. Abbildung einer Kante
3. Linienbild
3. Spaltbeugung und Spaltbild

Linien und Kanten

Fraunhoferbeugung am Spalt

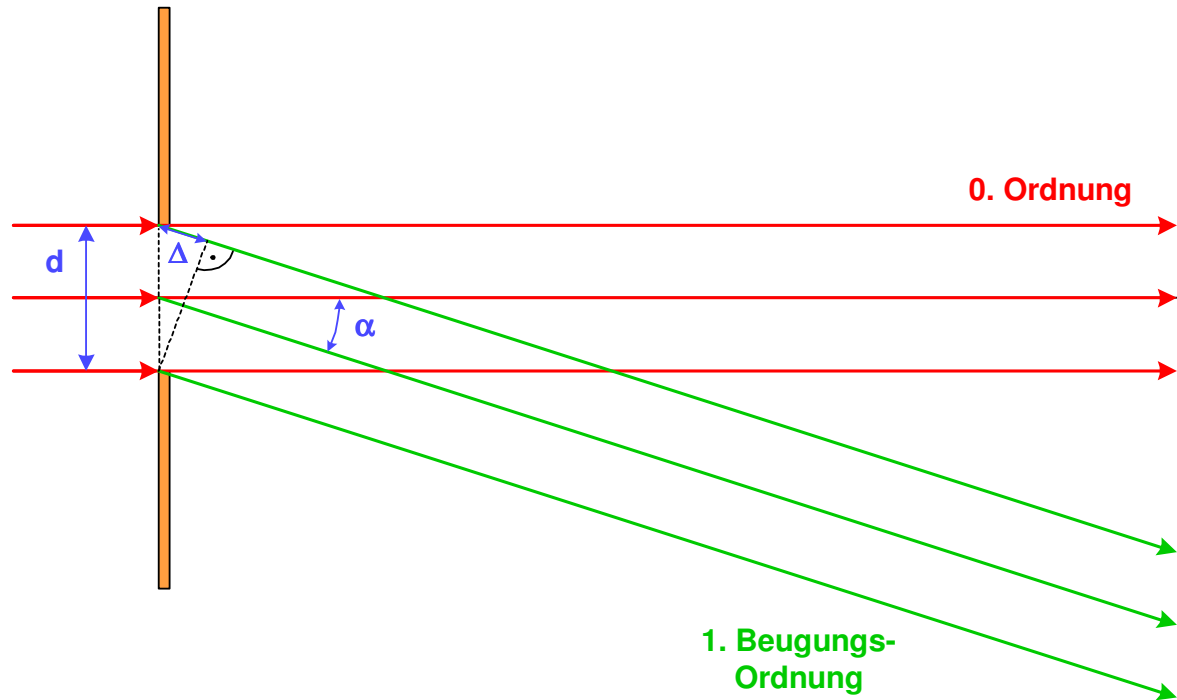
- Beugung am Spalt :
Intensitätsfunktion

$$I(\alpha) = \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi \cdot d \cdot \sin \alpha}{\lambda}\right)}{\frac{\pi \cdot d \cdot \sin \alpha}{\lambda}} \right]^2$$

