

„Lichtsimation: Stochastik und Dichteschätzung der 4D-Lichtfeldfunktion“

Dipl.-Ing. Sebastian Häring

*Volkswagen AG; Abteilung Technologie, Simulation und Strak
Brieffach 1582*

D – 38436 Wolfsburg

tel: +49-(0)5361/9-87335; fax: +49-(0)5361/9-57 87335

<mailto:Sebastian.Haering@volkswagen.de>

1. Einführung und Kurzfassung:

Bei der Lichtsimulation wird mit Hilfe von Raytracing die Ausbreitung von Licht bzw. Strahlung geschätzt. Es handelt sich dabei um eine Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der emittierten Photonen. Diese Funktion definiert das 4D Flächenlichtfeld von leuchtenden Objekten (jeweils zwei Dimensionen für Ort und Richtung).

Dieses Lichtfeld wird durch einzelne Photonen (Strahlen) bzw. deren Dichten repräsentiert. Es muss also eine Dichteschätzung der Photonen durchgeführt werden, um die lichttechnischen Größen zu bestimmen (z.B. Einzählen von Photonen in Raumwinkel-elemente). Wenn das vierdimensionale Lichtfeld derart projiziert wird, dass die Dimensionen der Richtung eliminiert werden, ist die Beleuchtungsstärke E bestimmbar. Zur Schätzung der Lichtstärke I muss die Originalverteilung um die Dimensionen des Ortes reduziert werden.

Bei der Entwicklung von Leuchten zu Leuchtzwecken wird es immer wichtiger, die Erscheinung mit zu berücksichtigen. Hierbei ist häufig die Homogenität ausschlaggebend, ein Beispiel dafür sind Lichtleiter. Homogenität der Erscheinung lässt sich per Simulation über die Homogenität der Leuchtdichteverteilung in die gewünschte Richtung beurteilen.

Für die Schätzung der Leuchtdichte L ist jedoch keine Dimensionsreduktion möglich. Daher muss die Dichteschätzung, anders als bei E und I , direkt im 4D-Raum erfolgen, was erheblichen Einfluss auf den Prozess der Simulation hat.

Dieser Beitrag beschreibt die Simulation der Lichtausbreitung als stochastisches nichtdeterministisches Verfahren und zeigt wichtige Aspekte bei der Auswertung der Simulationsergebnisse. Insbesondere wird das Problem der Dichteschätzung als Quelle für Unsicherheiten identifiziert. Hierbei wird gesondert auf das aus der numerischen Mathematik bekannte Problem „Fluch der Dimensionalität“ hingewiesen [Bel61].

Konkrete Verfahren zur Dichteschätzung werden vorgestellt und diskutiert. Hierbei wird speziell auf die Problematik der großen Datenmengen eingegangen.

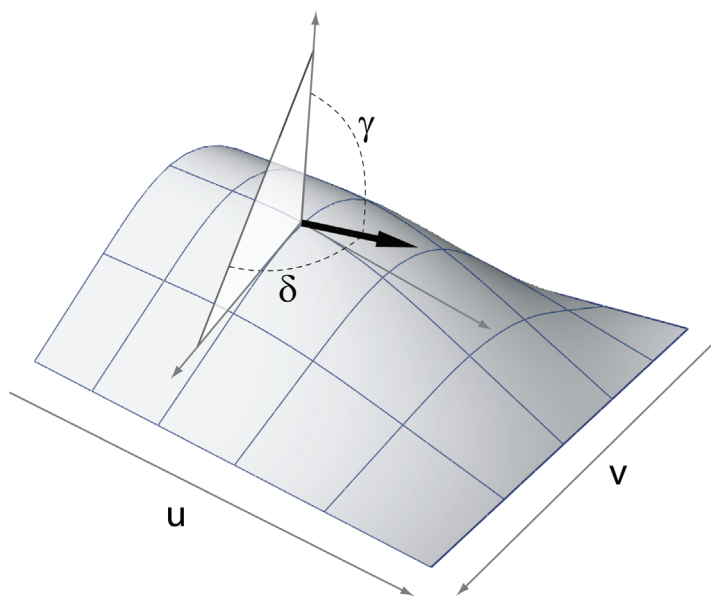
2. Das Lichtfeld:

Das Lichtfeld beschreibt, die ein leuchtendes Objekt umgebende elektromagnetische Strahlung (hier im sichtbaren Bereich des Spektrums). Um eine vereinfachte Betrachtung zu gewährleisten, wird oft lediglich der Teilchen- oder Korpuskelcharakter des Lichts bzw. der elektromagnetischen Strahlung für die Beschreibung zu Hilfe genommen. Hierbei geht man von Photonen aus, die von einem Emitter in einer bestimmten Verteilung abgegeben werden. Bezieht man die Verteilung auf eine Fläche, also eine konvexe Hülle um ein leuchtendes Objekt, ist es sinnvoll vom Flächenlichtfeld (engl: Surface Light Field) [Woo00] zu sprechen. Diese Konkretisierung vermeidet die Verwechslung mit dem Raumlichtfeld, welches den Raum direkt beschreibt [MoS81] [Ger31].

Das Flächenlichtfeld beschreibt die Verteilung der von einer Fläche in den Raum abgestrahlten Photonen. Es beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\text{photon}}(u, v, \gamma, \delta)$ (engl.: pdf - probability density function). Die Verteilungsinformation bzw. Abstrahlcharakteristik ist jedoch nur in Kombination mit dem Gesamtlichtstrom Φ_{total} bzw. Gesamtstrahlungsfluss ausreichend für die Beschreibung des Flächenlichtfeldes (auf die Betrachtung des Spektrums wird hier der Einfachheit halber verzichtet).

$$\text{Flächenlichtfeld} = f_{\text{photon}}(u, v, \gamma, \delta) \cdot \Phi_{\text{total}} \quad \text{mit} \quad \int \int \int \int_{\delta \gamma v u} f_{\text{photon}}(u, v, \gamma, \delta) du dv d\gamma d\delta = 1$$

Die Fläche bzw. das Volumen unter der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist immer 1. Das Flächenlichtfeld ist eine vierdimensionale Funktion. Zwei Dimensionen, u und v , beschreiben



die Oberfläche (räumliche Dimensionen) und zwei Dimensionen, δ und γ , beschreiben die Richtung der Abstrahlung von jedem Punkt $P(u, v)$. δ und γ bilden somit die zwei Richtungsdimensionen. Der Gesamtlichtstrom ist ein Skalierungsfaktor, um die vom Flächenlichtfeld abgeleiteten Größen zu quantisieren [Cut97] [Nga87].

Abbildung 1: Parametrisierung des Flächenlichtfeldes durch den Polar- oder Breitenwinkel γ und durch den Azimut- oder Meridianwinkel δ

3. Simulation des Lichtfeldes:

In der Entwicklung von lichttechnischen Bauelementen und Baugruppen werden häufig Aussagen über die lichttechnischen Eigenschaften benötigt. Hierbei bedient man sich der Methode der Lichtsimulation. Bei der Lichtsimulation werden die Ausbreitungspfade von einer Vielzahl virtueller emittierter Photonen strahlförmig durch ein optisches System verfolgt und das so lange, bis alle emittierten Photonen entweder absorbiert wurden oder die konvexe Hüllfläche, die Bezugsfläche des Flächenlichtfeldes, erreicht haben. Dabei werden die Photoneninteraktionen mit Materie, wie Brechung, Reflexion und Absorption nach dem Prinzip der Geometrischen Optik berechnet. Bei der Emission von n Photonen repräsentiert jedes Photon genau ein n -tel des Gesamtlichtstromes des Emitters. Somit lässt sich der Gesamtlichtstrom des Gesamtsystems, z.B. der Leuchte, durch Zählen der aus dem System tretenden Photonen bestimmen. Alle übrigen Photonen wurden entsprechend der Reflexionseigenschaften der Materialien des Systems stochastisch absorbiert und somit nicht weiterverfolgt. Die Gesamtheit der aus dem System tretenden Photonen stellen eine Menge zufällig ausgewählter Photonen dar, die der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion also dem Lichtfeld entsprechen, das simuliert werden soll. Ein solcher Prozess der Lichtsimulation wird als nichtsequenzielles Photontracing oder Raytracing bezeichnet. Man kann Lichtsimulation auch dadurch beschreiben, dass das Lichtfeld der Lichtquelle durch das optische System gefiltert wird und ein neues verändertes Gesamtlichtfeld entsteht. Somit ist z.B. ein Scheinwerfer ein nichtlineares Filter, dessen Eigenschaften mittels geschickten Versuchs (Monte-Carlo-Methoden) nachvollzogen werden.

Um lichttechnische Größen des Systems und damit Aussagen über dessen Performance zu gewinnen, muss das simulierte Lichtfeld ausgewertet werden. Lichttechnische Größen werden über Projektion und Dichteschätzung bestimmt.

4. Projektion des Lichtfeldes am Beispiel des Linienlichtfeldes:

Die Lichtfeldfunktion und somit die bestimmende Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist vierdimensional. In der Praxis werden die das Lichtfeld repräsentierenden simulierten Strahlen jedoch durch 6 Parameter beschrieben. Der Durchstoßpunkt eines Photons durch die Basisfläche des Flächenlichtfeldes wird mit drei Koordinaten x , y und z kartesisch definiert. Die Richtung, also der Impuls des Photons, wird ebenfalls durch 3 Parameter, den Richtungsvektor im Kartesischen Koordinatensystem, beschrieben. Dies bedeutet jedoch nicht, dass die Photonenwahrscheinlichkeitsdichtefunktion in diesem Falle eine sechsdimensionale Entität ist. Tatsächlich sind 2 von den 6 Dimensionen redundant. So kann einerseits die dreidimensionale Richtungsbeschreibung in die Polarwinkel δ und γ umgerechnet werden und andererseits können die Koordinaten des Ortes im Raum auch durch eine 2D-Parametrisierung u und v der Oberfläche der Basisfläche ersetzt werden. Dieser Fakt ist nachfolgend bei der Betrachtung der Dichteschätzung von immenser Bedeutung, siehe Abschnitt 8.

Um das Prinzip der Projektion des Flächenlichtfeldes zu erläutern, wird an dieser Stelle, analog zu [Här07], das Linienlichtfeld eingeführt. Es ist zweidimensional und lässt sich daher

gut visualisieren. Das Linienlichtfeld kann als Schnitt durch die Oberfläche des Flächenlichtfeldes verstanden werden, wobei die Richtungscharakteristik rotationssymmetrisch ist. Das bedeutet, dass sich der Ort mit nur einem Parameter, der Länge x entlang der Schnittlinie, beschreiben lässt und die Richtungskomponente auch nur von dem Breitenwinkel γ abhängt. Abbildung 2 zeigt die zweidimensionale Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion einer lambertsch abstrahlenden Linie.

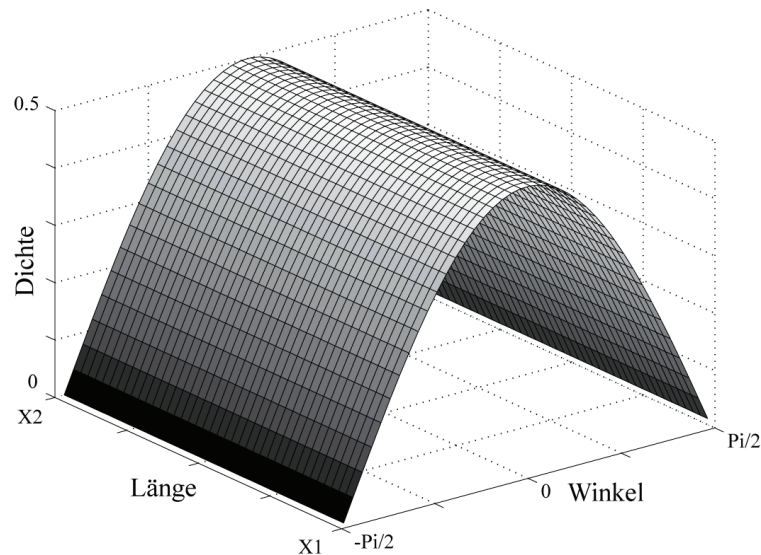


Abbildung 2: Visualisierung eines Linienlichtfeldes (Wahrscheinlichkeitsdichte) mit isotroper Richtungsabstrahlcharakteristik

Jedes Photon, das der Verteilung eines solchen Linienlichtfeldes entspricht, lässt sich nun als Punkt in einem zweidimensionalen Diagramm darstellen, Abbildung 3 (links). Um nun äquivalent zum vierdimensionalen Flächenlichtfeld eine Art Beleuchtungsstärke des Linienlichtfeldes zu bestimmen, muss die Photonendichte in der Ortsdomäne bestimmt werden, Abbildung 3 (mitte). Hierzu werden alle Photonen des Linienlichtfeldes derart projiziert, dass die Richtungsdimension wegfällt. Für die Bestimmung der Lichtstärke des Linienlichtfeldes wird die Projektionsrichtung so verändert, dass alle Ortsinformation verworfen wird, Abbildung 3 (rechts).

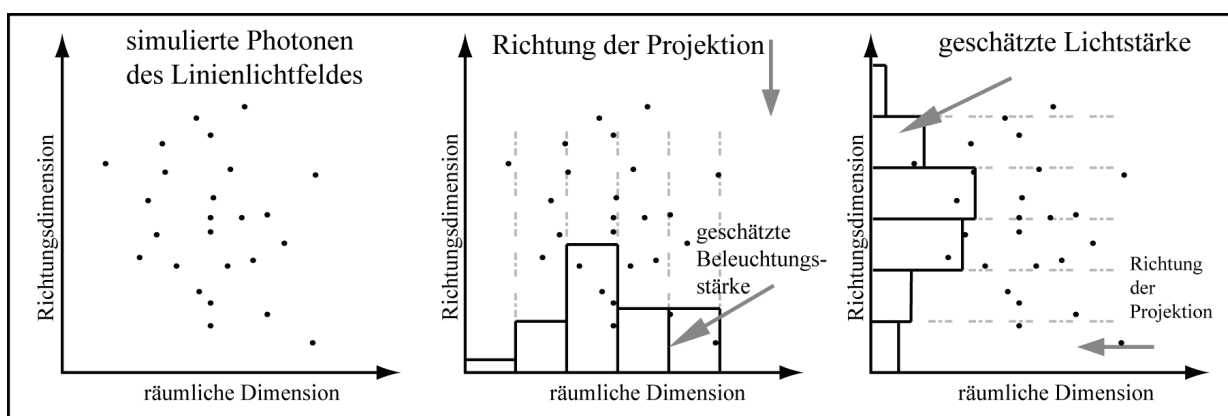


Abbildung 3: Projektion der Photonen des Linienlichtfeldes (links) zur Eliminierung der Richtungsdimension (mitte) und zur Bestimmung der Lichtstärke (rechts)

Die Schätzung der lichttechnischen Größen Beleuchtungsstärke und Lichtstärke ist somit im Falle des 2D Linienlichtfeldes eine eindimensionale/univariate Dichteschätzung. Äquivalent dazu handelt es sich bei dem 4D Flächenlichtfeld um eine zweidimensionale/bivariate Dichteschätzung dieser lichttechnischen Größen. Auf die Bestimmung der Leuchtdichte wird in Abschnitt 7 eingegangen.

5. Dichteschätzung zur Bestimmung der Dichtefunktion:

In der Natur würde ein Temperaturstrahler mit konstantem Spektrum und $350W$ elektrischer Leistung mit einem spektralem Fluss von $78.8mW/nm$ im sichtbaren Spektralbereich $\approx 9 \cdot 10^{19}$ Photonen/Sek emittieren. Würde es sich bei dieser Lampe um eine lambertsch abstrahlende Kugel handeln, würde ein Photometer mit einem Sensordurchmesser von $1.5cm$ in einem Abstand von 100 Metern noch ca. $3.5 \cdot 10^{11}$ Photonen/Sek empfangen.

