Programmierung und Algorithmen

Kapitel 5
Formale Algorithmenmodelle

Überblick

- Motivation
- Formale Algorithmenmodelle
- Registermaschine
- Abstrakte Maschinen
- Markov-Algorithmen
- Church´sche These

Motivation

- Bisher: Ausführung von Algorithmen auf abstrakter Ebene
- Nun: Entwicklung von Modellen für Maschinen, die Algorithmen ausführen
- Ziel: einfache Modelle
  - Näher an Computer als abstrakte Ausführung applikativer Algorithmen
  - Einfacher für mathematische Betrachtungen als bisherige Modelle
- Konkret: Registermaschine als einfaches Modell realer Computer
- Abstrakte Maschinen als vereinheitlichender Rahmen
- Markov-Algorithmen als einfach zu programmierende Maschinen auf Zeichenketten

Formale Algorithmenmodelle

- (Maschinennahe) Präzisierung des Algorithmenbegriffs: Registermaschine
  - Registermaschine besteht aus Registern $B, C_0, , C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ und einem Programm.
  - B heißt Befehlszähler, C_0 heißt Arbeitsregister oder Akkumulator, C_n, $n \geq 1$ heißen Speicherregister
  - Jedes der Register enthält als Wert eine natürliche Zahl
  - **Konfiguration** der Registermaschine:

$$(b, c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots)$$

mit Register B enthält Zahl b und
für $n \geq 0$ gilt, das Register C_n enthält Zahl c_n

Registermaschine

- Programm einer Registermaschine
  - Programm = endliche Folge von Befehlen
  - Durch Anwendung eines Befehls wird die Konfiguration der Registermaschine geändert
  - Notation

$$(b, c_o, c_1, \ldots c_n, \ldots) \vdash (b', c'_0, c'_1, \ldots, c'_n, \ldots)$$

Ein- und Ausgabebefehle

`LOAD` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_i$
`CLOAD` i ,	$i \in \mathbb{N}$	$b' = b + 1$	$c'_0 = i$
`STORE` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_i = c_0$

(bei diesen Operationen gilt grundsätzlich zusätzlich zu den spezifischen Erklärungen der folgenden Folien:
$c'_j = c_j$ für $j \neq 0$; bzw.
$c'_j = c_j$ für $j \neq 0 \land j \neq i$ bei `STORE i`
d.h.: Befehle haben keine „unspezifische Nebenwirkungen“ auf die aktuelle Konfiguration)

Arithmetische Befehle

`ADD` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_0 + c_i$
`CADD` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_0 + i$
`SUB` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = \begin{cases} c_0 - c_i & \text{für } c_0 \geq c_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
`CSUB` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = \begin{cases} c_0 - i & \text{für } c_0 \geq i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
`MULT` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_0 \cdot c_i$
`CMULT` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = c_0 \cdot i$
`DIV` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = \lfloor c_0 / c_i \rfloor$
`CDIV` i ,	$i \in \mathbb{N}_+$	$b' = b + 1$	$c'_0 = \lfloor c_0 / i \rfloor$

(bei diesen Operationen gilt grundsätzlich $c'_j = c_j$ für $j \neq 0$)

Sprung- und Stoppbefehle

- Sprungbefehle:

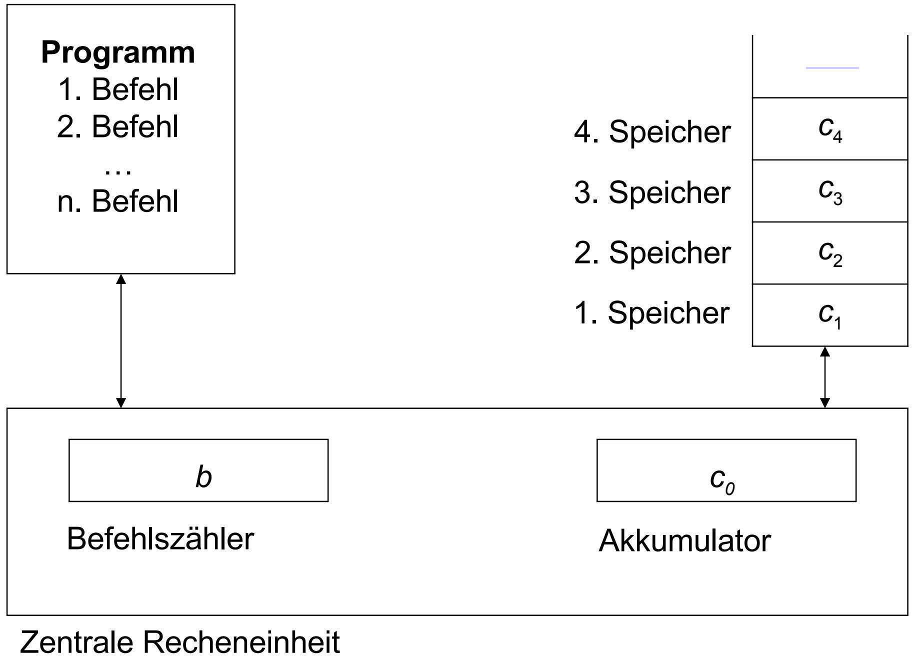
  `GOTO` i , $\quad i \in \mathbb{N}_+ \quad b' = i$

