

**TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU**

INSTITUT FÜR MATHEMATIK

Fachgebiet Analysis und Differentialgeometrie

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Skriptum -

von

Jürgen Knobloch
Joachim Steigenberger

th.

Vorwort

Die vorliegenden vier Kapitel bilden den Hauptteil eines Skriptums über *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, das inhaltlich „open end“ geplant ist und wesentlich aus verschiedenen Vorlesungen für Mathematiker bzw. Ingenieure über Differentialgleichungen und Dynamische Systeme hervorgeht. Dieser Hauptteil umfaßt etwa den Stoff der Vorlesung „Gewöhnliche Differentialgleichungen“ für Studenten der Mathematik im 4. Semester und soll füglich als eine *Einführung in die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen* verstanden werden. Er wurde konzipiert zur *Unterstützung* der erwähnten Vorlesung, die ihrerseits (eigenständig ausgewiesener) Bestandteil der Grundausbildung in Analysis ist.

Daraus resultieren einige Besonderheiten, wie die Bevorzugung des Banachschen Fixpunktsatzes als Beweismittel für die grundlegenden Sätze und das Fehlen von Übungsaufgaben sowie größeren Anwendungsbeispielen (die Lehrveranstaltungen selbst sollen ja auch ihre Attraktionen behalten). Die Numerik der Differentialgleichungen ist Angelegenheit der von der Analysis getrennten Lehrveranstaltungen „Numerische Mathematik“ und findet deshalb hier keinen Niederschlag.

Das Skriptum wendet sich somit vorrangig an Studierende der Mathematik am Ende des Grundstudiums, insbesondere an diejenigen, die ihr Fachstudium in dieser oder jener Weise mit Analysis verknüpfen wollen. Darüber hinaus soll es auch theoretisch interessierte Ingenieure ansprechen und ihnen eine Hilfe beim Einstieg in Spezialvorlesungen und Forschung auf dem weiten Feld der dynamischen Systeme bieten. Die Menge der aktuellen Lehrbücher, Monographien und Originalliteratur ist so umfangreich und in ihren Zielrichtungen so weit gefächert, daß nach unseren Erfahrungen eine auf lokale Bedürfnisse ausgerichtete Literatur, die den Grundbegriffen der qualitativen Theorie breiten Raum gibt, Studierenden und Betreuenden viel Zeit und Mühe sparen kann.

Unsere jungen Kollegen Jenny Klaus und Michael Katzschmann haben mit großer Sorgfalt Korrektur gelesen und die Figuren erstellt. Katrin Knabe hat unleserliche, mehrfach geänderte Manuskripte unverdrossen in L^AT_EX-Text verwandelt. Allen gilt dafür unser großer Dank. Für Kritik an Inhalt und Darstellung sowie für Mitteilung verbliebener (hoffentlich nur Schreib-)Fehler werden wir dankbar sein.

Ilmenau, Februar 1996

J. Knobloch
J. Steigenberger

Anschrift der Autoren:
Technische Universität Ilmenau
Institut für Mathematik
PF 0565
D-98684 Ilmenau