Für aktuelle Simulationen ist unter Berücksichtigung praktischer Aspekte eine Simulation mit 250 Millionen Photonen denkbar. Diese Anzahl würde dem Betrieb der oben beschriebenen Lampe mit der Dauer von $2.7 \cdot 10^{-12} Sek = 2.7Pikosek$ entsprechen. Ein virtuelles Photometer mit den gleichen Parametern wie oben, würde theoretisch im Durchschnitt ca. 1 Photon aus der Simulation empfangen, was keine Wertebestimmung zuließe.

Durch die eingeschränkte Anzahl der simulierbaren Photonen muss, anders als bei der gängigen lichttechnischen Messung, auf Unsicherheiten durch die Photonenzahl eingegangen werden. Von den photonentechnischen Größen wie Photonenzahl, Photonenstrahlstärke und Photonenstrahldichte kann unter Berücksichtigung der statistischen Unsicherheiten auf die energetischen und lichttechnischen Größen geschlossen werden. [Gal04]

Im Beispiel der Projektion der Dichtefunktion aus Abschnitt 4 wird in Abbildung 3 (mitte und rechts) das Histogramm als Dichteschätzer verwendet. Es ist der einfachste und meist verwendete Dichteschätzer.

Nach der Simulation liegt ein Satz von simulierten Photonen $X_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ entsprechend der unbekannten Dichtefunktion $f(x)$ vor. Mit Hilfe des Histogramms soll aus X_i die geschätzte Dichtefunktion $\hat{f}_h(x)$ ermittelt werden. Bei dem Histogrammdichteschätzer wird der Wertebereich in k gleichgroße Teilintervalle (Bins) unterteilt und jedes Photon X_i entsprechend seiner Koordinaten in das zugehörige k -te Bin eingezählt. Die Dichte wird dann mit Hilfe der Einzahlsumme v_k für das k -te Bin nach folgender Formel bestimmt:

$$\hat{f}_h(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{v_k}{h} \quad \text{mit } h \text{ als Bandbreite des Bins.}$$

Genauer wird das Histogramm in [Här07] beschrieben.

Für die Schätzung der Beleuchtungsstärke E wird die gewünschte Fläche in Zellen (Bins) unterteilt und die Photonen eingezählt. Über die Kenntnis der Zellengröße und den Lichtstromanteil, den jedes Photon trägt, lässt sich die Photonenbestrahlungsstärke schätzen und die Beleuchtungsstärke E ableiten. Bei der Lichtstärke wird die Kugel segmentiert und

die Photonen eingezählt. Durch die Kenntnis des Raumwinkels eines jeden Kugelsegmentes kann die Photonenstrahlstärke geschätzt und die Lichtstärke abgeleitet werden.

Im Automobilbau ist die Schätzung der Lichtstärke ein wichtiger Aspekt bei der Dimensionierung von Bauteilen zu Leucht- und Beleuchtungszwecken. Daher wird an dieser Stelle besonders auf die Lichtstärke eingegangen und Verbesserungen werden aufgezeigt.

6. Dichteschätzung in den Richtungsdimensionen (z.B. Lichtstärke):

Die Dichte von Photonen muss entsprechend ihrer Richtung geschätzt werden, um z.B. Aussagen über die Lichtstärke zu erhalten. Im Falle des üblicherweise verwendeten Histogramms entsteht neben ungleich großen Bins das Problem der Polbildung bei der Parametrisierung über den Meridian- und Breitenwinkel. Abbildung 4 zeigt die Segmentierung der Richtungsdimension durch einheitlich große Winkelsegmente, erstmalig durch Mercator beschrieben (Kartograph, 16.Jahrh.).

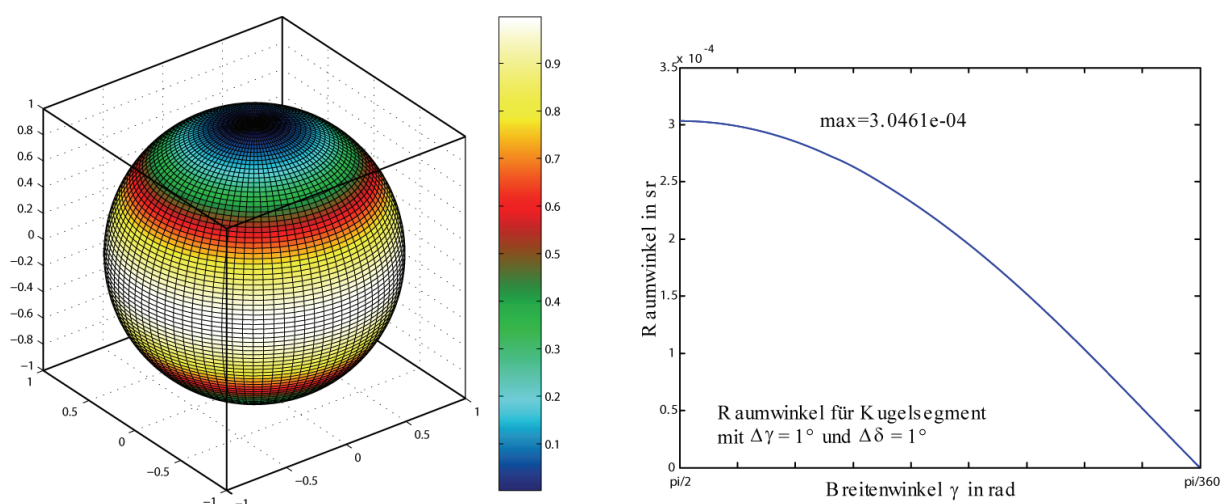


Abbildung 4: Herkömmliche winkeltreue Zylinderprojektion der Kugeloberfläche nach Mercator (Diskretisierung in Winkelsegmente von Meridian- und Breitenwinkel; Kugel mit aufgetragenem relativen Raumwinkel (links); Verlaufs des Raumwinkels für ein Winkelsegment $\Delta\gamma = 1^\circ$ vom Äquator hin zum Pol (rechts))

Diese Form der Segmentierung der Kugel hat jedoch den Nachteil, dass der von jedem Segment umschlossene Raumwinkel mit dem Kosinus hin zu den Polen abnimmt (Singularitäten). Damit ist das in der Abwicklung scheinbar gleichförmige zweidimensionale Histogramm tatsächlich sehr verzerrt. Betrachtet man Lichtstärkeverteilungskörper, bei denen das Interesse auf einen kleinen Bereich der Sphäre beschränkt ist, kann das polare Koordinatensystem so orientiert werden, dass die Pole nicht stören. Es gibt jedoch eine Vielzahl von Anwendungen, bei denen dies nicht möglich ist, wie z.B. goniometrische Messungen im Nahfeld, bei denen der Messaufbau statisch ist. Um diese Nachteile zu umgehen, wird hier das Prinzip der Geodätischen Kuppel (engl.: Geodetic Sphere oder HTM-Hierarchical Triangle Mesh) [KuST01] für die Schätzung der Lichtstärke empfohlen, vgl. [Här07]. Hierbei wird ein Oktaeder oder ein anderer Platonischer Körper derart rekursiv unterteilt, dass jede

Dreiecksfläche in gleich große Teildreiecke zerlegt wird. Die neu entstandenen Eckpunkte werden anschließend auf die Kugel projiziert und die Unterteilung beginnt von Neuem. In Abbildung 5 ist dieser Vorgang am Beispiel eines Oktaeders aufgezeigt, dessen Dreiecksflächen in diesem Fall sieben Mal rekursiv unterteilt wurden. In Tabelle 1 wird diese Struktur mit einer herkömmlichen nach Winkeln unterteilten Kugel verglichen. Deren maximale Raumwinkel liegen auf dem Äquator und dienen hier zum Vergleich als obere Auflösungsgrenze.

Prinzip Geodätische Kuppel	Subdiv.-Oktaeder Level 7	entspr. Winkelsphäre mit $\Delta \delta = \Delta \gamma$
min. Raumwinkel pro Dreieck	0.7531e-04 sr	$\Delta \delta = 0.2472^\circ$
max. Raumwinkel pro Dreieck	1.5757e-04 sr	$\Delta \delta = 0.5172^\circ$
durchschn. Raumwinkel pro Dreieck	0.9578e-04 sr	$\Delta \delta = 0.3144^\circ$
Anz. Zellen bei durchschn. Raumw.	$8*4*4*4*4*4*4 = 131072$	$1145*573 = 656085$

Tabelle 1: Vergleich charakteristischer Merkmale des Subdivision-Oktaeder mit der herkömmlichen Diskretisierung der Kugeloberfläche durch Polarwinkelsegmente

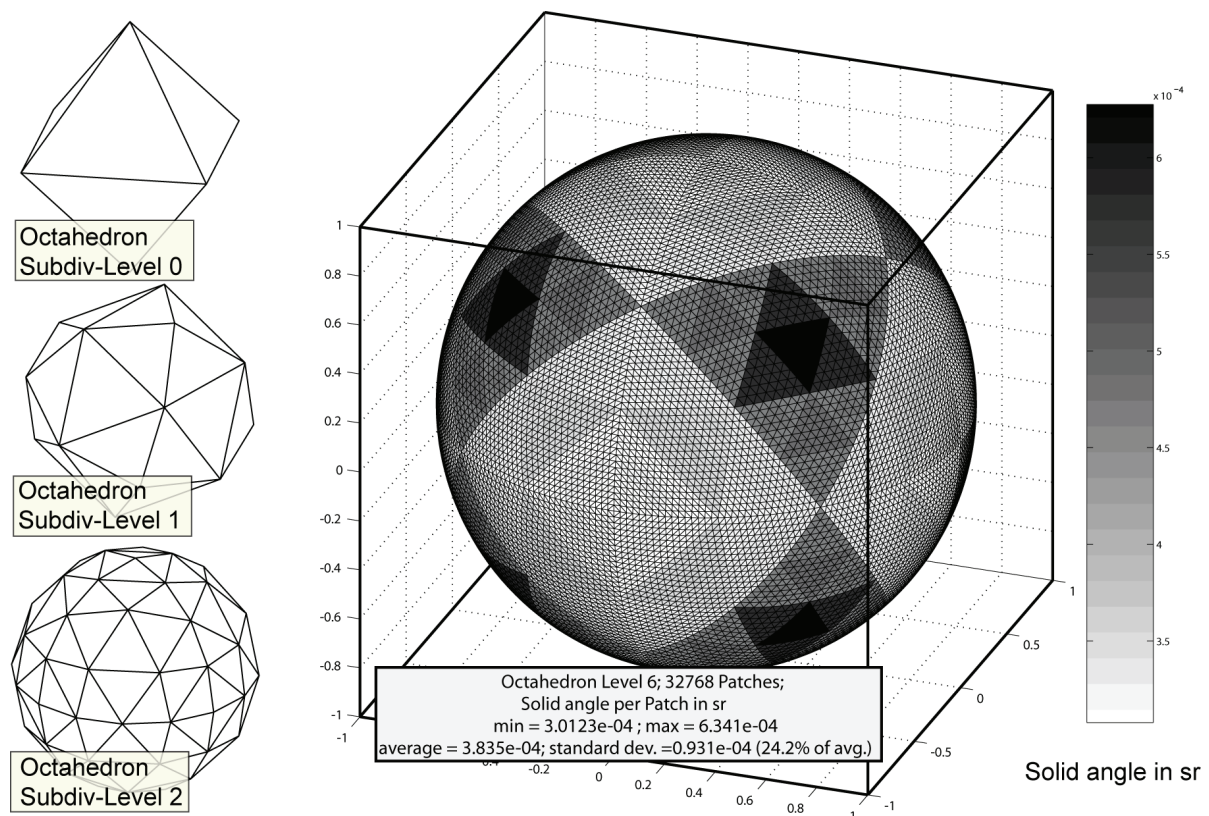


Abbildung 5: 6-fach rekursiv unterteilter Oktaeder (Subdivision-Oktaeder) als Diskretisierung der Kugeloberfläche ohne Pole (Singulartitäten)

In Abbildung 6 sind als Test drei überlagerte Lichtstärkeverteilungskörper dargestellt. Zwei sind sehr hochfrequent und anisotrop. Der dritte Verteilungskörper ist isotrop und niederfrequent. In der Abwicklung scheint die linke Verteilung sehr verrauscht und extrem verzerrt. Dies ist der Tatsache geschuldet, dass sie sich in unmittelbarer Nähe zum Pol befindet.

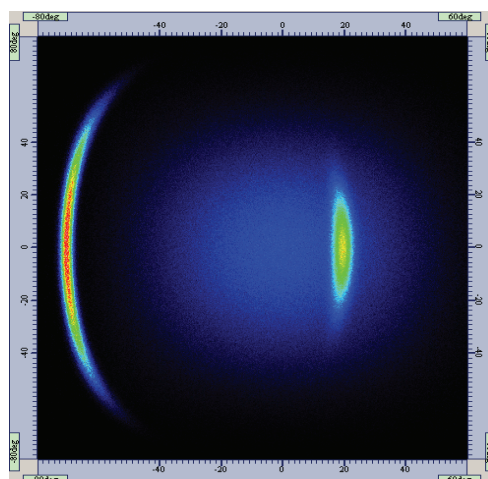


Abbildung 6: winkeltreue Zylinderprojektion der Kugeloberfläche nach Mercator (latitude-longitude); hier: bivariates Histogramm als Dichteschätzer von 3 synthetischen sich überlagernden Lichtstärkeverteilungskörpern

Im Gegensatz dazu werden bei der Einzählung gleicher Anzahl von Strahlen (ca. 10 Millionen) in die Subdivison-Oktaeder-Struktur die Phänomene Verzerrung und vergrößertes Rauschen nicht sichtbar. Abbildung 7 (links) zeigt die Anzahl der eingezählten Strahlen und in Abbildung 7 (rechts) ist mit Kenntnis des Raumwinkels eines jeden Dreiecks die Lichtstärke bestimmt worden. Bei dieser Darstellungsform lassen sich weiterhin sehr leicht nur diese Dreiecke bzw. Lichtstärkepunkte speichern, die tatsächlich Lichtstromanteile tragen, oder die über einem sehr kleinen Schwellenwert liegen. In diesem Beispiel wurde die zweite Hemisphäre nicht mit gespeichert, auch wenn potentiell ausschließbare Bereiche nicht Achsenparallel begrenzbar sind.