  `IF` $c_0 = 0$ `GOTO` i , $\quad i \in \mathbb{N}_+ \quad b' = \begin{cases} i & \text{falls } c_0 = 0 \\ b + 1 & \text{sonst} \end{cases}$

- Stoppbefehl:

  `END` , $\quad b' = b \quad c'_j = c_j \text{ für } j \geq 0$

Registermaschine: Aufbau



Beispiel Registermaschine M_1

```
1   LOAD 1
2   DIV 2
3   MULT 2
4   STORE 3
5   LOAD 1
6   SUB 3
7   STORE 3
8   END
```

Beispiel Registermaschine M_1, 1. Ablauf

- Startkonfiguration

$$b = 1,\ c_0 = 0,\ c_1 = 32,\ c_2 = 5,\ c_3 = 0,$$

- Folge von Konfigurationen:

$$\begin{aligned}(1, 0, 32, 5, 0, \ldots) &\vdash (2, 32, 32, 5, 0, \ldots) \vdash (3, 6, 32, 5, 0, \ldots)\\ &\vdash (4, 30, 32, 5, 0, \ldots) \vdash (5, 30, 32, 5, 30, \ldots)\\ &\vdash (6, 32, 32, 5, 30, \ldots) \vdash (7, 2, 32, 5, 30, \ldots)\\ &\vdash (8, 2, 32, 5, 2, \ldots)\end{aligned}$$

Beispiel Registermaschine M_1, 2. Ablauf

- Startkonfiguration

$$b = 1,\ c_0 = 0,\ c_1 = 100,\ c_2 = 20,\ c_3 = 0,$$

- Folge von Konfigurationen:

$$\begin{aligned}(1, 0, 100, 20, 0, \ldots) &\vdash (2, 100, 100, 20, 0, \ldots)\\ &\vdash (3, 5, 100, 20, 0, \ldots)\\ &\vdash (4, 100, 100, 20, 0, \ldots)\\ &\vdash (5, 100, 100, 20, 100, \ldots)\\ &\vdash (6, 100, 100, 20, 100, \ldots)\\ &\vdash (7, 0, 100, 20, 100, \ldots)\\ &\vdash (8, 0, 100, 20, 0, \ldots).\end{aligned}$$

Registermaschine M_1, allgemeiner Ablauf

$b = 1, c_0 = 0, c_1 = n, c_2 = m, c_3 = 0$

- $n = q \cdot m + r$ mit $0 \leq r < m$
- d. h. $q = \lfloor n/m \rfloor$ ist ganzzahliges Ergebnis der Division von n durch m
- r ist der verbleibende Rest bei dieser Division

$$
\begin{aligned}
(1, 0, n, m, 0, \ldots) \quad & \vdash (2, n, n, m, 0, \ldots) \vdash (3, q, n, m, 0, \ldots) \\
& \vdash (4, q \cdot m, n, m, 0, \ldots) \\
& \vdash (5, q \cdot m, n, m, q \cdot m, \ldots) \\
& \vdash (6, n, n, m, q \cdot m, \ldots) \vdash (7, r, n, m, q \cdot m, \ldots) \\
& \vdash (8, r, n, m, r, \ldots).
\end{aligned}
$$

Berechnete Funktion

Eine Registermaschine M berechnet die Funktion

$$f: \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}^m$$

mit $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ wenn es Zahlen $i_1, i_2, \ldots, i_m$ so gibt, dass M jede Konfiguration

$$(1, 0, x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$$

in eine Konfiguration $(b, c_0, c_1, \ldots)$ überführt, für die b die Nummer einer `END`-Anweisung ist und $c_{i_j} = y_j$ für $1 \leq j \leq m$ gilt.