- Maxima-Winkel mit
konstruktiver Interferenz

$$\sin \alpha_{\max} = \frac{\lambda}{d} \cdot \left(m + \frac{1}{2} \right)$$

- Bild der Verteilung



Linien und Kanten

Fresnelsche Beugung am Spalt

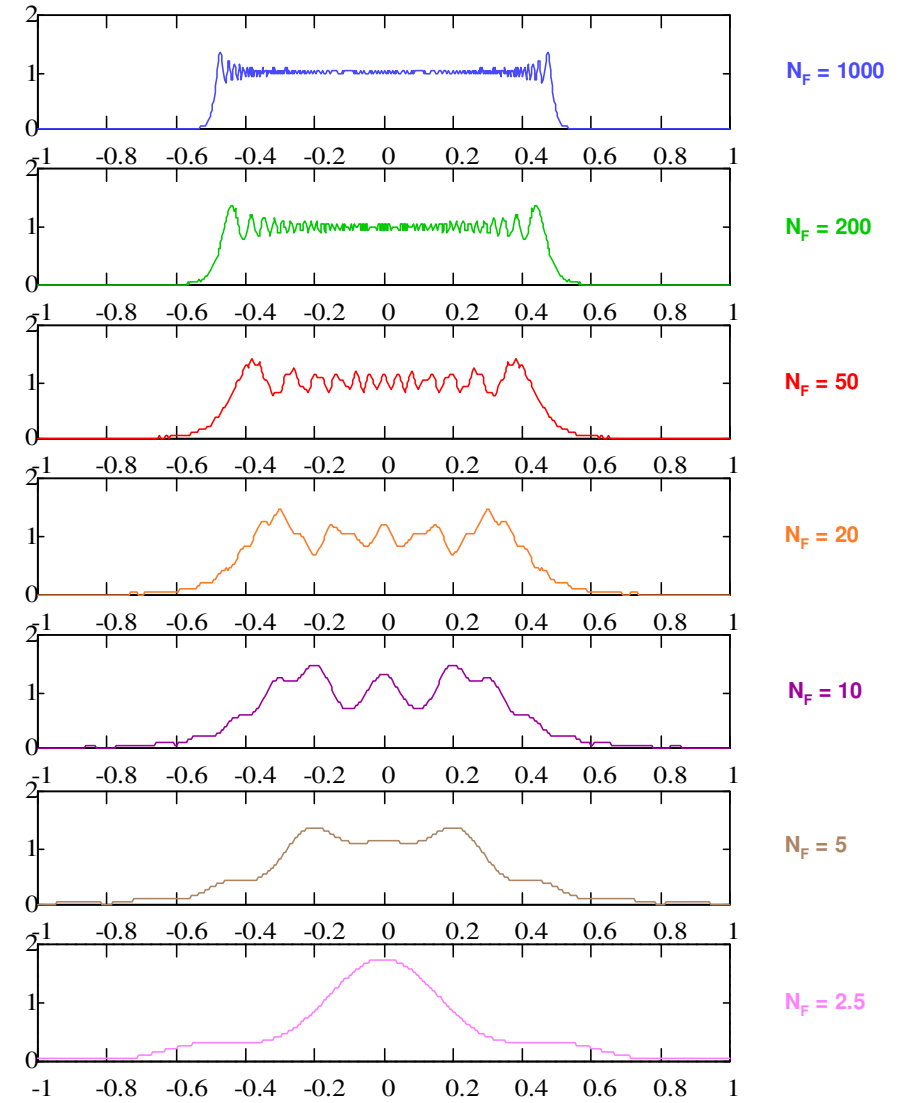
- Intensitätsprofil mit Fresnelintegralen

$$I(x, z) = \frac{1}{4} \left[C \left(\left(\frac{x}{a} - 1 \right) \sqrt{2N_F} \right) + C \left(- \left(\frac{x}{a} + 1 \right) \sqrt{2N_F} \right) \right]^2 + \left[S \left(\left(\frac{x}{a} - 1 \right) \sqrt{2N_F} \right) + S \left(- \left(\frac{x}{a} + 1 \right) \sqrt{2N_F} \right) \right]^2$$