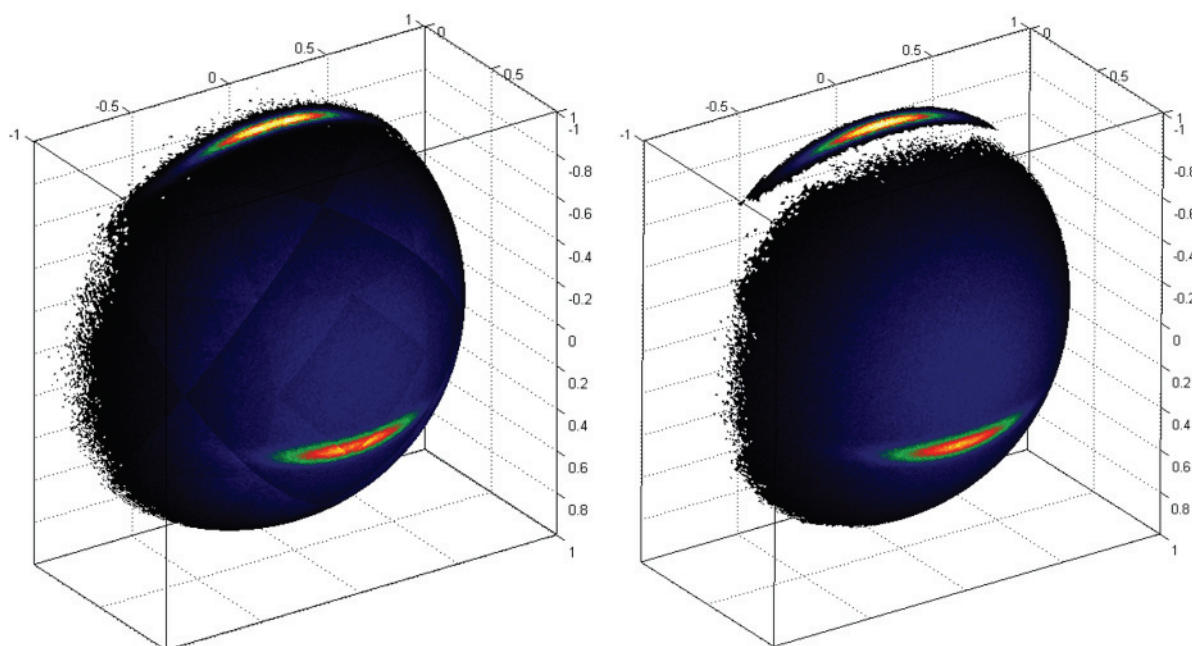


Abbildung 7: Dichteschätzung von Photonen aus synthetisch generierten Verteilungen; Anzahl der Strahlen pro Patch (links), Division durch den Raumwinkel pro Patch (rechts)

Ein weiteres Beispiel ist der geschätzte Lichtstärkeverteilungskörper eines Scheinwerfers aus Abbildung 8. An diesem Fall werden zwei Aspekte deutlich. Der erste Punkt ist die Auflösung des Histogramms, welche in diesem Fall nicht ausreichend klein gewählt wurde. Je feiner die Details und je größer die Gradienten der Verteilung sind, je feiner muss das Histogramm aufgelöst werden. Genauer gesagt, muss nach dem Nyquist-Shannon Abtasttheorem die Abtastfrequenz in der Richtung, also die Größe der Bins (Bin: Balken des Histogramms), mindestens halb so groß sein, wie die maximale Frequenz der Verteilung. Durch die Reduzierung der Bin-Breite h des Histogramms, wird schnell Rauschen erzeugt, siehe [Här07]. Fraglich ist in dem Fall einer moderaten Anzahl von simulierten Photonen, was genau Signal und was Rauschen ist.

Der zweite Aspekt ist hier die Kontur der Bins. Es handelt sich bei dem Subdivision-Oktaeder ausschließlich um Dreiecke. Im digitalen Zeitalter hat sich die menschliche Wahrnehmung bereits auf viereckige Artefakte (z.B. bei dem Histogramm von Abbildung 15) und entsprechende Unstetigkeiten eingestellt. Bei der vorliegenden Richtungsbeschreibung wird jedoch die dreieckige Struktur stark sichtbar, als störend empfunden und als ungenau eingeschätzt. Daher müsste eine solche Struktur sehr stark verfeinert werden, um einen glatten Verlauf wahrzunehmen, was wiederum das Rauschen verstärken würde. Um den Unstetigkeiten dieses Histogramms zu begegnen, kann das Frequenzpolygon (Abkz.: FP) als Dichteschätzer zu Hilfe genommen werden.

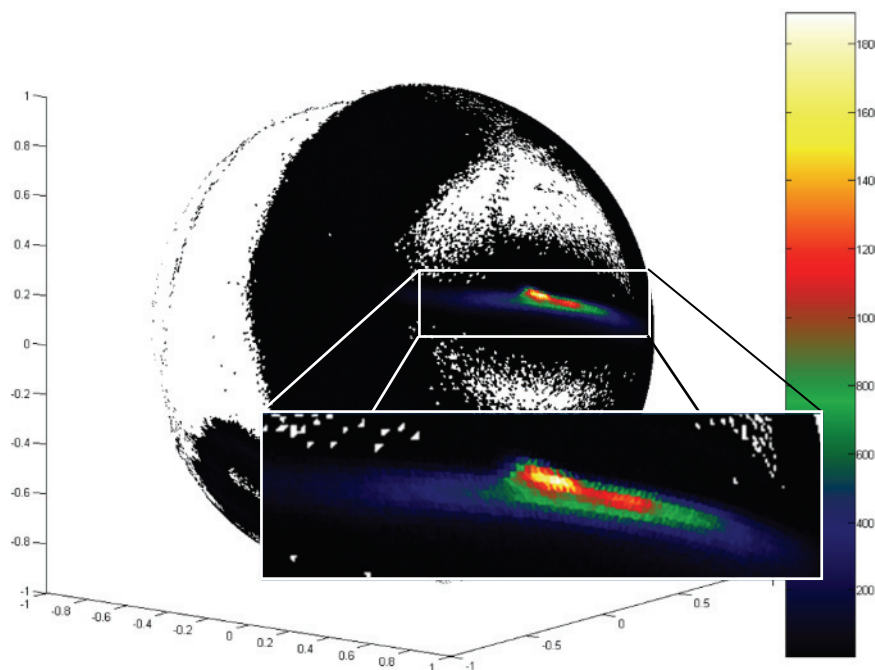


Abbildung 8: relativer Lichtstärkeverteilungskörper eines Scheinwerfers - Dichteschätzung mit Hilfe des Subdivisions-Oktaeder aus 1 Million Photonen

6.1 Frequenzpolygon:

Das Frequenzpolygon stellt eine stückweise lineare Interpolation zwischen den Mittelpunkten des Histogramms dar. Abbildung 9 zeigt den Verlauf des Histogramms und des Frequenzpolygons im Vergleich.

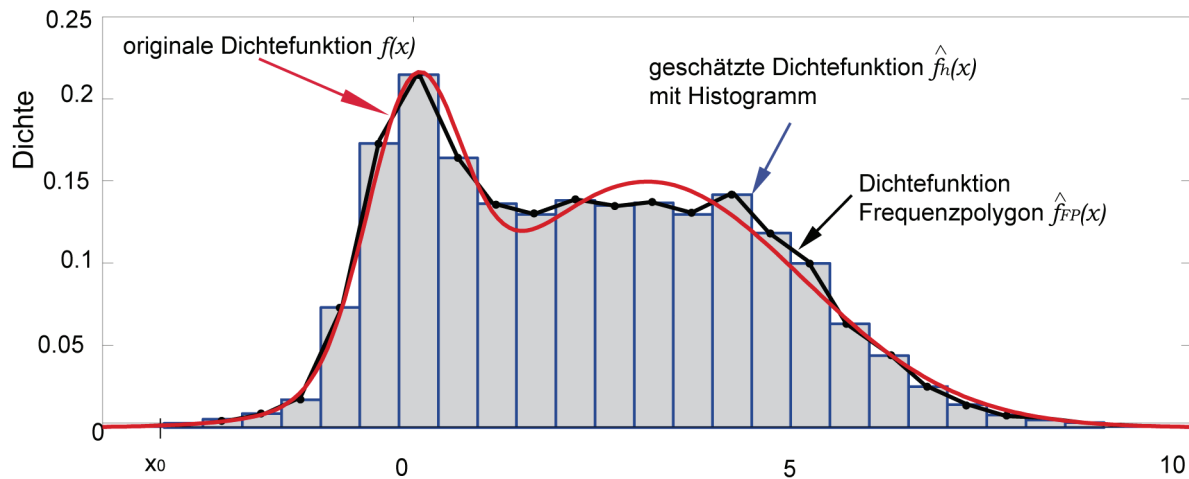


Abbildung 9: Dichtefunktion (rot), ausgehend von 4000 Stichproben der Dichtefunktion generiertes Histogramm (blaue Balken) und Frequenzpolygon (schwarze Polylinie)

Um Dichteschätzer vergleichen zu können, wie in diesem Fall das Histogramm mit dem Frequenzpolygon, kann nicht von realen Verteilungen ausgegangen werden, sondern Kenngrößen müssen verglichen werden. Die wichtigste Kenngröße ist der Integrierte Mittlere Quadrierte Fehler (*MISE* = Mean Integrated Squared Error), basierend auf dem *MSE*:

$$MSE\{\hat{f}_h(x)\} = E\left[\left\{\hat{f}_h(x) - f(x)\right\}^2\right] = Var\{\hat{f}_h(x)\} + [Bias\{\hat{f}_h(x)\}]^2$$

mit *MSE* als Mean Squared Error, *E* als Erwartungswert, *Var* als Varianz und *Bias* als systematische Unsicherheit, siehe [Här07].

$$MISE(\hat{f}_h) = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\hat{f}_h(x) - f(x)\right\}^2 dx\right] = \int_{-\infty}^{\infty} MSE\{\hat{f}_h(x)\} dx$$

Bei dem *MISE* ist das grundsätzliche Konvergenzverhalten für diese und andere Größen relevant. Weiter führende Details sind [Sco92], [Sil86], [Här04], [Gen05] zu entnehmen. Die Abbildung 10 (links) zeigt logarithmisch aufgetragen das Konvergenzverhalten des *MISE* bei gleichzeitiger optimaler Bin-Breite h_{opt} . Für das Histogramm hat der *MISE* abhängig von n , der Anzahl der Einzeleignisse, ein Wachstumsverhalten von $O(n^{-2/3})$, das Frequenzpolygon dagegen jedoch $O(n^{-4/5})$. Dies zeigt deutlich, dass bei der Erhöhung der Photonenzahl der Fehler viel schneller sinkt bzw. konvergiert als beim Histogramm. Praktisch kann die Genauigkeit eines Dichteschätzers unter Umständen nur durch die

Verbesserung des Konvergenzverhaltens erhöht werden. Dies ist z.B. der Fall, wenn der Schätzwert extrem langsam zum Erwartungswert konvergiert und lediglich eine mögliche Vertausendfachung der Versuchszahl eine signifikante Verbesserung des Schätzwertes erreicht.

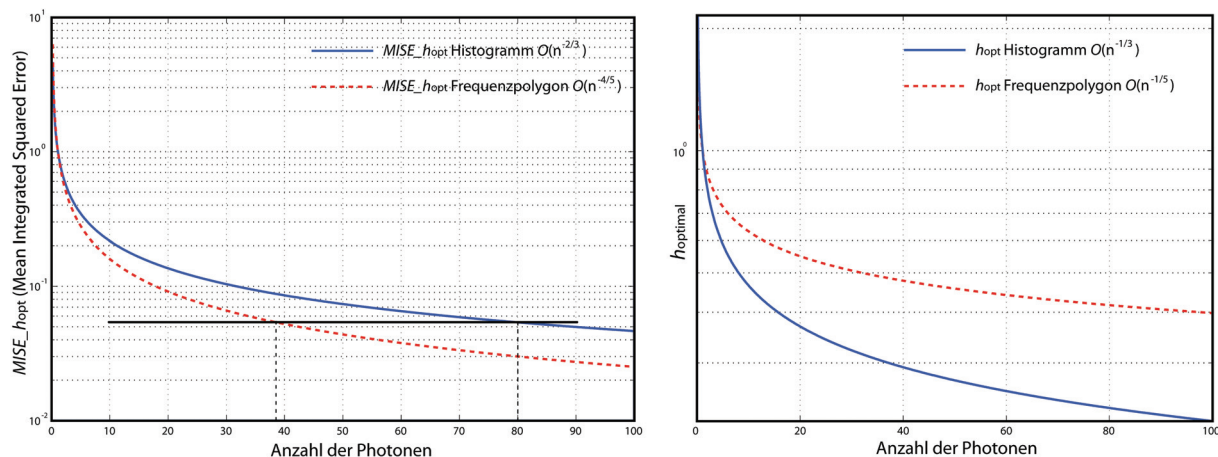


Abbildung 10: Vergleich des Konvergenzverhaltens des *MISE* (Mean Integrated Squared Error) (links) und der optimalen Band- bzw. Binweite (rechts) von Histogramm und Frequenzpolygon in Abhängigkeit von der Summe der Einzählereignisse (hier Photonen)

6.2 Voronoi-Region als Bin-Shape:

Um das Frequenzpolygon für ein Histogramm der Kugel zu bilden, muss der Aspekt der Bin-Kontur diskutiert werden. In [Sco92] werden die Möglichkeiten für die Form des bivariaten (zweidimensionalen) Histogramms aufgezeigt. Da es sich bei der Dichteschätzung in der Richtung um eine zweidimensionale Dichteschätzung handelt, ist es möglich die Konturen zu übertragen. Abbildung 11 zeigt die Verbindung der ursprünglichen Dreieckskontur zur hexagonalen Kontur, welche laut [Sco92] die beste Form darstellt. Da die den Hexagonen zu Grunde liegende Dreiecksstruktur nicht vollkommen einheitlich ist, weist auch die hexagonale Struktur eine Varianz des Raumwinkels pro Dreieck auf.

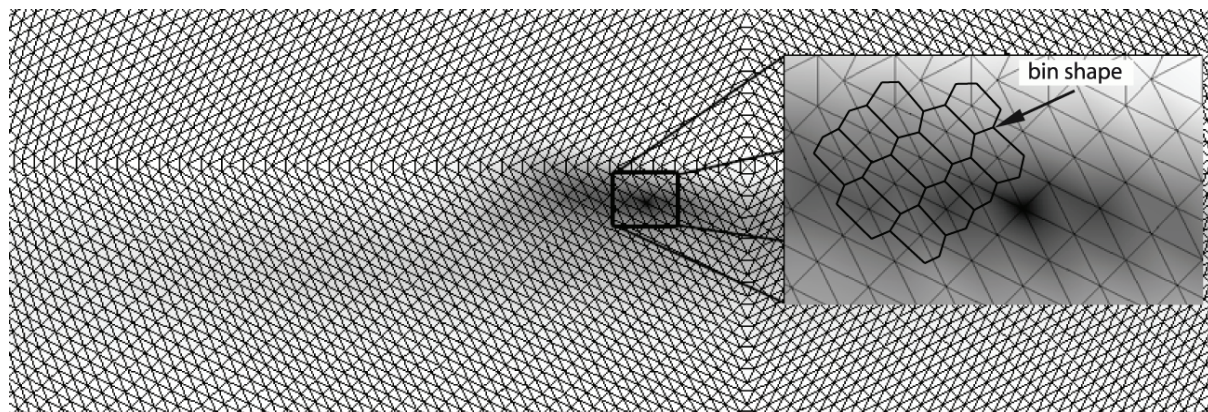


Abbildung 11: Ableitung der hexagonalen Bins des zweidimensionalen Histogramms von den Eckpunkten des Dreiecksnetzes des Subdivision-Oktaeders

Abbildung 12 zeigt eine Vollsphäre mit hexagonaler Struktur auf der Basis eines vierfach rekursiv unterteilten Ikosaeders. Ein Ikosaeder ist einer der Platonischen Körper mit zwanzig kongruenten gleichseitigen Dreiecken als Hüllfläche. Die Struktur besteht unabhängig von dem Rekursionslevel ausschließlich aus Sechsecken und 12 Fünfecken (ehemalig die Ecken des Ikosaeders). Jedes Hexagon mittelt über den Raumwinkel der Basisdreiecke aus den es sich zusammensetzt. Daher ist auch die Varianz über die gesamte Struktur geringer und sie entspricht eher einem Histogramm mit gleich großen Bins.

Um nun das Frequenzpolygon der Kugel zu generieren, müssen die Mittelpunkte der Bins linear interpoliert werden. Dies ist durch eine Darstellung des Basisdreieckgitters möglich, bei dem jeder Eckpunkt die entsprechende Lichtstärke des zugehörigen Hexagons enthält. Das Dreieck selber wird dann interpoliert ausgewertet bzw. dargestellt.