Erläuterung zur berechneten Funktion

- Die Registermaschine beginnt die Abarbeitung mit dem ersten Befehl
- Die Argumente bzw. Eingaben der zu berechnenden Funktion stehen dabei in den ersten *n* Speicherregistern $C_1, \ldots, C_n$
- Die Registermaschine beendet ihre Arbeit bei Erreichen eines `END`-Befehls
- Die Resultate bzw. Ausgaben stehen nach beendeter Abarbeitung in den vorab festgelegten Speicherregistern $C_{i_1}, C_{i_2}, \ldots, C_{i_m}$

Berechnete Funktion: Beispiel

```
1   LOAD 1
2   ADD 2
3   STORE 3
4   END
```

- Berechnet aus Werten *x* und *y* in Registern C_1 und C_2 die Summe $x + y$ und legt diese im Register C_3 ab
- Mit $i_1 = 3$ wird die Addition realisiert

Registermaschine M_2

```
1   CLOAD 1
2   STORE 3
3   LOAD 2
4   IF c0 = 0 GOTO 12
5   LOAD 3
6   MULT 1
7   STORE 3
8   LOAD 2
9   CSUB 1
10  STORE 2
11  GOTO 4
12  END
```

- $f_2 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$ mit Ergebnis im dritten Speicherregister c_3 (also $i_1 = 3$)

Beispiel für M_2

$(1, 0, 5, 3, 0, \ldots)$

$\vdash (2, 1, 5, 3, 0, \ldots)$ $\vdash (3, 1, 5, 3, 1, \ldots)$ $\vdash (4, 3, 5, 3, 1, \ldots)$

$\vdash (5, 3, 5, 3, 1, \ldots)$ $\vdash (6, 1, 5, 3, 1, \ldots)$ $\vdash (7, 5, 5, 3, 1, \ldots)$

$\vdash (8, 5, 5, 3, 5, \ldots)$ $\vdash (9, 3, 5, 3, 5, \ldots)$ $\vdash (10, 2, 5, 3, 5, \ldots)$

$\vdash (11, 2, 5, 2, 5, \ldots)$ $\vdash (4, 2, 5, 2, 5, \ldots)$ $\vdash (5, 2, 5, 2, 5, \ldots)$

$\vdash (6, 5, 5, 2, 5, \ldots)$ $\vdash (7, 25, 5, 2, 5, \ldots)$ $\vdash (8, 25, 5, 2, 25, \ldots)$

$\vdash (9, 2, 5, 2, 25, \ldots)$ $\vdash (10, 1, 5, 2, 25, \ldots)$ $\vdash (11, 1, 5, 1, 25, \ldots)$

$\vdash (4, 1, 5, 1, 25, \ldots)$ $\vdash (5, 1, 5, 1, 25, \ldots)$ $\vdash (6, 25, 5, 1, 25, \ldots)$

$\vdash (7, 125, 5, 1, 25, \ldots)$ $\vdash (8, 125, 5, 1, 125, \ldots)$

$\vdash (9, 1, 5, 1, 125, \ldots)$ $\vdash (10, 0, 5, 1, 125, \ldots)$

$\vdash (11, 0, 5, 0, 125, \ldots)$ $\vdash (4, 0, 5, 0, 125, \ldots)$

$\vdash (12, 0, 5, 0, 125, \ldots)$

Dieses konkrete Beispiel ergibt $f_1(5, 3) = 125$.

Bedeutung von M_2

Konfiguration $(1, 0, x, y, 0, \ldots)$:

- Nach Abarbeitung der Befehle 1 – 3 ergibt sich $(4, y, x, y, 1, \ldots)$.
  - $y = 0$: `END`-Anweisung; $(12, y, x, y, 1) = (12, 0, x, 0, 1)$ mit Ergebnis 1.
  - Falls $y \neq 0$: Befehle 5 – 11; $(4, y - 1, x, y, 1 \cdot x, \ldots)$.
  - $y - 1 = 0$: $(12, y - 1, x, y - 1, x, \ldots) = (12, 0, x, 0, x, \ldots)$ mit Ergebnis x.
  - $y - 1 \neq 0$: Befehle 5 – 11; $(4, y - 2, x, y - 2, x^2, \ldots)$.
  - $y - 2 = 0$: $(12, y - 2, x, y - 2, x^2, \ldots) = (12, 0, x, 0, x^2, \ldots)$ mit Ergebnis x^2.
  - $y - 2 \neq 0$: Befehle 5 – 11 etc.
- Abbruch allgemein $(12, y - k, x, y - k, x^k, \ldots) = (12, 0, x, 0, x^y, \ldots)$ (wegen $y = k$).

  Berechnete Funktion: $f_2(x, y) = x^y$

Registermaschine M_3

- Programm

```
1   LOAD 1
2   IF c₀ = 0 GOTO 4
3   GOTO 3
4   END
```

- berechnet die Funktion

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0 \\ \text{undefiniert} & \text{sonst} \end{cases}$$

Registermaschine M_4

Beispiel für komplexeres Programm:

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \text{ keine Primzahl ist} \\ 1 & \text{falls } x \text{ eine Primzahl ist} \end{cases}$$

Wir überprüfen zuerst, ob die Eingabe $x \leq 1$ ist. Sollte dies der Fall sein, so ist x keine Primzahl und wir schreiben in das zweite Speicherregister eine 0 und beenden die Arbeit. Ist dagegen $x \geq 2$, so testen wir der Reihe nach, ob x durch 2, 3, 4, . . . x - 1 teilbar ist. Gibt einer dieser Tests (für X > 2) ein positives Resultat, so ist x keine Primzahl; fallen dagegen alle diese Tests negativ aus (oder ist x = 2), so ist x prim.