- Zunehmende Fresnelzahl

$$N_F = \frac{a^2}{\lambda \cdot z}$$

- steilere Kanten
- höherfrequente Beugungsripple



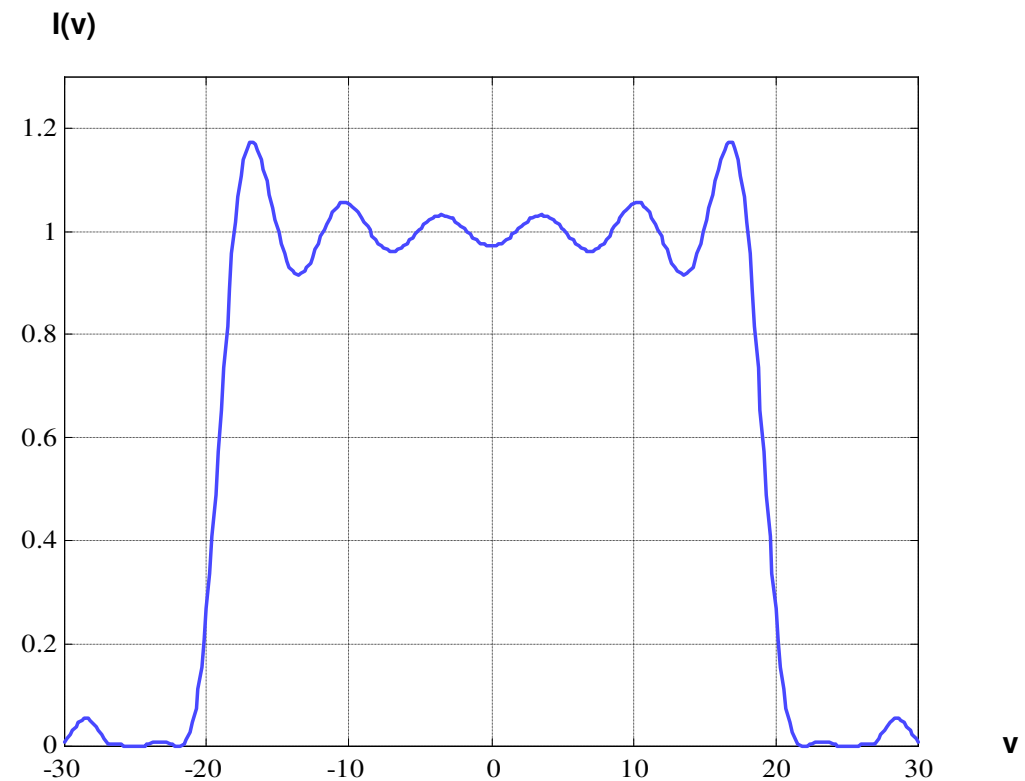
Linien und Kanten

Kohärente Spaltabbildung

- Intensitätsprofil

$$I_{Slit}^{(koh)}(x) = \left[Si\left(\frac{akx}{z}\right) + Si\left(-\frac{akx}{z}\right) \right]^2$$

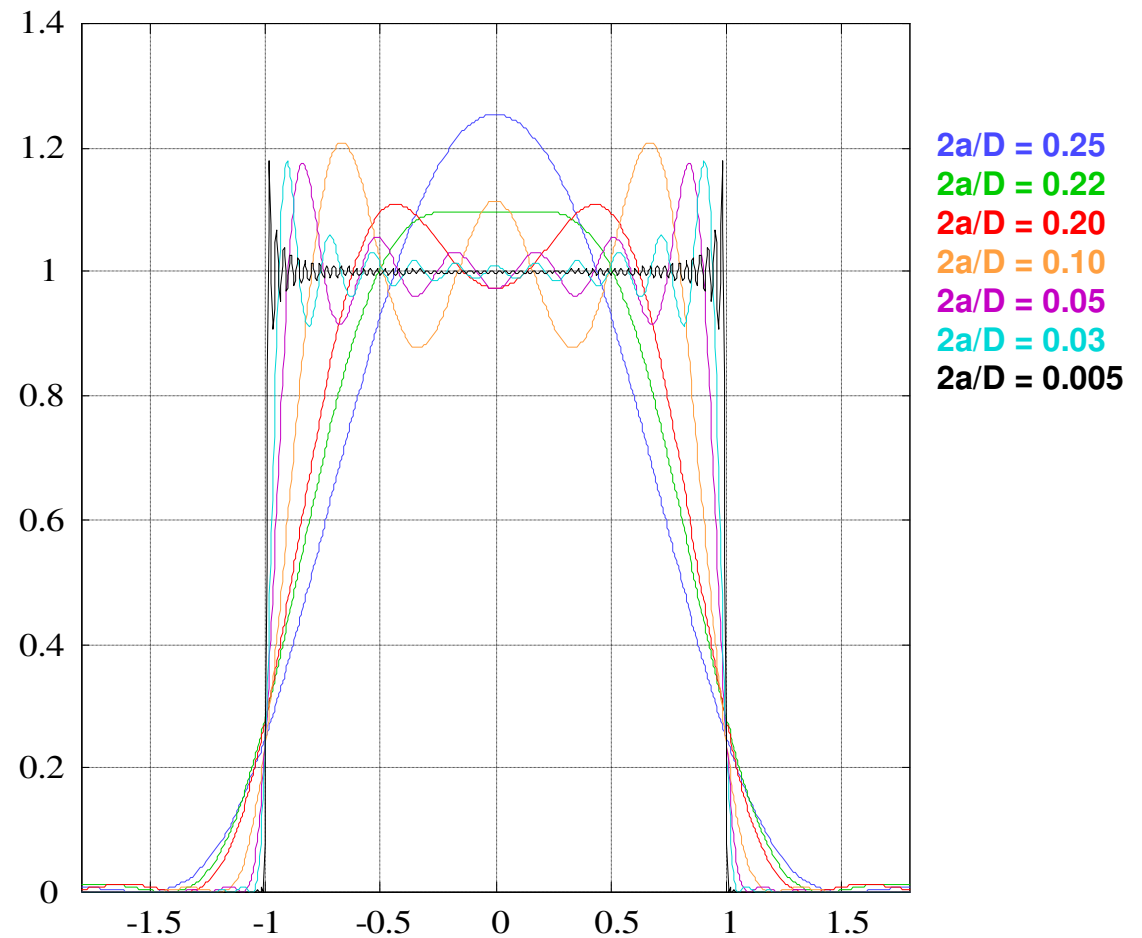
- Deutlich sichtbare Beugungsrippel
- Fehler in der Bestimmung der Spaltbreite analog zur Kantenposition