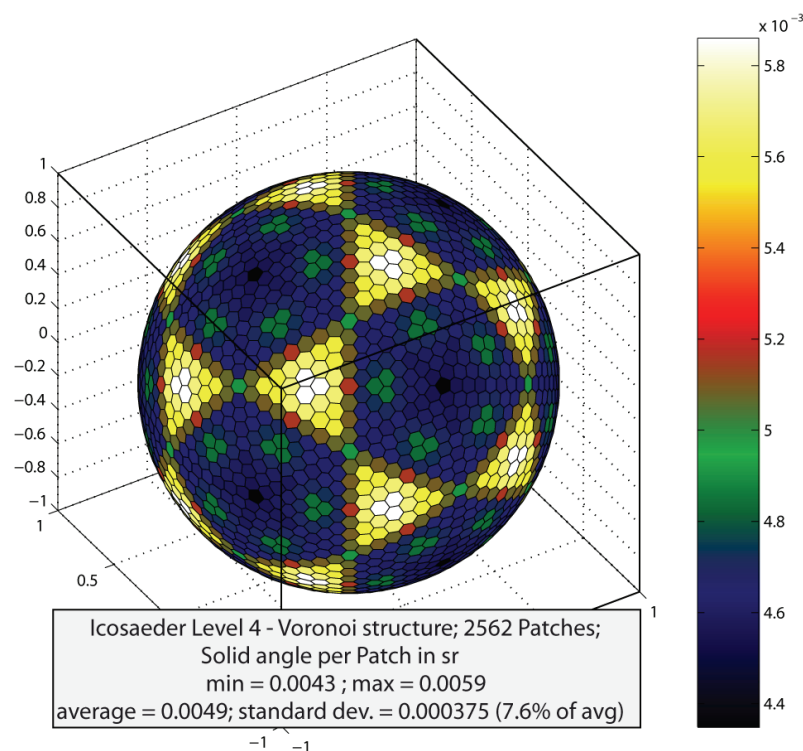


Abbildung 12: Subdivision Kugel rekursiv unterteilt mit Level 4 auf Basis des Ikosaeders; Hexagonale Struktur (Voronoi-Regionen um Vertices des Ikosaeder-Basis-Gitters) mit Angabe der Raumwinkel pro Patch

Abbildung 13 und Abbildung 14 zeigen eine solches Frequenzpolygon auf Basis eines Subdivisions-Ikosaeder und den entsprechenden hexagonalen Bins. Hier ist eine Dichteschätzung zur Bestimmung der Lichtstärke von einer H4-Abblendlicht-Funktion (Messung zur Verfügung gestellt von der Firma TechnoTeam) aus 100 Millionen Strahlen durchgeführt worden. Die hexagonalen Bins stellen die Voronoi-Zelle um jeden Eckpunkt des Basis-Gitters (Polyhedron) dar. Die Voronoi-Zelle ist als Punktemenge $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ definiert, die eine Ebene (hier Kugeloberfläche) in Gebiete gleicher nächster Nachbarn unterteilt, siehe dazu [Auren91]. Für einen Punkt p_i ist demnach die Voronoi-Region die Menge aller Punkte, die näher zu p_i als zu jedem anderen Punkt p_j sind.

Bei dieser Form der Auswertung und Darstellung sind keine dreieckigen Artefakte auszumachen. Die Varianz ist bei gleicher Anzahl von Bins im Vergleich zum Histogramm kleiner. Auch können hier wiederum nur die Daten gespeichert werden, die ungleich Null sind.

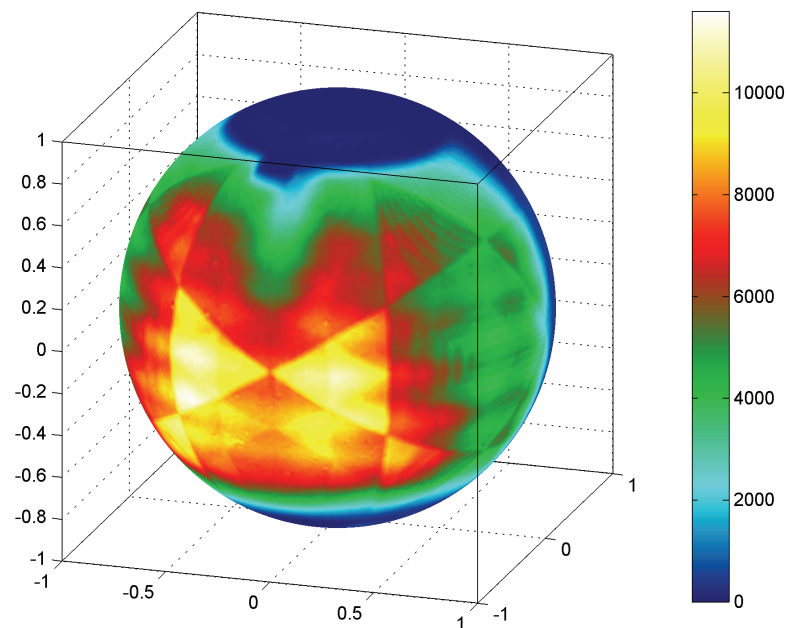


Abbildung 13: Dichteschätzung der eingezählten Strahlen einer H4 (low-beam-function) in Ikosaeder-Frequenzpolygon basierend auf Ikosaeder Subdiv-Level 6 (40962 Patches); Ausgang: 100 Millionen Photonen aus Nahfeldmessung (Fa. TechnoTeam)

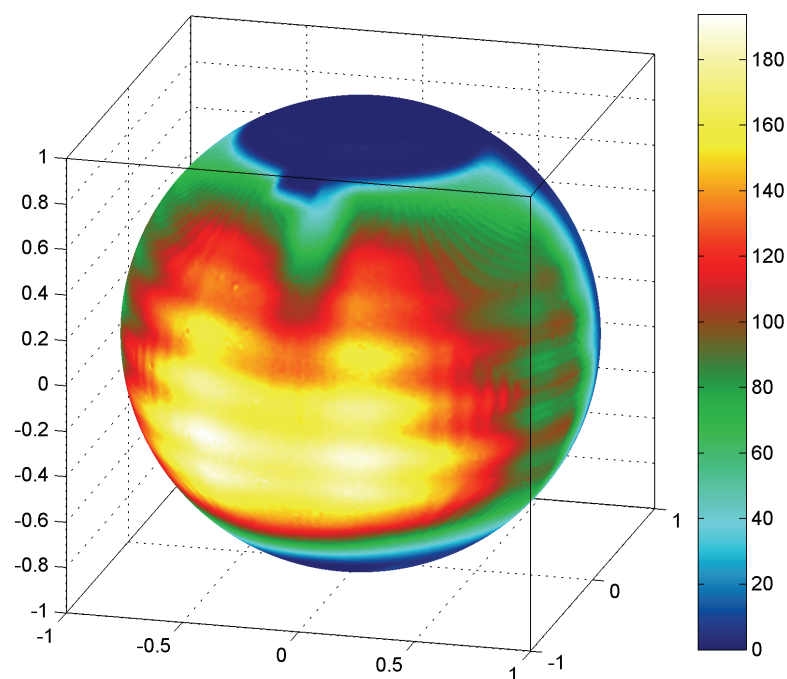


Abbildung 14: Schätzung der Lichtstärke einer H4 (low beam function) in Ikosaeder-Frequenzpolygon basierend auf Ikosaeder Subdiv-Level 6 (40962 Patches); Ausgang: 100 Millionen Photonen aus Nahfeldmessung (Fa. TechnoTeam) (Hinweis: Moiré-Effekt entsteht durch Überlagerung der Abtastfrequenz der Messung und Frequenz der Bins auf der Kugel)

6.3 Adaptives Voronoi-Frequenzpolygon durch Vektorquantisierung:

Um die Nachteile des Histogramms zu umgehen wird hier ein weiteres Verfahren zur Optimierung des Histogramms bzw. des Frequenzpolygons aufgezeigt, das im Zuge dieser Untersuchungen entwickelt wurde. Es ist möglich, nicht die Bin-Größe des Histogramms gleich groß zu halten, sondern die Varianz zu vereinheitlichen. Dabei handelt es sich um ein zweistufiges Verfahren, bei dem in einem ersten Dichteschätzungsschritt (engl.: pilot estimator) grob die Dichte geschätzt wird, um daran das adaptive Histogramm zu bilden. Hierbei findet die Methode der Vektorquantisierung Anwendung [GeG91].

Mit Hilfe der Vektorquantisierung, wird ein Basis-Gitter generiert, was entsprechend des auszuwertenden Lichtfeldes fein oder grobmaschig ist und nicht rekursiv durch Unterteilung der Flächen eines Platonischen Körpers entsteht.

Bei der Vektorquantisierung wird eine Menge q von Eingabevektoren $X_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ (in diesem Fall: Photonenrichtungen) zu einer Anzahl m Prototypen zusammengefasst und somit quantisiert. Mittels der Funktion $q(x_i) \rightarrow k_i$ wird dem Eingabevektor x_i der Index k_i des besten Prototypen P_i zugewiesen. Somit generiert die Vektorquantisierung aus den Eingabevektoren X_i eine Menge von Prototypen $\{P_1, P_2, \dots, P_m\}$, das so genannte Codebuch. Das Codebuch entspricht in diesem Falle den Eckpunkten des Basis-Gitters, was Grundlage für das Voronoi-Bin (Voronoi-Region) ist und gleichzeitig den Mittelpunkt des Bins für die lineare Interpolation darstellt.

Das Prinzip wird in nachfolgenden Grafiken anhand des Beispiels einer konkreten Rückleuchtenfunktion erläutert. Abbildung 15 stellt die Referenz dar. Hier ist die Kugel nach der herkömmlichen Parametrisierung nach den Polarwinkeln parametrisiert (projiziert) und als Histogramm für die Dichteschätzung verwendet. Es wurden hier ca. 120 Millionen Photonen mit zwei unterschiedlichen Auflösungen eingezählt. Diese große Anzahl von Strahlen gewährleistet empirisch ermittelt ein geringes Rauschen. Mit der feinen Unterteilung von $\Delta\delta = \Delta\gamma = 0.2^\circ$, Abbildung 15 (oben), sind alle feinen Strukturen sichtbar. Die grobe Auflösung $\Delta\delta = \Delta\gamma = 1.27^\circ$ von Abbildung 15 (unten) ist so gewählt worden, dass in Summe etwa die gleiche Anzahl Bins (ca. 40000) vorhanden ist, wie bei den gegenübergestellten Strukturen aus Abbildung 16 und Abbildung 17. In diesen Abbildungen sind die zwei dreidimensionalen Strukturen des Frequenzpolygons basierend auf dem Subdivision-Ikosaeder (jeweils rechts) und eines adaptiven Frequenzpolygons (jeweils links), generiert mittels Vektorquantisierung, dargestellt.

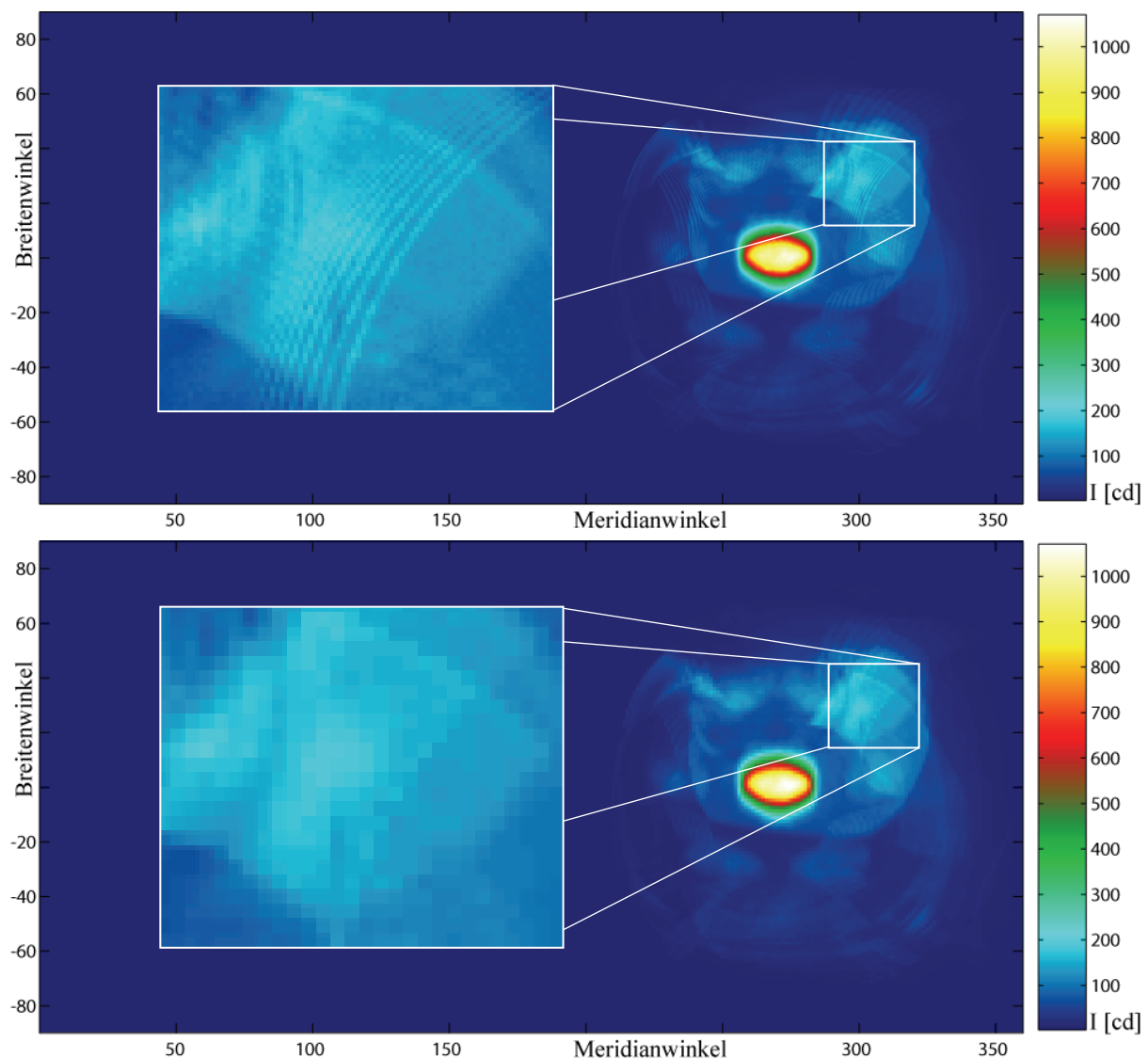


Abbildung 15: winkeltreue Zylinderprojektion der Kugeloberfläche nach Mercator (latitude-longitude) einer Heckleuchte mit Retroreflektoren im Strahlengang (Streulicht); Lichtstärkeverteilungskörper aus 100Mio. simulierten Photonen mit einer Auflösung von $0.2^\circ = 1.62$ Millionen Werte (oben) und einer Auflösung von $1.27^\circ = 39762$ Werte (unten)

Aus den Abbildung 16 und Abbildung 17 ist zu erkennen, dass das adaptive Frequenzpolygon mit lediglich rund 40000 Datenpunkten die hochfrequenten Strukturen aus Abbildung 15 (oben) zeigen kann. Hier wird dort fein aufgelöst, wo potentiell Strukturen denkbar sind. Strukturen in Bereichen mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeitsdichte könnten aufgrund des hohen Rauschens zumeist durch die Dichteschätzung nicht wieder rekonstruiert werden. Die Verwendung des Frequenzpolygons reduziert gleichzeitig den systematischen Fehler (Bias), da die rekonstruierte Funktion keine Sprungstellen aufweist und sich somit viel besser an die originale Verteilungsfunktion (pdf) annähert. (Hinweis: Voraussetzung ist, dass die originale Funktion ebenfalls keine Sprungstellen aufweist.)