Programm M_4

1	`LOAD 1`	Laden von x
2	`CSUB 1`	Berechnen von x - 1
3	`IF` c_0 `= 0 GOTO 19`	Test, ob $x \leq 1$
4	`CLOAD 2`	Laden des ersten Testteilers t=2
5	`STORE 2`	Speichern des Testteilers t
6	`LOAD 1`	
7	`SUB 2`	Berechnen von x - t
8	`IF` c_0 `= 0 GOTO 21`	Test, ob $t < x$
9	`LOAD 1`	
10	`DIV 2`	Befehle 9 – 14 berechnen Rest
11	`MULT 2`	bei ganzzahliger Teilung x / t
12	`STORE 3`	(siehe Beispiel M_1)
13	`LOAD 1`	
14	`SUB 3`	

Programm M_4

15	IF c_0 = 0 GOTO 19	Test, ob *t* Teiler
16	LOAD 2	
17	CADD 1	Erhöhung des Testteilers um 1
18	GOTO 5	Start des nächsten Tests
19	STORE 2	Speichern des Ergebnisses 0
20	GOTO 23	
21	CLOAD 1	
22	STORE 2	Speichern des Ergebnisses 1
23	END	

Weitere Maschinenmodelle

- Gemeinsamkeit bisheriger Modelle (Registermaschine, applikative und imperative Algorithmen)
  - Kontrollstrukturen + elementare, von einer „Maschine“ ausführbare Einzelschritte
- Allgemeines Modell für deterministische Algorithmen: abstrakte Maschine
  - Ermöglicht den Vergleich wichtiger Eigenschaften wie *Laufzeit* und *Terminierung* unabhängig von einem konkreten Algorithmenmodell bzw. Programmierparadigma
- Weitere Spezialisierungen abstrakter Maschinen: Turing-Maschine, Markov-Algorithmen

Abstrakte Maschine

$M = (X, Y, K, \boldsymbol{\alpha}, \omega, T, \sigma)$,

X Menge von *Eingabewerten*

Y Menge von *Ausgabewerten*

K Menge von *Konfigurationen*

$\boldsymbol{\alpha}: X \rightarrow K$ *Eingabefunktion*

$\omega: K \rightarrow Y$ *Ausgabefunktion*

$T: K \rightarrow K$ *Transitionsfunktion*

$\sigma: K \rightarrow$ **`bool`** *Stoppfunktion* (markiert Endkonfiguration)

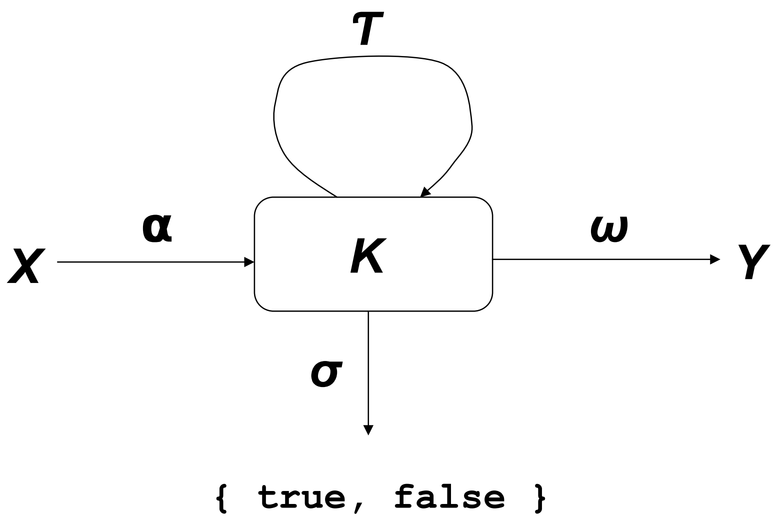
Abstrakte Maschinen: Endkonfigurationen

Endkonfigurationen zu M:

$$E = \{ k \in K \mid \sigma(k) = \mathbf{true} \}$$

Endkonfigurationen sind Maschinenzustände, in denen eine Berechnung terminiert.

Abstrakte Maschinen: graphisch



Abstrakte Maschinen: Arbeitsweise

Eine abstrakte Maschine *arbeitet* folgendermaßen:

1. Ein Eingabewert $x \in X$ bestimmt die Anfangskonfiguration
   $k_0 = \boldsymbol{\alpha}(x) \in K$.
2. Wir überführen mittels T Konfigurationen in Folgekonfigurationen, also

   $$k_1 = T(k_0),\ k_2 = T(k_1),\ \ldots$$

   bis zum ersten Mal eine Endkonfiguration $k_i \in E$ erreicht wird. Dies braucht natürlich niemals einzutreten.
3. Wird eine Endkonfiguration $k_i \in E$ erreicht, so wird der Ausgabewert $\omega(k_i) \in Y$ ausgegeben.