email: jstei@mathematik.tu-ilmenau.de
knobi@mathematik.tu-ilmenau.de

Inhaltsverzeichnis

1	Die Differentialgleichung erster Ordnung im \mathbb{R}^n	1
1.1	Die Aufgabenstellung	1
1.2	Geometrische und kinematische Deutung der Differentialgleichung	3
1.3	Einordnung der Differentialgleichung n -ter Ordnung im \mathbb{R}^1	4
1.4	Elementare Typen von Differentialgleichungen	5
1.4.1	Die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen	5
1.4.2	Die lineare Differentialgleichung im \mathbb{R}^1	9
1.4.3	Transformation auf elementare Typen	12
2	Existenz und Unität der Lösungen	14
2.1	Das Anfangswertproblem als Integralgleichung	14
2.2	Der Fixpunktsatz von Banach	16
2.3	Der Existenz- und Unitätssatz von Picard und Lindelöf	17
2.4	Folgerungen aus dem Satz von Picard und Lindelöf	22
2.5	Ein globaler Existenzsatz	28
3	Lineare Differentialgleichungen	31
3.1	Die Lösungsmenge	32
3.1.1	Die homogene Differentialgleichung	33
3.1.2	Die inhomogene Differentialgleichung	36
3.2	Ein Reduktionssatz	38
3.3	Einige Eigenschaften der Fundamentalmatrizen	39
3.4	Die lineare Differentialgleichung mit konstanter Koeffizientenmatrix	41
3.4.1	Hilfsmittel aus der linearen Algebra	41
3.4.2	Berechnen einer Integralbasis	42
3.4.3	Die Übergangsmatrix der DGL $\dot{x} = Ax$	46
3.4.4	Die lineare DGL n ter Ordnung	48
4	Grundlagen der Theorie autonomer Differentialgleichungen	51
4.1	Integalkurven und Phasenkurven	51
4.2	Der lokale Fluß	54
4.3	Stetigkeit und Differenzierbarkeit des lokalen Flusses	58
4.4	Variationsgleichungen, lineare Approximationen	62
4.5	Globale Flüsse und dynamische Systeme	64
4.6	Phasenportraits	68

4.7	Vergleich von Phasenportraits	70
4.8	Das Phasenportrait der ebenen linearen DGI	77
4.9	Ljapunov-Stabilität	83
4.9.1	Theorie der ersten Näherung	85
4.9.2	Ljapunovs direkte Methode	87
4.10	Erste Integrale	92

Kapitel 1

Die Differentialgleichung erster Ordnung im \mathbb{R}^n

Dem im Vorwort formulierten Ziel dieses Skriptums entsprechend, werden im folgenden nur Differentialgleichungen (DGLn) eines bestimmten allgemeinen Typs, die *expliziten Differentialgleichungen erster Ordnung*, betrachtet. Diese werden als eine klar umrissene Aufgabenstellung eingeführt, die danach entwickelte Theorie beinhaltet Aussagen über die Lösbarkeit dieser Aufgabe und über Eigenschaften der Lösungen.

1.1 Die Aufgabenstellung

Definition 1.1 *Unter einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung im \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, soll folgende Aufgabe verstanden werden.*

Gegeben: Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, eine Funktion $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n) : (t, x) \mapsto f(t, x)$.

Gesucht: Ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$, eine differenzierbare Funktion $\varphi | I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit den Eigenschaften

- (i) $\forall t \in I \quad (t, \varphi(t)) \in G$ (d.h. $\text{graph } \varphi \subset G$);
- (ii) $\forall t \in I \quad \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$.

Jede solche Funktion φ heißt **Lösung der DGL auf I** .

Die Aufgabe wird symbolisiert durch

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}. \quad (1.1)$$

Mit $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)^T$, $f = (f^1, f^2, \dots, f^n)^T$ kann (1.1) auch in einer der Formen

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}^1 = f^1(t, x^1, \dots, x^n) \\ \dot{x}^2 = f^2(t, x^1, \dots, x^n) \\ \dots \\ \dot{x}^n = f^n(t, x^1, \dots, x^n) \end{array} \right\} \text{ oder } \dot{x}^i = f^i(t, x), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.2)$$

geschrieben werden ($f^i \in C^0(G, \mathbb{R})$, $i = 1, 2, \dots, n$). Demgemäß kann von einem *System von n gekoppelten DGLn erster Ordnung* für $\varphi = (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^n)^T$ mit nunmehr n gesuchten differenzierbaren Funktionen $\varphi^i | I \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, gesprochen werden.