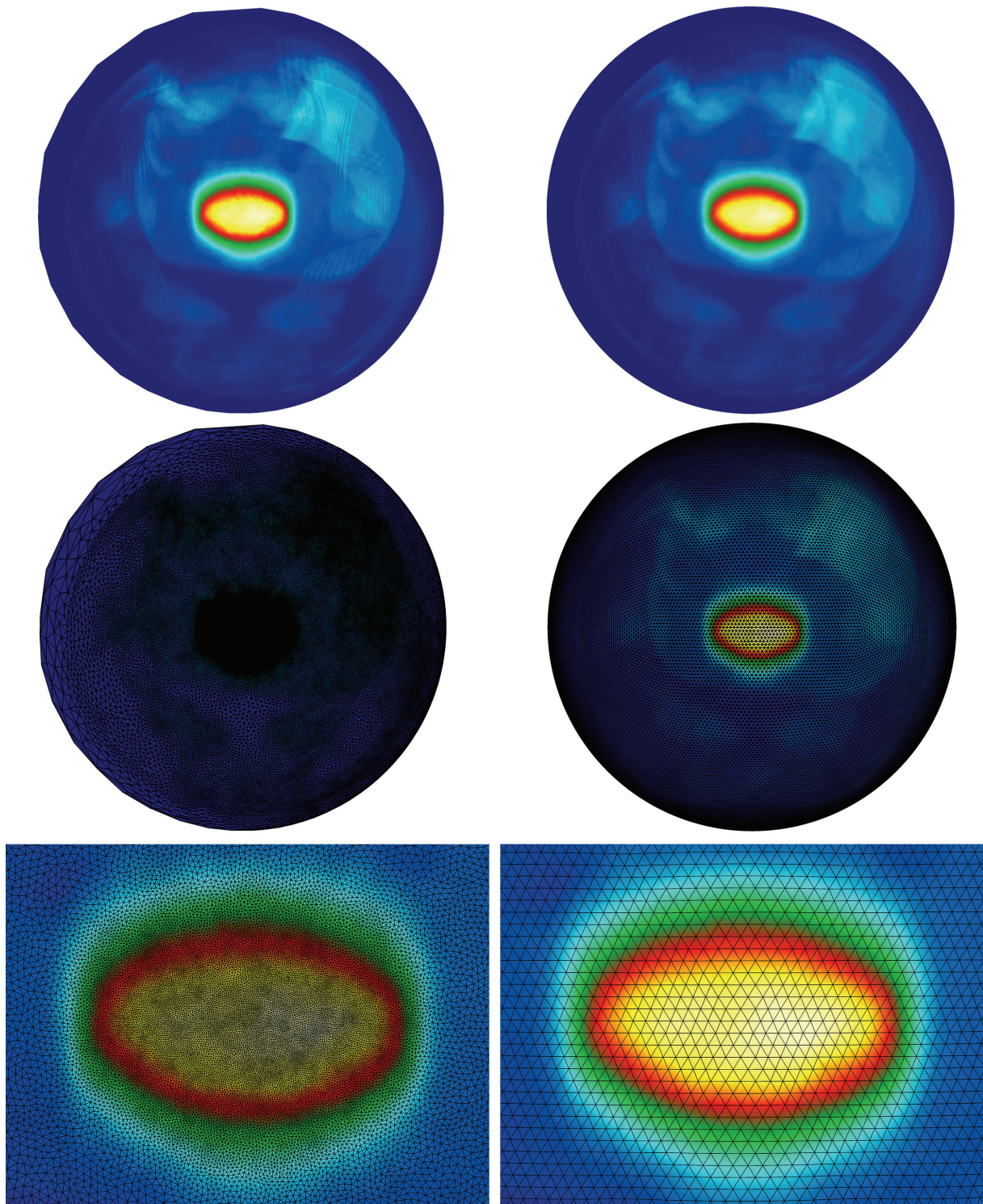


Abbildung 16: Vergleich von adaptivem Frequenzpolygon (linke Spalte) und Subdivision-Ikosaeder Frequenzpolygon (rechte Spalte); beide Varianten setzen sich aus 40962 Datenpunkten zusammen; Einzählstruktur ist die auf dem Basis-Gitter basierende Voronoi-Struktur (siehe Abbildung 11) eingeblendet in der Mitte und unten

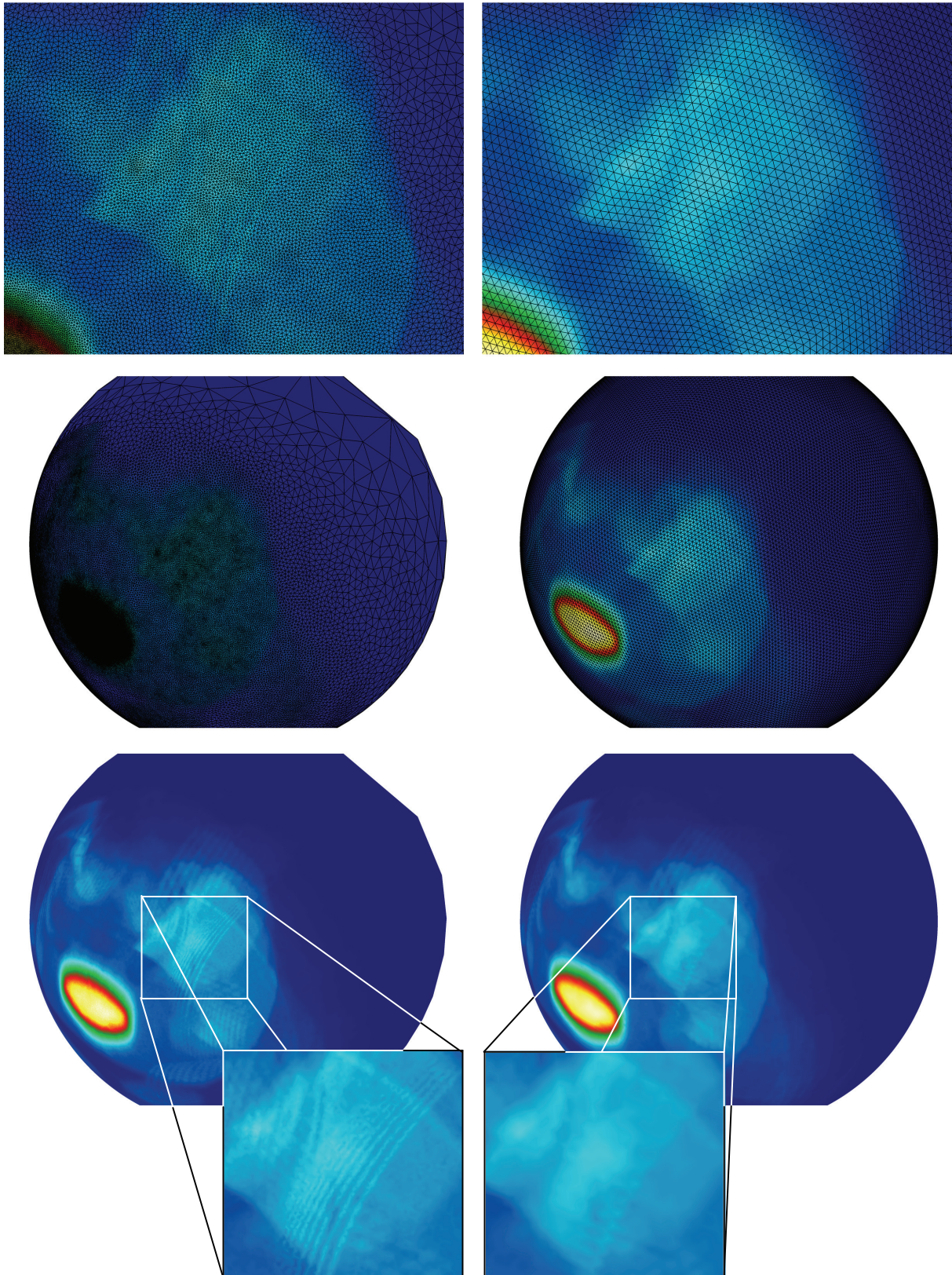


Abbildung 17: Vergleich von adaptivem Frequenzpolygon (linke Spalte) und Subdivision-Ikosaeder Frequenzpolygon (rechte Spalte); die Adaptivität sorgt für eine Konzentration von Bins in Regionen, wo viele Photonen eingezählt werden und erzeugt große Bins, wo die Richtungen dünn besetzte sind

Eigenschaften	Histogramm auf Basis Mercator-Projektion (latitude-longitude) mit winkelgleicher Viereck-Kontur	Frequenzpolygon auf Basis des Subdivisions-Ikosaeder mit Voronoi-Kontur	adaptives Frequenzpolygon aus Bins mit Voronoi-Kontur
Einfachheit der Berechnung	einfach zu berechnen, da zweidimensionale achsenparallele Bin-Suche	aufwendiger als Histogramm, durch nicht achsenparallele dreidimensionale Bin-Suche und lineare Interpolation	sehr aufwendig, da zweistufiges Verfahren (langsame Konvergenz der Vektorquantisierung) und nicht achsenparallele dreidimensionaler Bin-Suche mit linearer Interpolation
Konvergenzverhalten des <i>MISE</i> mit steigender Photonenzahl	sehr langsam, optimale Konvergenz bei h_{opt} mit $O(n^{-2/3})$	wesentlich schneller als bei Histogramm, optimale Konvergenz bei h_{opt} mit $O(n^{-4/5})$	stark abhängig von der Art des Verfahrens die adaptiven Bins zu generieren; generelle Aussage nicht möglich
Datenmenge (Anzahl der Bins)	Definiert durch Auflösung für Meridian- u. Breitenwinkel und Bereich der Auswertung	Für Subdivision Level 4: $(((12 * 4 - 6) * 4 - 6) * 4 - 6) * 4 - 6$ (nur diskrete Stufen möglich)	beliebige Anzahl von Zellen ist möglich, Wahl a priori mit Lloyd-Algorithmus [Lo82] oder durch vorgegebene Verzerrung mit LBG-Verfahren [GeG91]
Singularitäten (punktuelle Eindimensionalität)	2 Pole bei Breitenwinkel $\gamma = 0^\circ$ & 180° bzw. -90° & 90°	keine	keine
Bin-Kontur (Bin-Shape)	viereckig (normale Pixelstruktur)	hexagonal außer 12 Fünfecke	im Beispiel: Normalverteilung mit Maximum bei Sechseck (4-9 eckige Polygone)
visuelle Artefakte	Blockartefakte (Unstetigkeitsstellen=Sprungstellen)	Unstetigkeitsstellen im Verlauf (Sprünge in 1. Ableitung)	Unstetigkeitsstellen im Verlauf (Sprünge in 1. Ableitung)
Glättungsparameter <i>h</i> (Bin-Größe)	Glättungsparameter <i>h</i> (Bin-Größe) nimmt vom Äquator mit dem Kosinus des Breitenwinkels bis Null ab	Überall gleich groß, mit Standardabweichung von 7.6% vom Durchschnitt (Durchschn: $4 * \pi / \text{Binzahl}$)	orientiert an der durch die Dichte vorgegebenen kumulierten Streuung jedes Teilbereiches
mögliche Moiré-Effekt	mögliche Interferenz mit Abtastung während Messung durch regelmäßige Struktur des Histogramms	mögliche Interferenz mit Abtastung während Messung durch regelmäßige Struktur des Subdivision-Ikosaeder (siehe Abbildung 14)	nicht möglich, da Basis-Gitter keine regelmäßige Struktur aufweist

Tabelle 2: Gegenüberstellung von Histogramm der 2D-Polarparametrisierung, dreidimensionales Frequenzpolygon auf Basis Subdivision-Ikosaeder und adaptives Frequenzpolygon generiert mittels Vektorquantisierung

7. Schätzung des direkten 4D-Lichtfeldes zur Bestimmung der Leuchtdichte

Im Gegensatz zur Beurteilung der gesetzlichen Bestimmungen von Heckleuchten und Scheinwerfern mit Hilfe des Lichtstärkeverteilungskörpers kann die Erscheinung von Leuchten nur durch die Bestimmung der Leuchtdichte verteiltung bewertet werden. Die Leuchtdichte ist ein lichttechnischer Parameter für die Beschreibung der Helligkeit und ist das Verhältnis der von einer Fläche abgestrahlten Lichtstärke I und der scheinbar leuchtenden Fläche A_p , siehe [Gal04]. Im Gegensatz zur Schätzung der Beleuchtungs- und Lichtstärke kann bei der Bestimmung der Leuchtdichte keine Dimension durch eine Projektion eliminiert werden. Hier muss die Dichteschätzung im vierdimensionalen Raum durchgeführt werden. Dies geschieht für jedes Pixel eines zu schätzenden Leuchtdichtebildes, indem hierfür über ein Teilbereich der Photonenwahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\text{photon}}(u, v, \gamma, \delta)$ integriert wird. Da $f_{\text{photon}}(u, v, \gamma, \delta)$ eine vierdimensionale Funktion ist, muss das Integral auch für vier Dimensionen festgelegt werden. Das bedeutet, dass konventionell ein Raumwinkel- und ein Flächenbereich für die Integration definiert werden. Der Raumwinkel Ω wird durch δ und γ und der Flächenbereich A durch u und v bestimmt.

$$L = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} f_{\text{photon}}(u, v, \gamma, \delta) du dv d\gamma d\delta \cdot \Phi_{\text{total}} \cdot \frac{\Omega(\Delta\delta, \Delta\gamma)}{A(\Delta u, \Delta v)} \cdot \frac{1}{\cos(\gamma_1 + 0.5 \cdot \Delta\gamma)}$$

Für die Dichteschätzung bedeutet das im einfachen Falle des Histogramms ein Einzählen in ein definiertes vierdimensionales Bin.

Am Beispiel des zweidimensionalen Linienlichtfeldes lässt sich die Diskretisierung der Orts- und Richtungsdimension gut erkennen, siehe Abbildung 18.

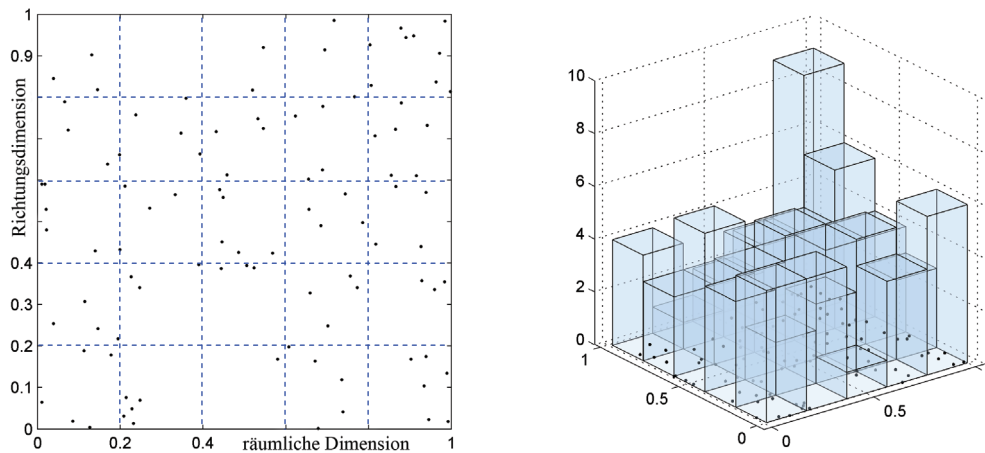


Abbildung 18: bivariates Histogramm des Linienlichtfeldes zur Bestimmung der Leuchtdichte (modellhaft); vgl. mit Abbildung 3

Um ein Histogramm eines Flächenlichtfeldes zu bestimmen, muss die Oberfläche entsprechend der gewünschten Ortsauflösung und die Dimension der Richtung entsprechend der Winkelauflösung diskretisiert werden.