Abstrakte Maschinen: Berechnung

Bei Eingabe von $x \in X$ gibt es also zwei Möglichkeiten:

1. Die Maschine hält nie an.
2. Die Maschine hält und gibt einen eindeutig bestimmten Ausgabewert $y \in Y$ aus.

Auf diese Weise berechnet die Maschine M eine partielle Funktion

$$f_M : X \to Y$$

Abstrakte Maschinen: Laufzeit

Die Laufzeit einer abstrakten Maschine M für die Eingabe $x \in X$ ist

$$t_M(x) = (\mu n)\,[\sigma\,(T^{\,n}\,(\boldsymbol{\alpha}\,(x)))]$$

Hierbei ist $(\mu n)\,[B]$ die kleinste natürliche Zahl $n \in \mathbb{N} = \{\, 0, 1, 2, \ldots \}$, so dass die Bedingung $B = \texttt{true}$ wird und B für alle $m \leq n$ definiert ist.

Gibt es *keine* solche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so ist $t_M(x) = \bot$ (undefiniert).

Abstrakte Maschinen: Berechnete Funktion

Die von einer abstrakten Maschine M berechnete Funktion

$$f_M : X \to Y$$

ist gegeben durch

$$f_M(x) = \omega\,(T^{\,t_M(x)}\,(\boldsymbol{\alpha}\,(x)))\ ; \quad \text{ist } t_M(x) = \perp \text{, so ist } f_M(x) = \perp .$$

Abstrakte Maschinen: Beispiel

- $X = Y = \mathbb{N}$
- $K = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\boldsymbol{\alpha}(n) = (1, n)$
- $T((m, n)) = (m * n, n - 1)$
- $\omega((m, n)) = m$
- $\sigma((m, n)) = \begin{cases} \texttt{true}, & \text{falls } n = 0 \\ \texttt{false} & \text{sonst} \end{cases}$

Laufzeit? Berechnete Funktion?

Applikative Algorithmen als AM (nur ganzzahlige E/A)

$f_i(u_{i,1}, \ldots, u_{i,n_i}) = t_i(u_{i,1}, \ldots, u_{i,n_i}), i = 1, \ldots, m.$

- $X = \mathbb{Z}^{n1}$
- $Y = \mathbb{Z}$
- K = Terme ohne Unbekannte
- $\alpha(a_1, \ldots, a_{n_1})$ = der Term "$f_1(a_1, \ldots a_{n_1})$"
- $\omega(t)$ = der Wert von t
- T : Termauswertung aufgrund der Funktionsdefinitionen.

  Durch "Berechnungsvorschrift" deterministisch machen!

  Z.B. durch die Forderung, stets das erste Auftreten von links eines Funktionsaufrufes mit Konstanten $f_i(b_1, \ldots, b_{ni})$ mit $b_j \in \mathbb{Z}$, j=1, …, n_i, durch die rechte Seite $t_i(b_1, \ldots, b_{ni})$ zu ersetzen.
- $\sigma(t) = \begin{cases} \texttt{true}, & \text{falls } t = b \in \mathbb{Z} \text{ (Konstante) ist} \\ \texttt{false} & \text{sonst} \end{cases}$

Imperative Algorithmen als AM (nur ganzzahlige E/A)

```
PROG:   var      V, W, ...: int;
                 P,Q, ...: bool;
        input    X1, ... , Xn;
                 β̄
        output   Y1, . . . , Ym.
```

Imperative Algorithmen als AM II

- $X = \mathbb{Z}^n$, $Y = \mathbb{Z}^m$
- K = { (Z, β) | Z Zustand, β Anweisung }
  Z: aktueller Zustand, β : noch auszuführende Anweisung
- α (a_1, . . . , a_n) = (Z_0, $\overline{\beta}$), wobei

$$Z_0(X_i) = a_i, \; i = 1, \ldots, n, \text{ und}$$

$$Z_0(Y) = \perp \quad \text{für } Y \neq X_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

- ω (Z, β) = ($Z(Y_1)$, . . . , $Z(Y_m)$)
- T (Z, β) = (Z', β'), wobei

  Z' = Zustand nach Ausführung der nächsten Anweisung

  β' = Rest der noch auszuführenden Anweisung

- $\sigma(t) = \begin{cases} \texttt{true}, & \text{falls } \beta \text{ leer ist (keine Anweisungen mehr)} \\ \texttt{false} & \text{sonst} \end{cases}$

Markov-Algorithmen

- Einfaches mathematisch orientiertes Modell als Spezialisierung abstrakter Maschinen
- Programmtechnisch einfach in einen Interpretierer für Markov-Tafeln umzusetzen

  $A = (a_1, \ldots, a_n)$ Alphabet

  A^* die Menge der Worte (Texte) über A

Markov-Regeln

Ein Markov-Algorithmus wird definiert durch Regeln der Form $\varphi \rightarrow \psi$ mit $\varphi, \psi \in A^*$. Bedeutung der Regel: Wort φ soll durch das Wort ψ ersetzt werden.