Linien und Kanten

Kohärente Spaltabbildung

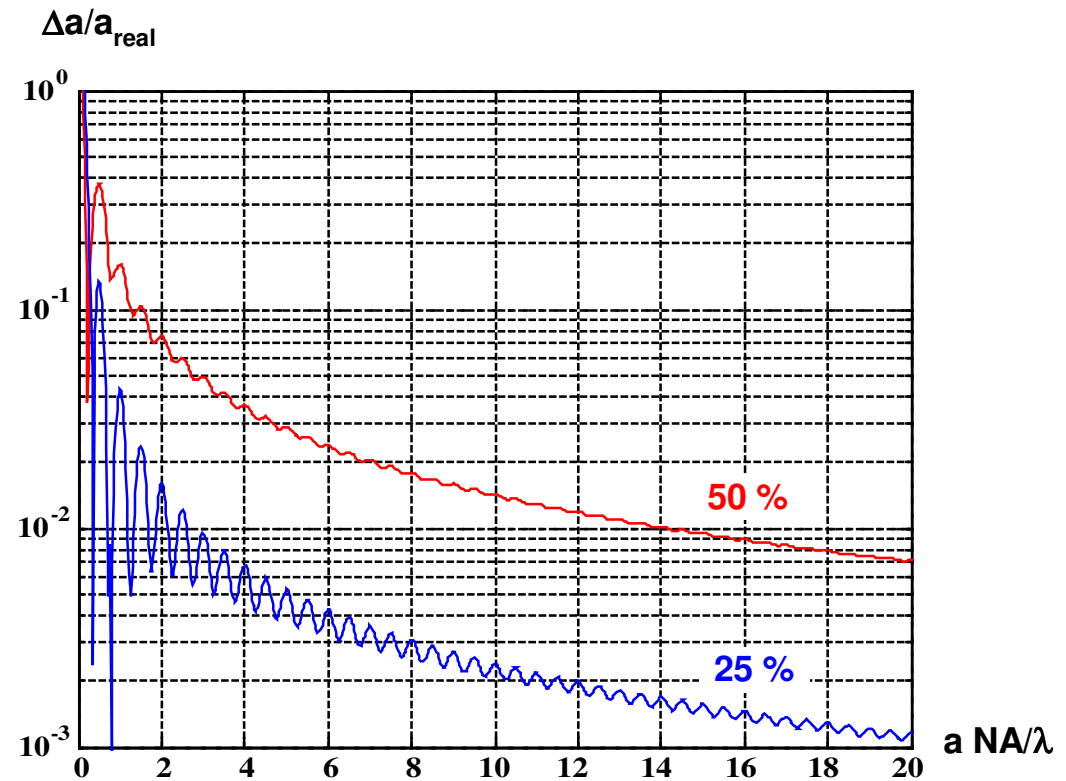
- Kohärente Abbildung einer Kante
Verhältnis Spaltbreite zu
Airydurchmesser variiert