Um z.B. eine Richtungsauflösung von $\Delta\gamma = \Delta\delta = 0.25^\circ$ (ca. $0.7 \cdot 10^{-3} \text{ sr}$) mit Hilfe eines Subdivision-Ikosaeder und hexagonalen Bins zu erreichen ist ein Subdivision-Level 7 mit insgesamt 163842 Zellen nötig. Angenommen es wird dabei nur eine Hälfte der Richtungssphäre betrachtet und eine Ortsauflösung von 450×450 Pixel definiert, ergibt das eine Gesamtzahl von ca. 16.6 Mrd. Bins. Angesichts einer simulierten Anzahl von vielleicht 10-500 Millionen Photonen ist hier die Dichteschätzung nur durch verbesserte Verfahren der

Dichteschätzung oder extrem inhomogene Verteilungen (Clusterbildung) möglich. Ein Beispiel für die Verarbeitung von inhomogenen Lichtfelddaten mittels Histogramm und dünn besetzten Matrizen ist in [Här07] beschrieben.

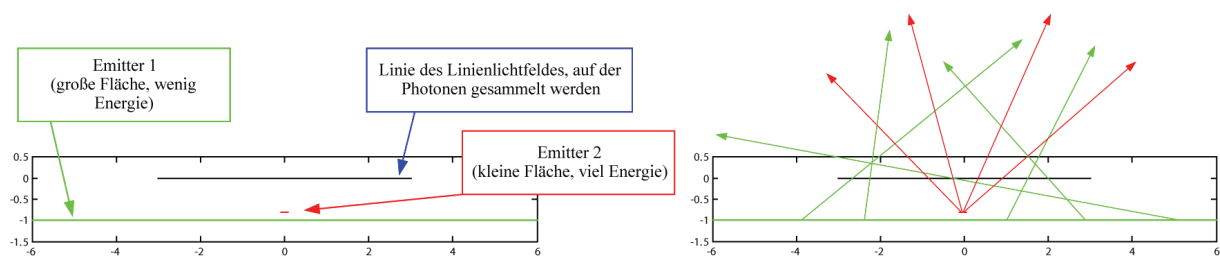


Abbildung 19: Aufbau einer synthetischen Szene für die Generierung eines ungleichförmigen Linienlichtfeldes (links); einige emittierte Photonen der lambertschen Emitter 1 und 2 (rechts)

Abbildung 19 zeigt ein synthetisches Beispiel für die Bildung eines Linienlichtfeldes und die möglichen Formen der Dichteschätzung. Auf der linken Seite ist eine Anordnung von zwei lambertsch emittierenden Linien zu sehen, deren emittierte Photonen bei dem Durchtritt durch die schwarze Linie parametrisiert werden. Diese Parametrisierung geschieht hier durch den Winkel und den Ort an dem das Photon die schwarze Basis-Linie durchstößt. Das resultierende Linienlichtfeld ist anhand einer Vielzahl von emittierten Photonen dann in Abbildung 20 (oben links) dargestellt.

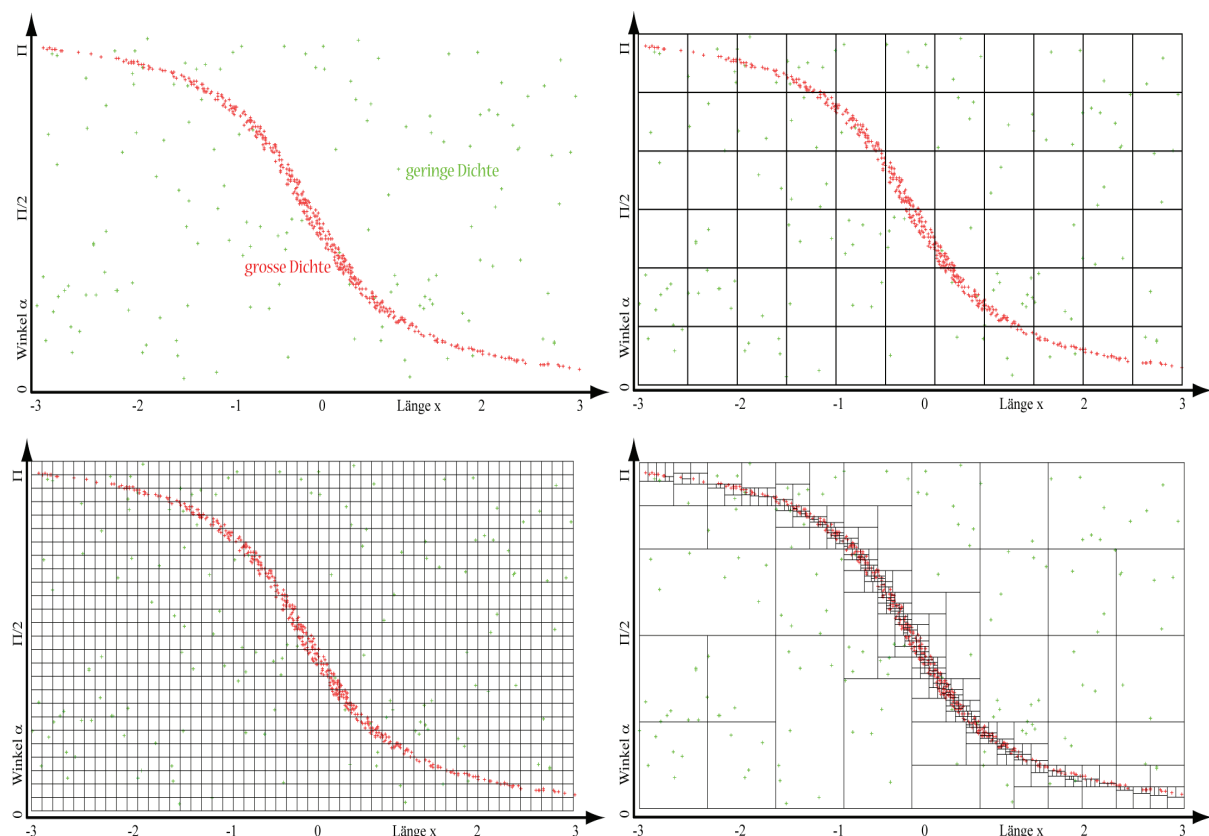


Abbildung 20: Linienlichtfeld aus Emitter 1 und 2 (aus Abb. 19) (oben links); mögliche Diskretisierung von Ort und Richtung zur Schätzung der geringen Dichte von Emitter 1 (oben rechts); mögliche Diskretisierung von Ort und Richtung zur Schätzung der großen Dichte von Emitter 2 (unten links); adaptive Diskretisierung speziell für die Kombination von Emitter 1 und 2 mittels kD-Tree (unten rechts)

An diesem zweidimensionalen Beispiel ist gut zu erkennen, dass sich aufgrund der geometrischen Beziehungen die Lichtfelder beider Emitters stark unterscheiden. Das Lichtfeld des Emitters 2 (rot) ist sehr stark konzentriert und lässt für jeden Ort nur einen kleinen speziellen Richtungsbereich zu. Bei Emitter 1 (grün) ist für jeden Ort auf der Linie ein sehr großer Winkelbereich potentiell mit Photonen besetzt.

Betrachtet man die Linienlichtfelder von Emitter 1 und 2 separat bezüglich einer Dichteschätzung mittels Histogramm, würde für Emitter 2 (grün) die Bin-Größe sicher sehr groß gewählt werden, siehe Abbildung 20 (rechts oben). Dies wäre notwenig, da die ohnehin wenigen Photonen sehr dünn besetzt über die komplette Fläche des Ergebnisraums verteilt sind. Für Emitter 1 (rot) hingegen, müsste für das Histogramm eine kleine Bin-Größe gewählt werden, um die Kontur des räumlich begrenzten Emitters gut aus den Photonen rekonstruieren zu können, siehe Abbildung 20 (unten links).

In beiden Fällen ist jedoch klar zu erkennen, dass die jeweils andere Unterteilungsart für den speziellen Emitter gänzlich ungeeignet wäre. Ein Kompromiss zwischen beiden Bin-Größen würde bestenfalls dazu führen, dass das störende Rauschen von Emitter 2 ausgeglichen ist im Vergleich zur verwaschenen Kontur von Emitter 1. Für dieses Linienlichtfeld ist somit eine a priori Definition von einem Integrationswinkel und einer Ortsauflösung nicht praktikabel.

Eine optimale Bin-Größe wäre nur gewährleistet, wenn für jeden speziellen Ort für unterschiedliche Richtungen auch unterschiedliche Bin-Größen definierbar wären. In Abbildung 20 (rechts unten) ist eine solche mögliche Zerlegung des Ergebnisraums aufgezeigt. Hierfür wurde die Konstruktion eines binären Suchbaums gewählt. Der Suchbaum, hier ein kD-Baum, wird rekursiv durch Teilen des Ergebnisraums erstellt. Dies geschieht bis zu einer bestimmten Zellengröße oder einer bestimmten Anzahl enthaltener Datenpunkte (hier Photonen). Detaillierte Information zu räumlichen Datenstrukturen sind unter [Same90] zu finden.

Auf Grund der hier ungünstigen Eigenschaft des Histogramms, für jeden Ort und Richtung jeweils starre Unterteilungen vorzugeben, wird für die Schätzung der Leuchtdichte im vierdimensionalen Raum eine adaptive Methode auf Basis des Kerndichteschätzers empfohlen. Der Kerndichteschätzer (engl: KDE: Kernel Density Estimation) basiert auf der Annahme, dass ein jedes Photon ein Repräsentant für eine Vielzahl von Photonen ist, die ihrerseits mit einer entsprechenden Verteilung (Kern) um das eigentliche Photon existieren. Im eindimensionalen Fall ist das Prinzip anhand weniger Datenpunkte in Abbildung 21 dargestellt.

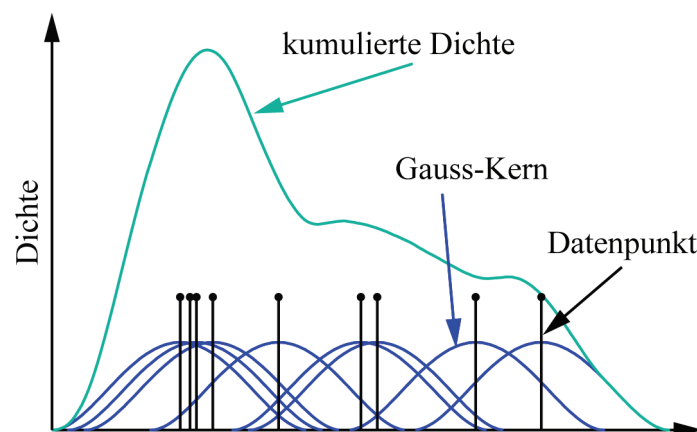


Abbildung 21: Prinzip des Kerndichteschätzers für eindimensionale Datenpunkte mit Gauss-Kern

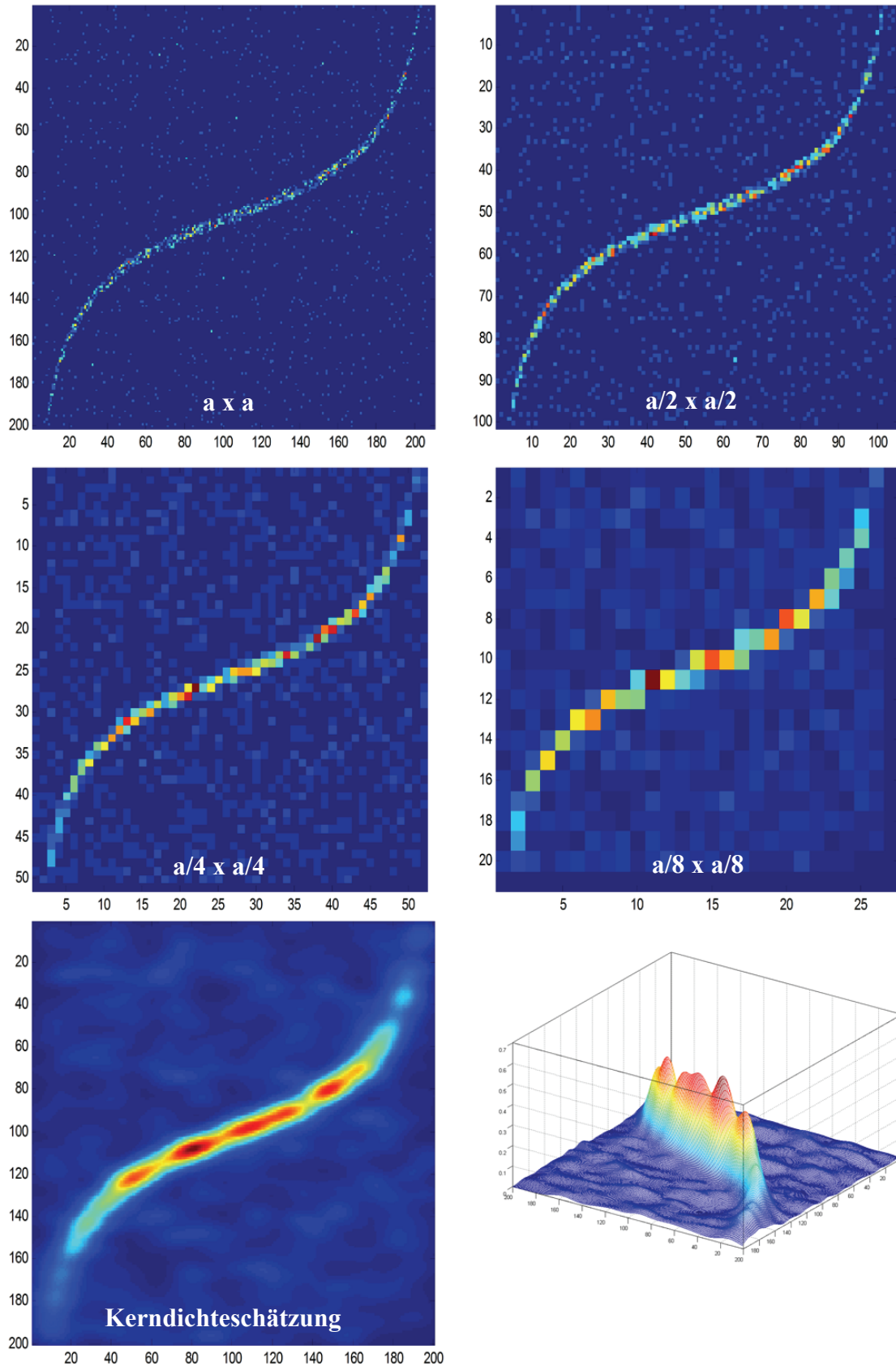


Abbildung 22: Vergleich Histogramm mit Kerndichteschätzer am Beispiel der Verteilung von Abbildung 20 ; Auflösung des Histogramms: $a \times a$ Pixel, $a/2$, $a/4$ und $a/8$; Kerndichteschätzer (untere Reihe)

Im Vergleich zum Histogramm ist der Kerndichteschätzer immer stetig, hat somit keine Sprungstellen wie das Histogramm und keine Unstetigkeitsstellen wie das Frequenzpolygon. Bedingung dafür ist jedoch, dass der verwendete Kern ebenfalls stetig ist. Abbildung 22 zeigt unterschiedliche Bin-Größen des Histogramms für die Bestimmung der Dichte des Linienlichtfeldes aus Abbildung 19. Obwohl der Kerndichteschätzer in der Urform nicht adaptiv ist, zeigt er im Vergleich zum Histogramm viel besser die Struktur der Verteilungsfunktion und ist für die Darstellung aufgrund der Stetigkeit sehr gut geeignet. Er ist aufgrund seines Prinzips vollkommen von der Auflösung der Darstellung entkoppelt. Der Glättungsparameter, den jeder nicht parametrischer Dichteschätzer beinhaltet, ist nicht wie beim Histogramm die Bin-Größe, sondern die Größe des Kerns, der auf jedem Datenpunkt (Photon) aufgesetzt wird.