Angewendet auf ein Wort $\xi \in A^*$ entsteht durch Regelanwendung auf eindeutige Weise ein neues Wort $g[\varphi \rightarrow \psi](\xi)$:

- Ist φ ein Teilwort von ξ, also $\xi = \mu\varphi\nu$ für $\mu, \nu \in A^*$, und ist φ an dieser Stelle nach μ das erste Auftreten (von links) von φ in ξ, so ist $g[\varphi \rightarrow \psi](\xi) = \mu\psi\nu$, d. h. φ wird (nur!) an dieser Stelle durch ψ ersetzt.
- Ist φ kein Teilwort von ξ, so ist $g[\varphi \rightarrow \psi](\xi) = \xi$, d. h., es passiert nichts.

Achtung: $\varphi, \psi \in A^*$ bedeutet: φ oder ψ können auch ε (leeres Wort) sein!

Beispiel für Regeln

Sei $A = (0, 1)$. Wir wenden die Regel $01 \rightarrow 10$ sukzessive an.

$$
\begin{array}{lll}
1\,1\,0\,\underline{0\,1}\,0\,1\,0\,1\,1 & \rightarrow & 1\,1\,\underline{0\,1}\,0\,0\,1\,0\,1\,1 \\
 & \rightarrow & 1\,1\,1\,0\,0\,\underline{0\,1}\,0\,1\,1 \\
 & \rightarrow & 1\,1\,1\,0\,\underline{0\,1}\,0\,0\,1\,1 \\
 & \rightarrow & 1\,1\,1\,\underline{0\,1}\,0\,0\,0\,1\,1
\end{array}
$$

etc.

Original-Markov-Algorithmen

- Originalvorgehensweise:
  1. Gehe alle Regeln *der Reihe* nach durch.
  2. Wenn eine Regel anwendbar ist, wende sie an der *linkesten möglichen* Stelle an.
  3. Starte von vorne.
- Terminierung:
  - Einige Regeln als Terminierungsregeln markieren, *oder*
  - Terminiere wenn keine Regel mehr anwendbar ist.
- Hier: an Rechnermodelle angepasste Variante, die Markov-Tafeln.

Markov-Tafel

Eine Markov-Tafel ist wie folgt definiert:

- Sie besteht aus fünf Spalten und beliebig vielen (endlich vielen) Zeilen.
- Eine Zeile ist ein 5-Tupel der Form

$$k \;\; \varphi \;\; \psi \;\; i \;\; j$$

wobei $i, j, k \in \mathbb{N}$ sind, k ist die Zeilennummer, und φ ψ stellen die Regel $\varphi \to \psi$ dar, i ist die Nummer der nächsten Zeile, falls das Teilwort gefunden (die Regel also angewandt) wurde, und j ist die Nummer der nächsten Zeile, falls φ nicht auftrat.

Ausführung einer Markov-Tafel

Die Ausführung der Markov-Tafel beginnt in der ersten Zeile (Nummer 0) und stoppt sobald zu einer nicht vorhandenen Zeilennummer (*i* oder *j*) gegangen werden soll.

Der Zustand bei der Ausführung einer Markov-Tafel ist eindeutig festgelegt durch

- die sich in Bearbeitung befindende Zeichenkette, und
- die aktuelle Zeilennummer.

Markov-Algorithmen als abstrakte Maschinen

$X \subseteq A^*$	Eingabemenge
$Y \subseteq A^*$	Ausgabemenge
$K \subseteq \{ (z, n) \mid z \in A^*, n \in \mathbb{N} \}$	Konfigurationen
$\boldsymbol{\alpha}(x) = (x, 0)$	Eingabefunktion
$\omega(z, n)$	Ausgabefunktion
$T : K \rightarrow K$	Transitionsfunktion $T(z, n) = (g[\varphi \rightarrow \psi](z), n')$, wobei $\varphi \rightarrow \psi$ die Regel in der Zeile n ist und n´ die Folgenummer (oben: i bzw. j)
$\sigma(z, n)$	$\sigma(z, n) = \begin{cases} \texttt{true}, & \text{falls n keine Zeilennummer} \\ \texttt{false}, & \text{sonst} \end{cases}$

Ein Markov-Algorithmus ist damit tatsächlich eine direkte Spezialisierung des Konzepts der abstrakten Maschine.

