

Vorbereitungsaufgaben zum Erwerb des Abschlusses im Lehrgebiet Numerische Mathematik in den Studiengängen BT, MT, II

1. Gewöhnliche Differentialgleichungen $\dot{x} = f(t, x)$

Wie sieht das Richtungsfeld folgender Differentialgleichungen aus (Skizze)?

- (a) $\dot{x} = -t/x$
- (b) $\dot{x} = 1 + x^2$
- (c) $\dot{x} = \text{sign}(\sin(t)) - x$ (sign – Signumfunktion)
- (d) $\dot{x} = ax(1 - x)$, $a > 0$, const .

2. Gewöhnliche Differentialgleichungen $\dot{x} = f(t, x)$

Notieren Sie für das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(t, x)$, $x(a) = x_0$

- (a) das explizite EULER-Verfahren
- (b) das explizite HEUN-Verfahren
- (c) das implizite EULER-Verfahren
- (d) die allgemeine Darstellung für Einschrittverfahren.

Geben Sie die 3 Verfahrensfunktionen $\Phi(t, x, h)$ an, und weisen Sie damit die Konsistenz der Verfahren nach.

3. Gewöhnliche Differentialgleichungen $\dot{x} = f(t, x)$

Gegeben ist das nebenstehende Parameterschema des expliziten Runge-Kutta-Verfahrens von CESCINO der Konsistenzordnung 4 :

0				
1/4	1/4			
1/2	0	1/2		
1	1	-2	2	
	1/6	0	4/6	1/6

- (a) Zu welcher Klasse von Einschrittverfahren gehört es? Wie groß ist seine Stufenzahl s ?
- (b) Geben Sie eine algorithmische Form dieses Verfahrens an!
- (c) Überprüfen Sie die Konsistenzbedingung! Warum ist das Verfahren konsistent?
- (d) Wie lauten allgemein die Stufenbedingungen? Sind sie hier erfüllt?
- (e) Weisen Sie anhand der Konsistenzgleichungen nach, dass die Konsistenzordnung mindestens gleich 2 ist!
- (f) Wie ist der globale Diskretisierungsfehler e_j definiert? Was heißt “Konvergenz“ des Verfahrens?

4. Gewöhnliche Differentialgleichungen $\dot{x} = f(t, x)$

Gegeben ist das Runge-Kutta-Verfahren (RK)

$$u_j = u_{j-1} + hf(t_j, u_j), \quad j = 1(1)N.$$

- Ist das Verfahren explizit oder implizit (Begründung)?
- Definieren Sie allgemein den Begriff "Stabilitätsfunktion", und bestimmen Sie diese für dieses RK-Verfahren!
- Wie ist der Bereich absoluter Stabilität (Stabilitätsbereich) allgemein definiert? Skizzieren Sie ihn für dieses Verfahren!
- Wann ist ein RK-Verfahren A-stabil? Ist dieses Verfahren A-stabil (Begründung)?

5. Lineare Gleichungssysteme $Ax = a$ – Direkte Verfahren

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccrc} x_1 & +x_2 & & +x_4 & = & 2 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 1 \\ -x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = & -3 \end{array}$$

- Geben Sie die Matrixschreibweise $Ax = a$ an. Wie lauten A und a für dieses System?
- Definieren Sie den Begriff "LU-Zerlegung" (LR-Zerlegung)! Geben Sie die Hauptschritte des Algorithmus zur Lösung des allgemeinen Systems $Ax = a$ mit LU-Zerlegung (LR-Zerlegung) in Matrixschreibweise an!
- Was heißt "Pivotisierung"? Warum ist sie im allgemeinen erforderlich?
- Wie kann man die inverse Matrix A^{-1} und die Determinante $\det(A)$ durch LU-Zerlegung (LR-Zerlegung) bestimmen?

6. Lineare Gleichungssysteme $Ax = a$ – Direkte Verfahren

Symmetrische lineare Gleichungssystem $Ax = a$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 9 \\ 5 & 26 & 16 & 47 \\ 3 & 16 & 14 & 35 \\ 9 & 47 & 35 & 95 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} -12 \\ -62 \\ -38 \\ -114 \end{pmatrix}$$

kann man in MATLAB mit Hilfe des CHOLESKY-Verfahrens lösen.

- Wann ist eine Koeffizientenmatrix A symmetrisch und positiv definit?
- Was bedeutet allgemein "Cholesky-Zerlegung"? Wie lauten in MATLAB die Befehle zur Lösung des Gleichungssystems mittels Cholesky-Zerlegung?
- $T(n)$ bezeichne die Anzahl der benötigten Gleitpunkt-Operationen für ein Gleichungssystem mit n Unbekannten. Geben Sie den dominanten Term von $T(n)$ bei LU-Zerlegung (LR-Zerlegung) und bei Cholesky-Zerlegung für große Dimension n an. Vergleichen Sie diese Anzahlen miteinander!