Formal kann der Kerndichteschätzer wie folgt beschrieben werden, siehe [Sil86], [Sco92]:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{h} \cdot \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \text{ mit } h \text{ als Kernbreite und } K \text{ als Kern.}$$

Das Volumen eines Kerns entspricht 1. Somit ist gewährleistet, dass das Gesamtintegral der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion wieder 1 ergibt (durch Multiplikator 1/n).

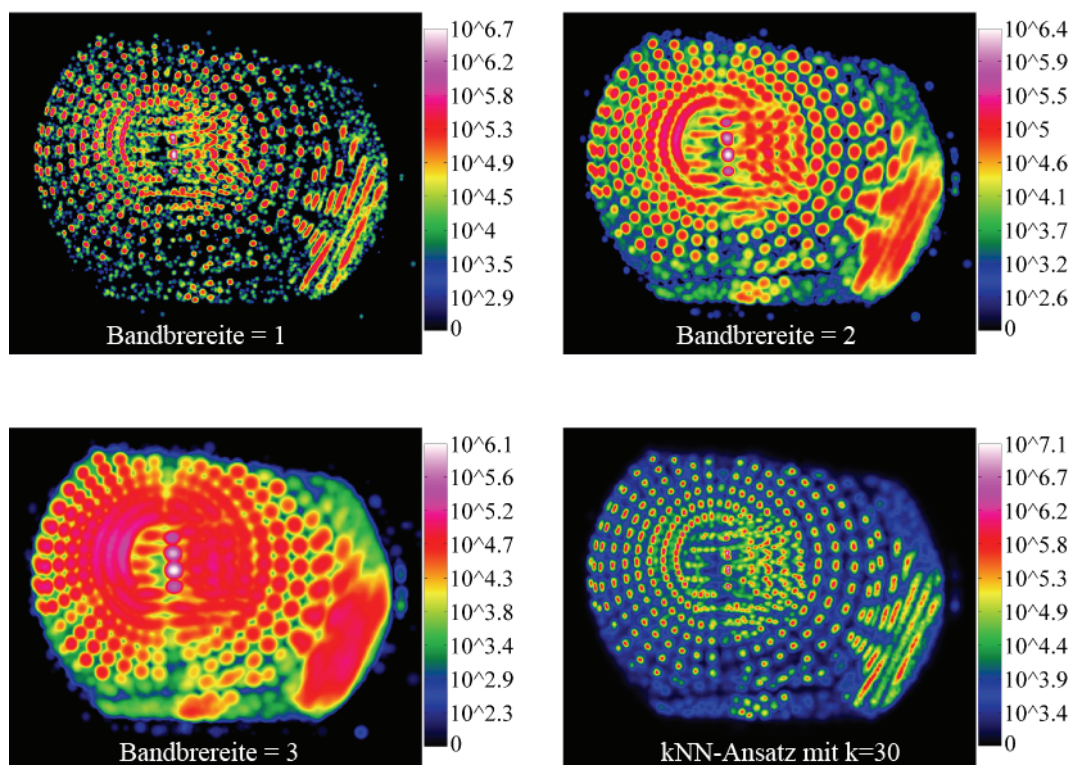


Abbildung 23: Kerndichteschätzung der Leuchtdichte in cd/m^2 der VW Touran Heckleuchte mit Bandbreite 1, 2 und 3 im Vergleich mit dem adaptiven kNN-Ansatz

Das Verfahren lässt sich direkt auf den vierdimensionalen Ort-Richtung-Raum des Flächenlichtfeldes übertragen. In Abbildung 23 ist die Kerndichteschätzung mit unterschiedlichen Bandbreiten (Kern-Größen) dargestellt. Die Bedeutung der Bandbreite wird später erläutert. An den drei Abbildungen ist sehr gut zu erkennen, dass eine zu kleine Bandbreite (Glättungsparameter des Dichteschätzers) Rauschen zur Folge hat, die Lichtfeldfunktion ist nicht genügend geglättet. Hingegen ist in diesem Beispiel die Bandbreite 3 zu groß gewählt, die Funktion ist zu sehr geglättet. Prinzipiell kann gesagt

werden, dass die geschätzte Funktion $\hat{f}(x)$ gegen die mit dem Kern gefaltete Dichtefunktion konvergiert. Der resultierende systematische Fehler (Bias) fällt mit der Bandbreite. Der Fehler bleibt jedoch theoretisch auch bei unendlich vielen Photonen erhalten, falls die Bandbreite nicht gleichzeitig gegen Null strebt, siehe [Sim96].

Der Glättungsparameter, der bei jedem nicht parametrischen Dichteschätzer vorhanden ist, wird in der Regel nach visuellen Gesichtspunkten eingestellt. Es handelt sich dabei immer um ein Abwägen zwischen Rauschen und Bias.

Um nun der Unterschiedlichkeit des Lichtfeldes gerecht zu werden, muss, wie von Abbildung 20 abgeleitet, ein adaptiver Ansatz gewählt werden. In Kombination mit dem Kerndichteschätzer wird hier die k -Nächste-Nachbar-Methode (kurz: kNN) angeführt, siehe Abbildung 23 (unten rechts). Hier wird an dem Auswertepunkt, an dem die Leuchtdichte bestimmt werden soll, der Radius bis zum k -ten nächsten Nachbarn bestimmt und anhand dieses Radius die Bandbreite definiert. In Abbildung 24 ist das Verfahren kurz für den eindimensionalen Fall skizziert. In diesem Beispiel werden für die Auswertpunkte x_i und x_j die drei nächsten Nachbarn gesucht ($k=3$). Der Abstand definiert für den Bereich um x_i eine große Bandbreite, wobei für die größere Dichte um x_j ein kleinerer Kern definiert wird.

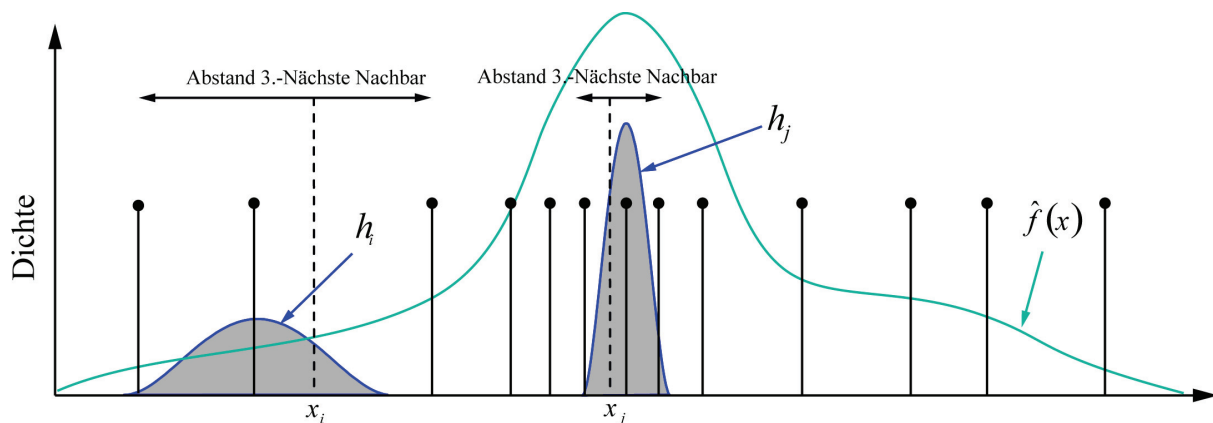


Abbildung 24: Prinzip des adaptiven kNN-Verfahrens (k Nächste Nachbarn Verfahren) im eindimensionalen Fall für $k=3$

Formal kann das kNN-Verfahren wie folgt beschrieben werden:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{h_k(x)} \cdot \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h_k(x)}\right)$$

Im Vergleich zum allgemeinen Kerndichteschätzer unterscheidet sich das kNN-Verfahren formal lediglich dadurch, dass die Bandbreite h von x abhängt. Auf die Besonderheit der Metrik, d.h. die Definition der Nachbarschaft in einem vierdimensionalen Raumgemisch aus Richtung und Ort, soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden.

Den Einfluss von k , also der Anzahl der nächsten Nachbarn, die in die Auswertung und in die Bestimmung der Bandbreite einbezogen sind, wird in Abbildung 25 aufgezeigt. Der Glättungsparameter ist hier k , der indirekt die Bandbreite jedoch in Abhängigkeit der Dichte festlegt. Auch hier ist wie in Abbildung 23 zu erkennen, dass die Maxima der Leuchtdichte mit Vergrößerung des Glättungsparameters verwischt werden. Nach rein visuellen Gesichtspunkten ist bei diesem Beispiel ein Wert $k=30$ optimal, siehe Abbildung 23 (rechts unten). Wie jedoch die aus simulierten Photonen geschätzte Leuchtdichte in eine Darstellungsform

überführt wird, um sie auf einem elektronischen Medium beurteilen zu können, ist unabhängig von der Dichteschätzung und immer nur eine schlechte Projektion der Wirklichkeit. Um dennoch Aussagen über das Erscheinungsbild aus solchen geschätzten und auf Computermonitoren dargestellten Bildern erzielen zu können, bedarf es an Erfahrung im Umgang und bekannte simulierte Vergleichsobjekte. An diesen Vergleichsobjekten, die ähnlich aufgebaut sein sollten, wie der neu zu beurteilende Prototyp, kann einerseits eine Art visuelle Kalibrierung des Betrachters erzielt werden und andererseits kann durch die Ähnlichkeit des Lichtfelds der Glättungsparameter angepasst werden. Genauer über das Prinzip der Prädiktiven Visualisierung ist in [Här05] zu finden.

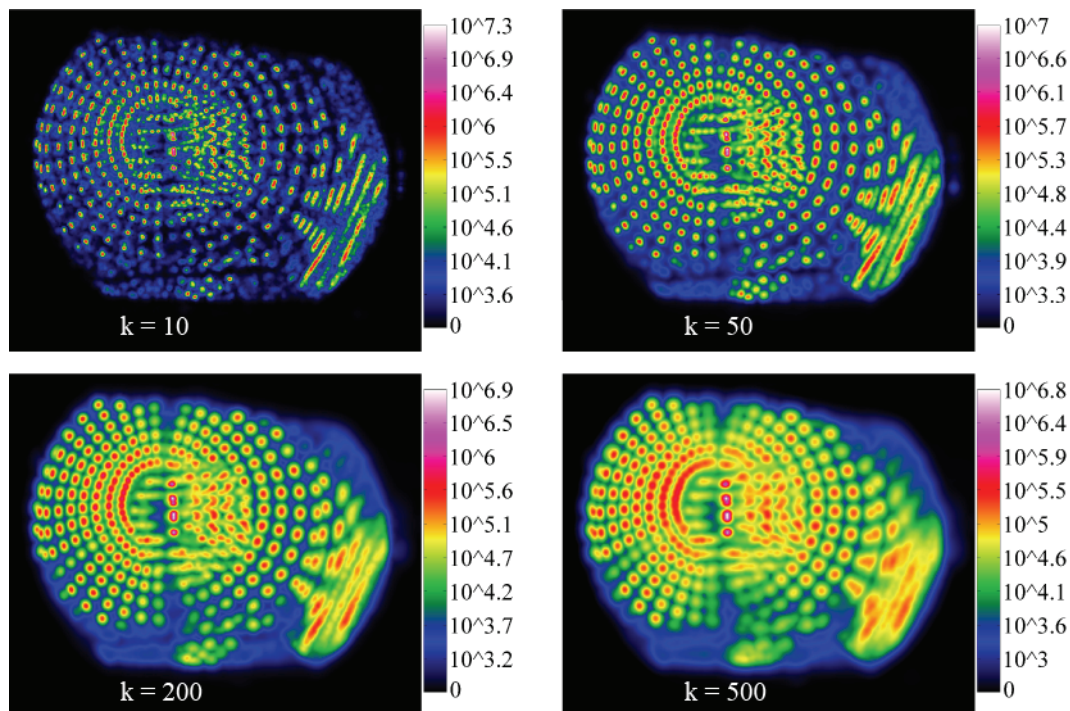


Abbildung 25: Dichteschätzung der Leuchtdichte in cd/m^2 der VW Touran Heckleuchte mittels kNN-Verfahren mit unterschiedlich vielen nächsten Nachbarn ($k = 10, 50, 200, 500$)

Ein Beispiel für eine solche Visualisierung ist in Abbildung 7 dargestellt. Hier sind in der linken Spalte unterschiedliche Ansichten der VW Touran Heckleuchte mit allen eingeschalteten Funktionen dargestellt. In der rechten Spalte ist die von der Umgebung reflektierte Leuchtdichte aufaddiert, siehe [Här05].

Um die kNN-Methode mit dem herkömmlichen Histogrammdichteschätzer vergleichen zu können, ist oft der Integrationswinkel von Interesse. Jedoch ist für die kNN-Methode kein eindeutiger Integrationswinkel definierbar. Die Abbildung 6 zeigt am Beispiel des zweidimensionalen Linienlichtfeldes die Art und Weise mit der die Dichte an dem Auswertepunkt (gelbes Kreuz) bestimmt wird. Hier werden ausgehend vom Auswertepunkt sieben nächste Nachbarn gesucht und dadurch die Kern-Größe definiert. Um jeden der sieben nächsten Nachbarn wird ein Kern platziert und entsprechend der Entfernung zum Auswertepunkt aufaddiert. Schlussendlich wird durch die Fläche des Kreises dividiert. Würde man das Histogramm verwenden, wären der Integrationsbereich das achsenparallele Rechteck innerhalb der gestrichelten blauen Linien. In dem Falle der kNN-Methode ist jedoch der Integrationswinkel für die unterschiedlichen Punkte zwischen x_1 und x_2 nicht immer gleich, sondern variiert von dem Maximum ($\alpha_2 - \alpha_1$) bis zum Minimum Null. Das Gleiche ist für den Integrationsbereich des Ortes festzustellen. Dort wo der Integrationswinkel Maximal ist,

ist der Integrationsbereich des Ortes Null und umgekehrt. Rein mathematisch ist die Wahrscheinlichkeit in einem Punkt, streng genommen, Null. Es lassen sich nur Wahrscheinlichkeiten $f(x)$ für den Fall angeben, dass die Werte innerhalb des Intervalls dx um x liegen. Dadurch heißt die Lichtfeldfunktion Dichtefunktion. Wie der Bereich definiert ist, spielt für die Bestimmung der Dichte an genau einem Punkt keine Rolle. Beispielsweise ist für die Bestimmung der Lichtstärke nicht relevant, ob der Raumwinkel durch $\Delta\delta$ und $\Delta\gamma$ bestimmt wird oder ein rotationssymmetrischer Winkel (ergibt Kegel) den Raumwinkel aufspannt. Im Falle des kNN-Verfahrens kann annäherungsweise der Integrationswinkel als Flächengröße des Kerns interpretiert werden. In Abbildung 26 ist jedoch zu erkennen, dass die Kern-Größe wesentlich kleiner wäre, läge der Auswertepunkt (gelbes Kreuz) innerhalb der roten Datenpunkte. Der Integrationsbereich ist also, abhängig von der Dichte, theoretisch überall unterschiedlich.