Bemerkung Die Stetigkeit der „rechten Seite der DGI“, f , ist zunächst eine Generalvoraussetzung, die später bezüglich x zur stetigen Differenzierbarkeit verschärft werden wird, bezüglich t gegebenenfalls abgeschwächt werden muß. \square

Die Stetigkeitsvoraussetzung erlaubt die sofortige

Folgerung Ist φ Lösung der DGI auf I , dann ist φ auf I sogar stetig differenzierbar. Lösungen sind demgemäß stets mindestens von der Klasse C^1 . \square

Ist $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (1.1), dann heißt $\text{graph } \varphi = \{(t, \varphi(t)) \mid t \in I\} \subset G$ die zugehörige **Integralkurve**. Diese Bezeichnung, wie auch *Integration der DGI* als Synonym für „Bestimmen einer Lösung“, ist historisch bedingt. Lösungen durch Berechnung von Integralen oder gar in Form elementarer Funktionen zu finden, ist nur in ganz wenigen (aber wichtigen!) Ausnahmefällen möglich - nicht, weil es zu schwierig wäre, sondern aus prinzipiellen Gründen. Lösungen sind quantitativ i.a. nur approximativ bestimmbar (Numerik der DGI), sie lassen sich jedoch (bezüglich analytischer und topologischer Eigenschaften) anhand der die DGI bestimmenden Funktion f diskutieren.

Zur DGI gehört stets die Angabe des Gebietes G !

Beispiel 1.2 ($n = 1$).

$$\dot{x} = \tan(tx), \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2. \quad (1.3)$$

Hier ist $f : (t, x) \mapsto \tan(tx)$ auf den Hyperbeln $tx = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht definiert. (1.3) wird zu *einer* DGI erst durch Angabe *eines* der unendlich vielen Gebiete, die durch diese Hyperbeläste berandet sind. \square

Auf einem Intervall I kann (wird?) eine DGI unendlich viele Lösungen besitzen.

Beispiel 1.3 ($n = 1$).

$$\dot{x} = 1, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Mit beliebigem $a \in \mathbb{R}$ ist $\varphi : \varphi(t) = t + a$ Lösung auf jedem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Die Integralkurven bilden eine Schar paralleler Geraden. Durch einen vorgegebenen Punkt (τ, ξ) geht genau eine Integralkurve (diejenige zu $a = \xi - \tau$). Die letzte Aussage gilt nicht für jede DGI. \square

Beispiel 1.4 ($n = 1$).

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

Probe bestätigt: Durch den Punkt $(0, 0)$ gehen die beiden Integralkurven zu den Lösungen $\varphi_0 : \varphi_0(t) = 0$, $\varphi_1 : \varphi_1(t) = t^2$, jeweils mit $t \in \mathbb{R}^+$. \square

Definition 1.5 Unter dem **Anfangswertproblem (AWP) zur DGI (1.1)** zum vorgegebenen Punkt $(\tau, \xi) \in G$ soll folgende Aufgabe verstanden werden.

Finde ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $\tau \in I$ und auf I eine Lösung φ der DGI (1.1) mit $\varphi(\tau) = \xi$.
Symbol der Aufgabe:

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi, \quad (t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}. \quad (1.4)$$

Für Anfangswertprobleme sind vorrangig die Fragen der *Existenz* und der *Unität* von Lösungen zu klären: Unter welchen Bedingungen hat (1.4) eine Lösung und wenn ja, genau eine? (Vergleiche Beispiele 1.3 und 1.4).

Beispiel 1.6 ($n = 1$).

$$\dot{x} = -x^2, \quad x(1) = 1, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^2.$$

$\varphi : \varphi(t) = \frac{1}{t}, t \in I = (0, +\infty)$, löst diese Aufgabe. Die Funktionen $\tilde{\varphi} : \tilde{\varphi}(t) = \frac{1}{t}, t \in \tilde{I} \subset I$ mit $1 \in \tilde{I}$, sind ebenfalls Lösungen, jedoch ist jedes $\tilde{\varphi}$ eine Einschränkung von φ auf ein Teilintervall von I . Offensichtlich ist I das maximal mögliche Intervall für diese Lösungen. Die Integralkurve $\text{graph } \varphi$ zum Anfangspunkt $(\tau, \xi) = (1, 1)$ liegt schlicht über der positiven t -Halbachse, sie ist maximal in dem Sinn, daß sie nicht nach links glatt fortgesetzt werden kann. Ob es außer φ weitere Lösungen gibt, die vielleicht auch für $t \leq 0$ definiert sind, bleibt an dieser Stelle unbeantwortet. \square