7. Lineare Gleichungssysteme $Ax = a$ – Iterative Verfahren

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccrc} 2x_1 & +3x_2 & +20x_3 & -x_4 & = & 10 \\ -10x_1 & -x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = & 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 & -20x_4 & = & 15 \\ -x_1 & +10x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 5 \end{array} \tag{1}$$

- Definieren Sie die Begriffe “Diagonaldominanz“, “Strikte Diagonaldominanz“, “Irreduzibilität“ einer Matrix A !
- Notieren Sie das Gesamtschrittverfahren (Jacobi-Verfahren) für das System (1)! Worin besteht der Unterschied zum Einzelschrittverfahren?
- Wie lauten die Iterationsmatrix B und der konstante Vektor b des Gesamtschrittverfahrens (Jacobi-Verfahren) für dieses Beispielsystem (1)?
- Begründen Sie, dass sowohl Gesamtschritt- als auch Einzelschrittverfahren konvergieren.
- Geben Sie eine Formel zur a-priori-Abschätzung des Fehlers $\|x_k - x_*\|$ der k -ten Näherung x_k an!
- Bestimmen Sie zahlenmäßig diese Fehlerschranke bei $k = 15$ Iterationsschritten mit dem Gesamtschrittverfahren! Der Startwert sei $x_0 = (0, 0, 0, 0)^T$.

8. Lineare Gleichungssysteme $Ax = a$ – Iterative Verfahren

Sind folgende Matrizen *irreduzibel* oder *reduzibel*? Skizzieren Sie dazu die Matrixgraphen $G(A)$ und $G(B)$. Für welche Matrix können Sie deren Regularität garantieren?

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Nichtlineare Gleichungssysteme $f(x) = 0$ – Newton-Verfahren

Zu bestimmen ist die Quadratwurzel \sqrt{a} einer gegebenen reellen Zahl $a > 0$ lediglich mit Hilfe der 4 Grundrechenarten.

- Notieren Sie das Newton-Verfahren für die spezielle Nullstellenaufgabe

$$f(x) = x^2 - a = 0.$$

Warum kann damit die Quadratwurzel \sqrt{a} bestimmt werden?

- Ermitteln Sie mit einer Skizze den Konvergenzbereich des Newton-Verfahrens für diese Aufgabe in Abhängigkeit von a . Welche Startwerte x_0 sind ohne Kenntnis der Lösung zu empfehlen?
- Zusatzaufgabe: Finden Sie eine Funktion f für die Quadratwurzel \sqrt{a} , mit der das Newton-Verfahren keine Divisionen erfordert!

10. Nichtlineare Gleichungssysteme $f(x) = 0$ – Newton-Verfahren

- Wie lautet das Newton-Verfahren zur Lösung eines allgemeinen Gleichungssystems $f(x) = 0$ mit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$?
- Notieren Sie einen Algorithmus zur Lösung des Systems $f(x) = 0$ mit dem Newton-Verfahren bei vorgegebener Startnäherung x_0 bis auf eine Toleranz $tol > 0$.
- Wie ist der Begriff der “Konvergenzordnung“ p eines Iterationsverfahrens definiert? Unter welchen Voraussetzungen konvergiert das Newton-Verfahren quadratisch?
- Nennen Sie Ihnen bekannte modifizierte (verbesserte, abgewandelte) Newton-Verfahren! Worin bestehen deren Vor- und Nachteile?

11. Interpolation von Funktionen

Gegeben ist die Stützstellenfolge $(t_i, x_i) = (1, 2), (4, 5), (6, 7), (9, -5)$.

- Bestimmen Sie (i) die *Lagrange-Form* und (ii) die *Newton-Form* des zugehörigen Interpolationspolynoms höchstens 3. Grades.
- Wie lautet die allgemeine Darstellung des Interpolationspolynoms n -ten Grades zu den Stützstellen (t_i, f_i) , $i = 0(1)n$, in *Lagrange-Form*? Geben Sie die Lagrange-Basis und die Newton-Basis an!
- Wie ist ein Spline des Grades k allgemein definiert? Wie sieht formelmäßig ein linearer, ein quadratischer, ein kubischer Spline aus?
- Bestimmen Sie den linearen Interpolationsspline zur obigen Stützstellenfolge!
- Notieren Sie die Bedingungen, um einen natürlichen kubischen Interpolationsspline zu bestimmen. Erläutern Sie, in welcher Reihenfolge die Spline-Koeffizienten berechnet werden (Algorithmusschritte)!

12. Interpolation von Funktionen

Bis auf welche Genauigkeit kann $\sqrt{115}$ durch Polynom-Interpolation der Funktion $y = \sqrt{x}$ berechnet werden, wenn die Interpolationspunkte $x_0 = 100$, $x_1 = 121$, $x_2 = 144$ lauten?

13. Numerische Integration

Zu bestimmen ist ein Näherungswert für das Integral

$$J = \int_0^1 e^{-x^2} dx .$$

- Wie ist eine *einfache Integrationsformel* zur Bestimmung des Integrals

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} f(t) dt$$

auf dem Streifen $[-h/2, h/2]$ der Breite h allgemein definiert? Wann spricht man speziell von einer "Newton-Cotes-Formel"? Nennen Sie 3 derartige Formeln namentlich.

- Geben Sie die *zusammengesetzte Trapezregel* mit N Teilintervallen für das allgemeine Integral

$$I = \int_a^b f(t) dt$$

an. Wie ist der Integrationsfehler allgemein definiert?

- Der Integrationsfehler der zusammengesetzten Trapezregel lautet

$$F_T = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \quad \text{mit} \quad a < \xi < b, \quad h = \frac{b-a}{N} .$$

Bestimmen Sie die Anzahl N der benötigten Teilintervalle konstanter Länge h , mit der die zusammengesetzte Trapezregel den obigen Integralwert J mindestens auf 6 signifikante Dezimalstellen genau liefert!