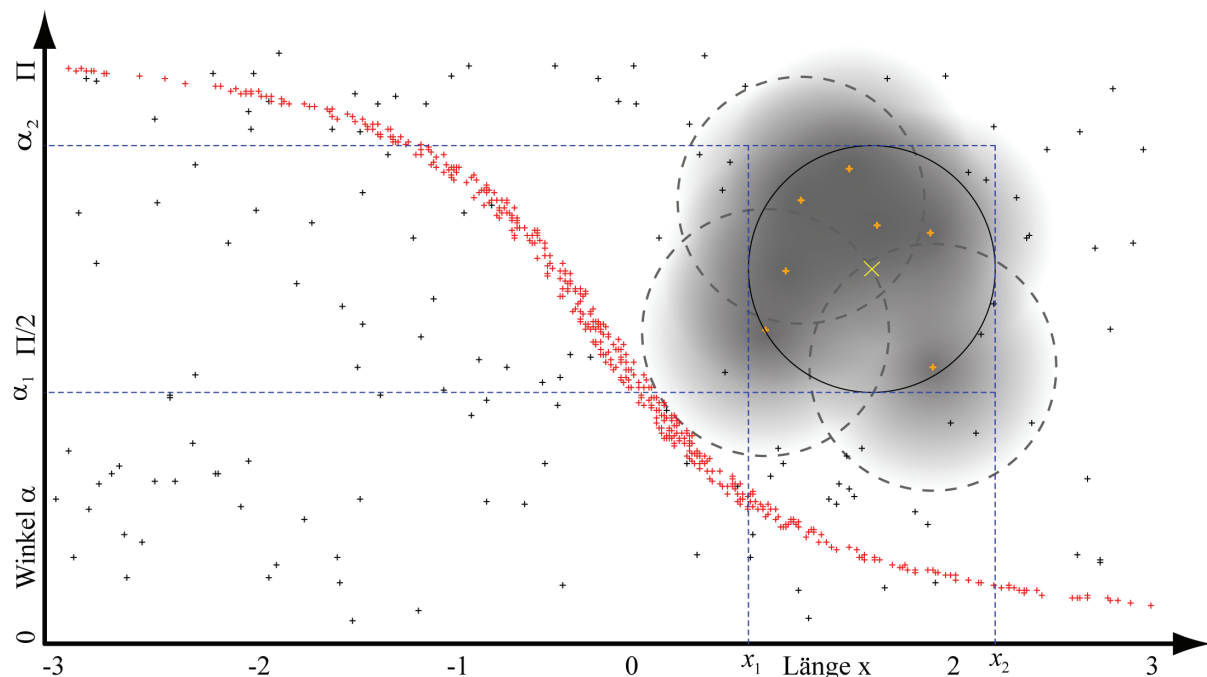


Abbildung 26: Beispielhafte Dichtebestimmung für einen Punkt (gelbes x); kNN-Verfahren mit $k=7$; bivariate Kerne sind angedeutet, 3 Kerne exemplarisch eingekreist (schwarz gestrichelt)

8. Fluch der Dimensionalität

Im letzten Kapitel wurde gezeigt, dass die Dichteschätzung im höherdimensionalen Raum (vierdimensional für die Leuchtdichte) einen größeren Aufwand benötigt als die zweidimensionale Dichteschätzung für Lichtstärke und Beleuchtungsstärke. Der größere Aufwand begründet sich im Wesentlichen auf die Tatsache, dass bei vorgegebener Genauigkeit des Schätzwertes die Anzahl der Datenpunkte (hier Photonen) sehr stark nichtlinear ansteigt. In der Fachliteratur wird hierfür die Phrasen „Fluch der Dimensionalität“ (engl.: Curse of dimensionality) und „Leerer Raum Phänomen“ (engl.: Empty Space Phenomenon) verwendet. Sie besagen, dass die Abwägung zwischen Rauschen und systematischem Fehler (Bias) mit steigender Dimension immer schwieriger wird, wenn die Datenmenge nicht überproportional ansteigt [Sil86] [Sim96]. Um dies zu veranschaulichen, hier ein Rechenbeispiel:

Nimmt man an, dass für den eindimensionalen Zahlenraum zwischen 0 und 1 ca. 100 Datenpunkte genügen, um eine mögliche Verteilung rekonstruieren zu können, bedeutet dies

für den zweidimensionalen Fall schon 10000 und für den vierdimensionalen Fall bereits 100 Mio. Datenpunkte. Übertragen auf die Lichttechnik würde dies bedeuten, dass ein Lichtstärkeverteilungskörper mit 10000 simulierten Photonen bei ähnlichem Frequenzverhalten annähernd genauso gut reproduzierbar ist, wie eine Leuchtdichteansicht generiert aus 100 Mio. Photonen. In der Praxis werden jedoch oft 10 Mio. Photonen für die exakte Bestimmung des Lichtstärkeverteilungskörpers verwendet, was übertragen auf die vierdimensionale Dichteschätzung bei der Leuchtdichte einer Anzahl von 10^{14} Photonen entspräche. Diese Zahl ist jedoch um den Faktor 1.000.000 größer, als die momentan gängige verwendete Photonenanzahl von 100 Mio.

In den Forschungsarbeiten von Kiel [KiM07] wurden jedoch bei Versuchen mit Scheinwerfern noch bei einer simulierten Photonenanzahl von 100 Mio. Rauschen im Lichtstärkeverteilungskörper wahrgenommen. Als Hinweis: 100 Mio. Photonen im binären Datenformat entsprechen einer Datenmenge von ca. 2.24 GigaByte.

9. Zusammenfassung:

Man kann also zusammenfassend sagen, dass das Problem der Simulation von lichttechnischen Elementen mittels Photon- bzw. Raytracing auch ein besonderes Problem der Dichteschätzung ist. Simulationstechniken müssen z.B. im Entwicklungsprozess schnell und flexibel einsatzfähig sein, eine gute Vorhersagegenauigkeit erreichen und dem Entscheider ein Werkzeug an die Hand geben, um virtuell bewerten zu können.

In Kapitel 6 und 7 wurden neuartige Verfahren zur Dichteschätzung von Lichtstärke und Leuchtdichte vorgestellt, die bislang prototypisch implementiert sind und ihre Alltagstauglichkeit in der Lichttechnik noch unter Beweis stellen müssen. Darüber hinaus ist es notwendig, dass die Algorithmen, z.B. zur Bestimmung der Leuchtdichteverteilung, derart verbessert werden müssen, dass optimaler Weise die Komplexität nicht von der Anzahl der simulierten Photonen n abhängt. Das hier vorgestellte Verfahren auf dem kNN-Ansatz berechnet die Leuchtdichteansicht in wenigen Sekunden und hängt über den grundsätzlichen Zusammenhang $O(\log(n))$ von der Anzahl der Photonen n ab (siehe kD-Baum). Konkret bedeutet dies abgesehen vom Speichermanagement, dass hier eine Vergrößerung der Photonenanzahl um den Faktor 100 von 1Mio. auf 100Mio. die Berechenzeit nur um den Faktor 0.33 ansteigen lässt.

Der nächste logische Schritt ist die Frage nach energetischen Größen wie Strahlstärke und Strahldichte. Hierbei müsste eine spektrale Simulation durchgeführt und die Größen spektral geschätzt werden. Jedes Photon würde einen spektralen Strahlungsflussanteil tragen. Dies würde zu einer Erhöhung der Dimension der Dichtefunktion um die Dimension der Wellenlänge führen und das fünfdimensionale Flächenstrahlungsfeld definieren. Bezüglich des „Fluchs der Dimensionalität“ aus Abschnitt 8 wird jedoch deutlich, dass hier der Aufwand extrem steigen würde. Zusätzlich käme eine weitere ungleiche Dimension hinzu und würde eine Art Orts-Richtungs-Wellenlängen-Raum aufspannen, für den sich eine sinnvolle Abstandsmetrik ungleich schwerer ermitteln ließe. Hierbei ist somit noch eine Menge Raum für weitergehende Forschungsaktivitäten vorhanden.

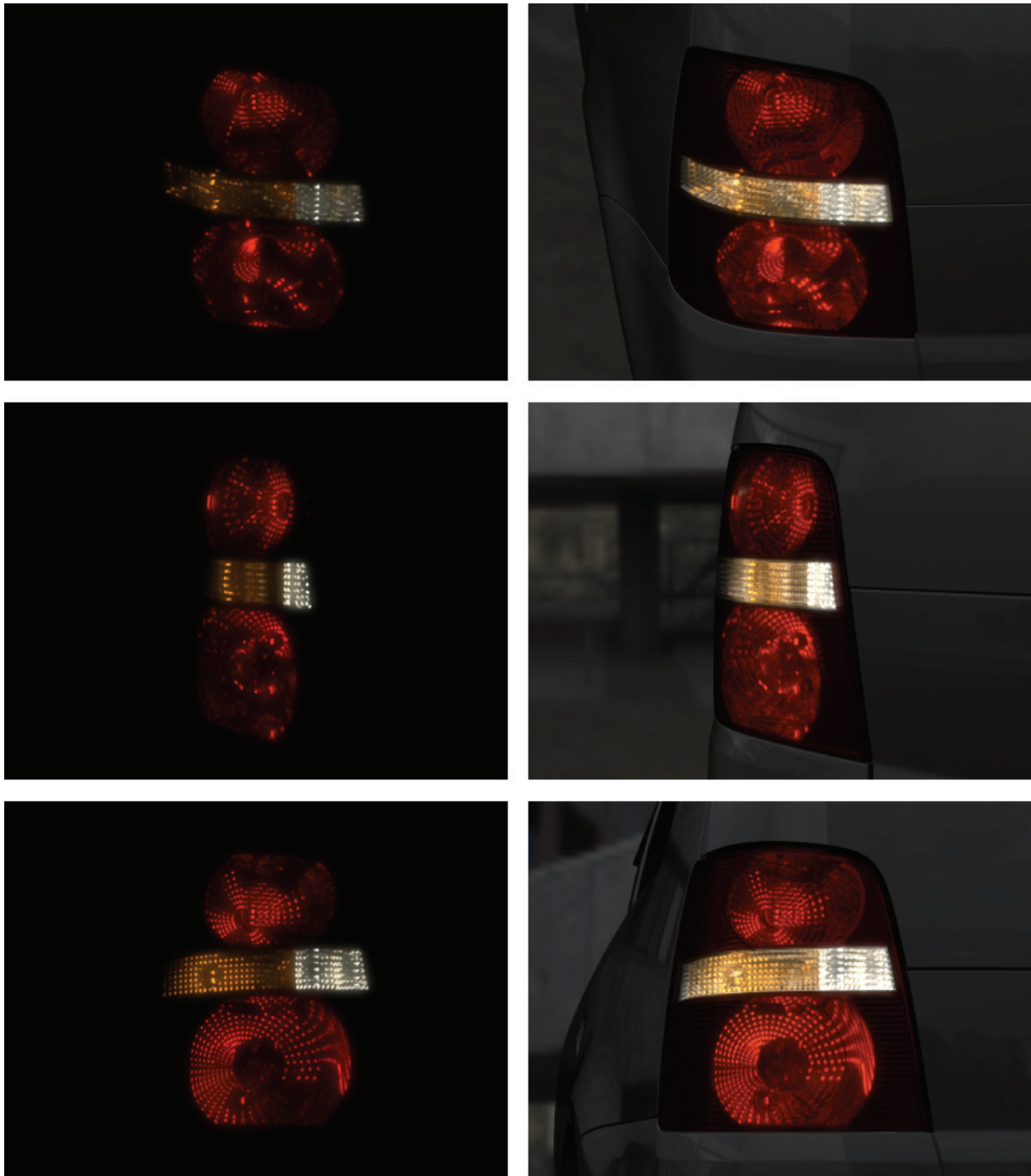


Abbildung 27: aus simulierten Photonen erstellte Helligkeitsdarstellungen aus geschätzten emittierten Leuchtdichten mittels kNN-Verfahren (links) mit überlagerter reflektierter Leuchtdichte rechts); aus ca. 100 Mio. Photonen pro Lichtquelle; (Farbwertanteile wurden nachträglich aufgeprägt)

10. Literaturverzeichnis:

- [Auren91] Aurenhammer, F.: Voronoi diagrams – a survey of fundamental geometric data structure; ACM Computing Surveys, Vol. 23, No. 3, September 1991
- [Bel61] Bellman, R.E.: Adaptive Control Processes. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1961
- [Cut97] Cuttler, C.: Cubic Illumination; Lighting Res. Technol. 29(1)1-14(1997)
- [Gal04] Gall, Dietrich: Grundlagen der Lichttechnik – Kompendium; Richard Pflaum Verlag GmbH & Co. KG München, 2004, ISBN 3-7905-0923-X
- [GeG91] Gersho, A., Gray, R.: Vector Quantization and Signal Compression. Kluwer Academic Publishers, 1991
- [Gen05] Gentle, James E.: Elements of Computational Statistics, Springer Science and Business Media, 2005, ISBN 0-387-95489-9
- [Ger36] Gershun, A.: The Light Field, Moscow, 1936. Translated by P. Moon and G. Timoshenko in *Journal of Mathematics and Physics*, Vol. XVIII, MIT, 1939, pp. 51-151.
- [Här04] Härdle, W.: Nonparametric and Semiparametric Models, Springer-Verlag Berlin, 2004, ISBN-10:3540207228
- [Här05] Häring, Sebastian: Verfahren zur Visualisierung des Tagdesigns und der Nachtfunktion von Leuchten; LuxJunior05, 7. internationales Forum für den lichttechnischen Nachwuchs; Sept. 2005
- [Här07] Häring, Sebastian: Simulation of light distribution and lit appearance – analysis via density estimation; ISAL07 - International Symposium on Automotive Lighting; Sept. 2007
- [KiM07] Kiel, H., Mensch, D.: Softwarebasierte Ausrichtung und Bewertung von Lichtverteilung; LuxJunior07, 8. internationales Forum für den lichttechnischen Nachwuchs; Sept. 2007
- [KuST01] Kunszt, P.Z., Szalay, A.S., Thakar, A.R.: The Hierarchical Triangular Mesh; Dept. of Physics and Astronomy, Proc. of the MPA/ESO/MPE workshop, (Springer-Verlag Berlin Heidelberg), 631-637, 2001
- [Llo82] Lloyd, S.: Least square quantization in PCM, IEEE Trans. Inform. Theory 28, 129-137, 1982
- [MoS81] Moon, P. and Spencer, D.E.: The photic field (Cambridge MA:MIT Press), 1981

- [Nga87] Ngai, P.Y.: On Near-Field Photometry, JOURNAL of the Illuminating Engineering Society, 1987
- [Same90] Samet, H.: The Design and Analysis of Spatial Data Structures , Addison-Wesley, Reading, MA, 1990, ISBN 0-201-50255-0
- [Sco92] Scott, David W.: Multivariate Density Estimation – Theory, Practice and Visualization; John Wiley & Sons, Inc.; New York, 1992, ISBN 0-471-54770-0
- [Sil86] Silvermann, Bernhard W.: Density Estimation for Statistics and Data Analysis, Monographs on Statistics and Applied Probability. Chapman and Hall New York, 1986
- [Sim96] Simonoff, Jeffrey S.: Smoothing Methods in Statistics. Springer Series in Statistics. Springer-Verlag, New York, 1996.
- [Woo00] Wood, D. et al: Surface Light Fields for 3D Photography; Proceedings of the 27th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, p.287-296, 2000