1.2 Geometrische und kinematische Deutung der Differentialgleichung

Zur Vereinfachung der Diskussion soll G als Zylindergebiet $G = \mathbb{R} \times \mathcal{D}$ des \mathbb{R}^{n+1} angenommen werden. Bei beliebig fixiertem $t \in \mathbb{R}$ läßt sich die rechte Seite $f(t, \cdot) | \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ als ein *Vektorfeld* auf dem Gebiet $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ auffassen. Lösungen der DGL $\dot{x} = f(t, x)$ sind dann gemäß Definition 1.1. (ii) parametrisierte Kurven $t \mapsto \varphi(t)$ in \mathcal{D} , die bei jedem Parameterwert $t \in I$ den entsprechenden Vektor $f(t, \varphi(t))$ des Vektorfeldes als Tangentenvektor besitzen. Gleichermäßen hat die zur Lösung φ gehörige Integralkurve $\text{graph } \varphi = \{(t, \varphi(t)) | t \in I\} \subset G$ in jedem ihrer Punkte den dort vorliegenden Vektor $(1, f(t, \varphi(t)))$ des Vektorfeldes $(t, x) \mapsto (1, f(t, x))$ („Richtungsfeld“) als Tangentenvektor: „die Kurven passen auf das Vektorfeld“.

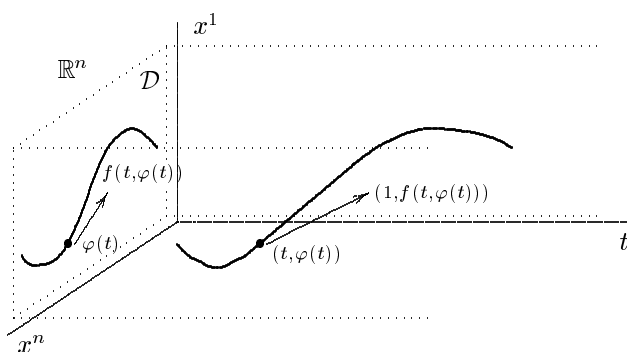


Fig.1.1

Mitunter ist es zweckmäßig (oder vom physikalischen Hintergrund der DGL vorgegeben), die unabhängige Variable $t \in \mathbb{R}$ als *Zeit* aufzufassen. In dieser Interpretation beschreibt eine Lösung φ der DGL mit $\varphi(\tau) = \xi$ (Anfangswertproblem) die *Bewegung* eines (beobachtbaren)

Punktes in \mathcal{D} : zur Zeit τ befindet sich der Punkt an der Stelle ξ und durchläuft mit wachsender Zeit t gemäß $t \mapsto x = \varphi(t)$ eine *Bahnkurve*, deren Tangentenvektor $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ nun die Bedeutung der *Geschwindigkeit* hat. Demgemäß ist dann f als ein *Geschwindigkeitsfeld* auf \mathcal{D} zu verstehen. Dieses Feld ist *stationär* (zeitinvariant), falls f nicht von t abhängt - die DGL, $\dot{x} = f(x)$, heißt in diesem Fall eine **autonome Differentialgleichung**.

Ist f explizit von t abhängig, dann ist das Geschwindigkeitsfeld *instationär* (zeitvariant), die DGL heißt **heteronom**. Autonome und heteronome DGLn zeigen, wie später herausgearbeitet wird, wesentliche Unterschiede in den Eigenschaften ihrer Lösungsmengen.

Jede heteronome DGL $\dot{x} = f(t, x)$ kann unter Dimensionserhöhung formal als autonome DGL geschrieben (und untersucht) werden:

Setze $y := (t, x) \in \mathbb{R}^{n+1}$, dann ist $\dot{y} = (1, \dot{x})$, und mit $F(y) := (1, f(t, x))$ folgt $\dot{y} = F(y)$.