Markov-Algorithmus ‘Addition von Eins’

”Addiere | ”

$$A = \{\, | \,\};\quad X = A^*;\quad Y = A^+ = A^* - \{\, \epsilon \,\}$$

Markov-Tafel:

k			i	j
0	ε	|	1	-

berechnet die Funktion $f\,(\,|^n) = |^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

- Formuliert mit per „.“ markierter Terminierungsregel:
  $\varepsilon \rightarrow |\,.$
  (Nach Ausführung einer mit . markierten Regel, terminiert der Algorithmus.)

Das leere Wort ε

- Das leere Wort ε kommt in jedem Wort vor. Das erste Auftreten ist ganz am Anfang.
- Der Algorithmus ‘Addition von Eins’ schreibt also ein | *vor* das Eingabewort $|^n = |\,|\,.\,.\,.\,|$.
- Der j -Eintrag der Tabelle kann niemals angelaufen werden und ist daher irrelevant. Dies deuten wir durch das Zeichen „-“ in der Tabelle an.

Addition zweier Zahlen in unärem Alphabet

$A_0 = \{ | \}$; $A = A_0 \cup \{ + \}$; $X = A^*_0 + A^*_0$ (= $\{ \mu + \nu \mid \mu, \nu \in A_0^* \}$); $Y = A_0^*$

Markov-Tafel:

k			i	j
0	+	ε	1	-

Der Algorithmus löscht das erste + im Eingabewort, also:

$f(|^n + |^m) = |^{n+m}$

- Formuliert mit per „." markierter Terminierungsregel:

  $+ \to \varepsilon$.

Verdopplung

$A_0 = \{ | \}$; $A = A_0 \cup \{ \# \}$; $X = Y = A_0^*$

Das Zeichen # spielt die Rolle einer Markierung (gelegentlich auch als „Schiffchen" bezeichnet), die einmal von links nach rechts durchwandert und dabei die Zeichen | verdoppelt.

k			i	j	Kommentar (hierbei gilt stets: $p = n - q$)
0	|	# |	1	3	$|^n \to \# |^n$
1	# |	| | #	1	2	$|^{2p} \# |^q \to |^{2(p+1)} \# |^{q-1}$ wiederholen bis $q = 1$
2	#	ε	3	-	$|^{2p} \# \to |^{2n}$ hier gilt q = 0

- Formuliert mit per „." markierter Terminierungsregel:

  $\# | \to || \#$

  $\# \to \varepsilon$.

  $| \to \# |$

  (Man beachte, dass die dritte Regel nur zu Beginn einmal ausgeführt werden kann. Ebenso kann die zweite Regel nur am Ende ausgeführt werden.)

Verdopplung: Beispielausführung

Eine Berechnung mit dem Eingabewort | | | ergibt:

$$|||\xrightarrow[0]{}\#|||\xrightarrow[1]{}||\#||\xrightarrow[1]{}||||\#|\xrightarrow[1]{}||||||\#\xrightarrow[2]{}||||||$$

Allgemein wird die Funktion $f(|^n) = |^{2n}$ berechnet.

Multiplikation

$$A_0 = \{\,|\,\}\,;\ A = A_0 \cup \{\ast, \#\}\,;\ X = A_0^* \ast A_0^*\,;\ Y = A_0^*$$

Der folgende Markov-Algorithmus berechnet die Funktion
$f(|^n \ast |^m) = |^{n \ast m}$:

k			i	j	Kommentar
0	$\ast$	$\ast\ast$	1	-	$\|^n\ast\|^m \longrightarrow \|^n\ast\ast\|^m$
1	ε	$\ast$	2	-	$\|^n\ast\ast\|^m \longrightarrow \ast\|^n\ast\ast\|^m$
2	$\ast\ast\|$	$\#\ast\ast$	3	6	
3	$\|\#$	$\#\|$	4	5	Faktor vorn
4	ε	$\|$	3	-	kopieren
5	$\#$	ε	2	-	
6	$\ast\|$	$\ast$	6	7	1. Faktor löschen
7	$\ast\ast\ast$	ε	8	-	Hilfsmarkierung löschen

Multiplikation: Beispiel

Mit der Eingabe | | | ∗ | | ergibt sich z. B. folgende Berechnungsfolge:

$||| \ast || \xrightarrow[0]{} ||| \ast \ast || \xrightarrow[1]{} \ast ||| \ast \ast ||$

$\xrightarrow[2]{} \ast ||| \# \ast \ast | \xrightarrow[3,4]{} | \ast || \# | \ast | \xrightarrow[3,4]{} || \ast | \# || \ast \ast | \xrightarrow[3,4,5]{} ||| \ast ||| \ast \ast |$