Linien und Kanten

Kohärente Spaltabbildung

- Fehler in der Bestimmung der Spaltbreite :
 - Kriterium I = 50 % : großer Fehler
 - Kriterium I = 25% : Fehler eine Größenordnung kleiner



Linien und Kanten

Inkohärente Spaltabbildung

- Intensitätsprofil

$$I_{slit}^{(ink)}(x) = \frac{\lambda}{2\pi \cdot \sin u'} \cdot \left[Si(t+c) - Si(t-c) - \frac{1 - \cos(t-c)}{t-c} + \frac{1 - \cos(t+c)}{t+c} \right]$$

mit skalierten Koordinate

$$t = 2k \cdot x \cdot \sin u'$$

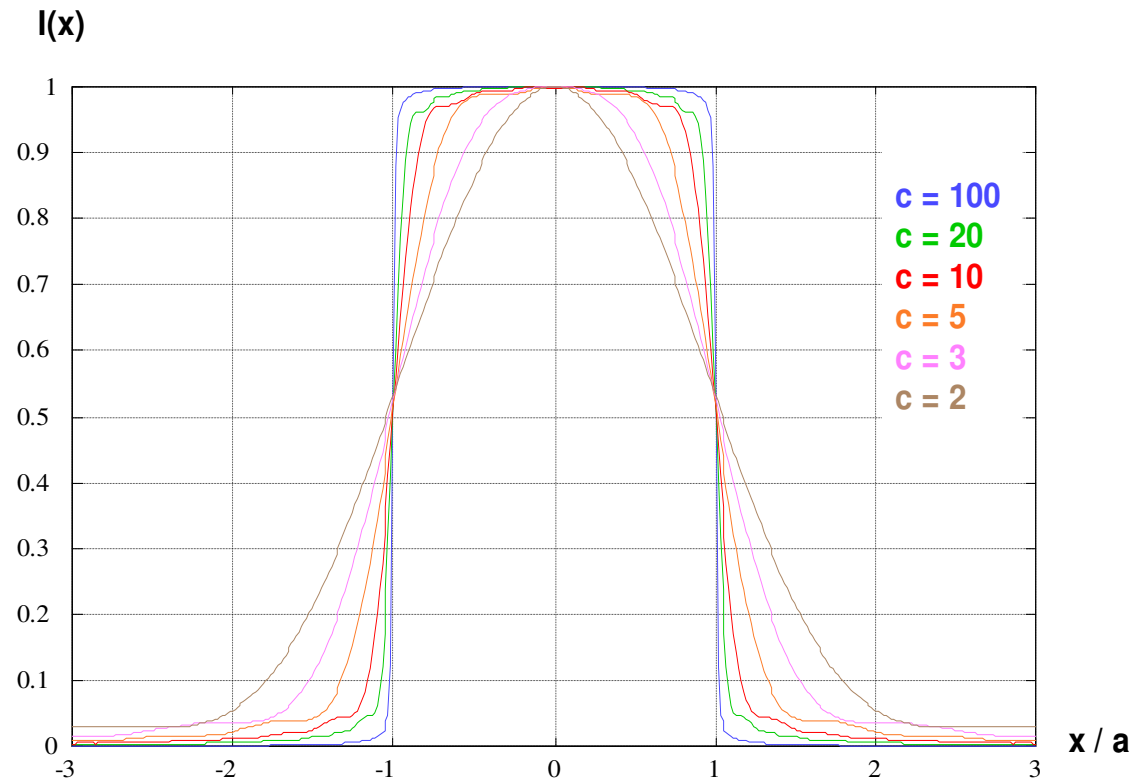
und skalierten Spaltbreite

$$c = 2k \cdot a \cdot \sin u$$

- Das Bild wird dem Spalt umso ähnlicher, je größer seine Breite gegenüber dem Punktbild ist

$$c = 4\pi \cdot \frac{a}{\varnothing}$$

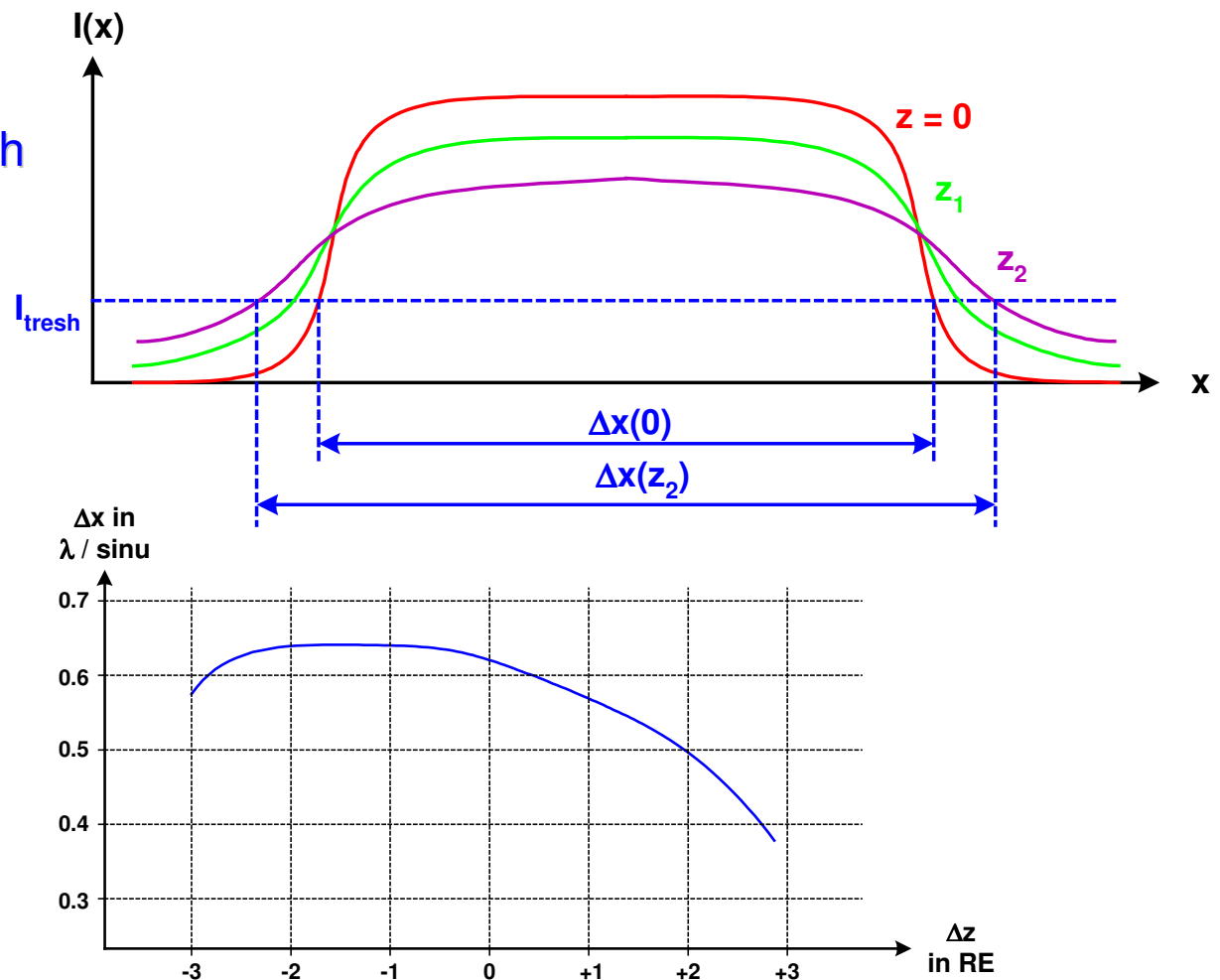
- Keine Beugungsrippe mehr sichtbar, nur Verbreiterung



Linien und Kanten

Bossung-Plots

- Auftragung der Intensitätsverteilung eines Barobjekts über der Defokussierung : Bossung-Plots
- In der Regel asymmetrisch



Linien und Kanten

Bossungplots

- Bossungplots bei 50% Level für einen Bar mit $0.5 D_{\text{airy}}$ Breite bei Aberrationen