$\xrightarrow[2]{} ||| \ast ||| \# \ast \ast \xrightarrow[3,4]{} |||| \ast || \# | \ast \ast \xrightarrow[3,4]{} ||||| \ast | \# || \ast \ast \xrightarrow[3,4,5]{} |||||| \ast ||| \ast \ast$

$\xrightarrow[(2)6]{} |||||| \ast || \ast \ast \xrightarrow[6]{} |||||| \ast | \ast \ast \xrightarrow[6]{} |||||| \ast \ast \ast \xrightarrow[7]{} ||||||$

Kopieren

$$A_0 = \{ 0,1 \} ; A = A_0 \cup \{ \ast , \# \} ; X = A_0^*; Y = A_0^* \ast A_0^*$$

Der folgende Markov-Algorithmus berechnet die Funktion

$$f(\mu) = \mu \ast \mu, \mu \in A_0^*$$

k			i	j	Kommentar
0	ε	∗#	1	-	
1	#0	0#	2	3	kopiere nächstes Zeichen 0 vor ∗
2	∗	0∗	1	-	und wiederhole
3	#1	1#	4	5	kopiere nächstes Zeichen 1 vor ∗
4	∗	1∗	1	-	und wiederhole
5	#	ε	6	-	

Kopieren: Beispiel

Mit der Eingabe 0 1 0 ergibt sich folgende Berechnung:

$$0\,1\,0 \underset{0}{\rightarrow} \ast\,\#\,0\,1\,0 \underset{1}{\rightarrow} \ast\;0\,\#\,1\,0 \underset{2}{\rightarrow} 0\ast 0\,\#\,1\,0$$

$$\underset{(1)3}{\rightarrow} 0\;\ast\,0\,1\,\#\,0 \underset{4}{\rightarrow} 0\,1\;\ast\,0\,1\,\#\,0$$

$$\underset{1}{\rightarrow} 0\,1\;\ast\,0\,1\,0\,\# \underset{2}{\rightarrow} 0\,1\,0\;\ast\,0\,1\,0\,\#$$

$$\underset{(1,3)5}{\rightarrow} 0\,1\,0\;\ast\,0\,1\,0$$

Vor- und Nachteile von Markov-Algorithmen

- Markov-Algorithmen arbeiten auf einem sehr einfachen Niveau:
  - Nur reine Zeichenketten werden unterstützt
  - „Höhere“ Datentypen wie Zahlen werden nicht unterstützt, sondern müssen als Zeichenketten kodiert werden
  - Dadurch wird die Formulierung von Markov-Algorithmen aufwändig
  - Auch werden Markov-Tafeln für größere Alphabete schnell unhandlich, da in jedem logischen Schritt Fallunterscheidungen für alle Symbole notwendig werden können
- Andererseits kann der einzelne Bearbeitungsschritt leicht mit Standardoperationen des Datentyps `String` in gängigen Programmiersprachen umgesetzt werden:
  - Suchen des ersten Auftretens eines Teil-Strings und Ersetzen des Teil-Strings sind elementare String-Operationen
  - Markov-Interpreter können somit leicht realisiert werden

CHURCH'sche These

- Ausdrucksfähigkeit der verschiedenen Modelle
  - Leisten imperative Algorithmen mehr als Registermaschinen?

- Kann man Leistung von Algorithmenmodellen vergleichen?

Die Klasse der intuitiv berechenbaren Funktionen stimmt mit den formalen Klassen der (Registermaschinen-, imperativ, applikativ, Markov-, etc.) berechenbaren Funktionen überein.

(Diese These ist prinzipiell nicht beweisbar, da sich allein schon der Begriff „intuitiv“ nicht formal fassen lässt.)

Universelle Algorithmenmodelle

Ein Algorithmenmodell heißt universell, wenn damit alle berechenbaren Funktionen beschrieben werden können.

Eigenschaften universeller Sprachen (u. a. alle Programmiersprachen)

- Der nutzbare Bereich für Daten / Parameterwerte ist nicht beschränkt (hierfür reicht der Datentyp `integer` ohne Begrenzung durch ein `maxint` aus).
- Konzepte wie Rekursion oder Iteration (**`while`**) mit bedingten Sprüngen erlauben eine (bedingte und potentiell unendliche) Wiederholung von Teilaufgaben

- Satz: *Die Algorithmenmodelle applikative, imperative, Markov- und Registermaschinen-Algorithmen sind universell.*
  (Beweise solcher Aussagen werden in Vorlesungen zur Theoretischen Informatik behandelt)

Zusammenfassung

- Formale Modelle
  - Registermaschine
  - Abstrakte Maschinen
  - Markov-Algorithmen
- Ausdrucksfähigkeit: Church'sche These
- Literatur: Saake/Sattler: *Algorithmen und Datenstrukturen*, Kapitel 6