1.3 Einordnung der Differentialgleichung n -ter Ordnung im \mathbb{R}^1

Definition 1.7 Eine *explizite DGL n -ter Ordnung* im \mathbb{R}^1 , mit dem Symbol

$$y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad (1.5-a)$$

ist folgende Aufgabe.

Gegeben: Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $g \in C^0(G, \mathbb{R})$.

Gesucht: Eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ n -mal differenzierbare Funktion $\psi | I \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften

- (i) $\forall t \in I \quad (t, \psi(t), \psi'(t), \dots, \psi^{(n-1)}(t)) \in G$;
- (ii) $\forall t \in I \quad \psi^{(n)}(t) = g(t, \psi(t), \psi'(t), \dots, \psi^{(n-1)}(t))$.

ψ heißt dann eine **Lösung der DGL auf dem Intervall I** .

Mit der formalen Umbenennung $x^1 := y, x^2 := y', \dots, x^n := y^{(n-1)}$ gilt folgendes: Ist ψ eine Lösung von (1.5-a), dann ist (Ableitung wieder durch „ \cdot “ bezeichnet) $\varphi := (\psi, \psi', \dots, \psi^{(n-1)})^T$ eine Lösung der DGL

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}^1 = \quad \quad \quad x^2 \\ \dot{x}^2 = \quad \quad \quad x^3 \\ \dots \\ \dot{x}^{n-1} = \quad \quad \quad x^n \\ \dot{x}^n = g(t, x^1, x^2, x^3, \dots, x^n) \end{array} \right\} =: f(t, x). \quad (1.5-b)$$

Umgekehrt, ist $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^n)^T$ Lösung von (1.5-b), dann ist $\dot{\varphi}^1 = \varphi^2, \dot{\varphi}^2 = \varphi^3, \dots, \dot{\varphi}^{n-1} = \varphi^n$; φ^n ist differenzierbar, also ist φ^1 n -mal differenzierbar, und $\psi := \varphi^1$ löst die DGL (1.5-a). Somit ist die DGL (1.5-a) der DGL (1.5-b) äquivalent, die Theorie der DGLn n -ter Ordnung im \mathbb{R}^1 ist in diesem Sinn in der Theorie der DGLn 1. Ordnung im \mathbb{R}^n enthalten. Gewisse Besonderheiten reflektieren sich in der charakteristischen Besetzung der oberen Zeilen der rechten Seite in (1.5-b).

Beispiel 1.8 (Harmonischer Oszillator mit Kreisfrequenz $\omega \in \mathbb{R}$)

$$\ddot{y} = -\omega^2 y, \quad (t, y) \in \mathbb{R}^2$$

ist äquivalent zu $\begin{matrix} \dot{x}^1 & = & x^2 \\ \dot{x}^2 & = & -\omega^2 x^1 \end{matrix}$ oder auch $\begin{matrix} \dot{x}^1 & = & \omega x^2 \\ \dot{x}^2 & = & -\omega x^1 \end{matrix}, (t, x^1, x^2) \in \mathbb{R}^3.$ □

1.4 Elementare Typen von Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden zwei Typen von DGLn im \mathbb{R}^1 behandelt, deren Lösungen durch *Quadratur im weiteren Sinn* (d.h. mittels Berechnung von Integralen gegebener Funktionen und Auflösung von Gleichungen) angegeben werden können. Diese Typen treten sehr häufig in Erscheinung, an ihnen lassen sich etliche für DGLn wesentliche Phänomene diskutieren. Beispielhaft werden einige weitere Typen von DGLn angeführt, die durch geeignete Transformationen auf elementaren Typ reduziert werden können.

1.4.1 Die Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

Definition 1.9 Gegeben seien zwei stetige Funktionen $g \mid (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ und $h \mid (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $a, b, c, d \in \bar{\mathbb{R}}$ ($\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).

Dann heißt die DGL

$$\dot{x} = g(t) h(x), \quad (t, x) \in G = (a, b) \times (c, d),$$

eine **DGL mit getrennten Veränderlichen**.

Die rechte Seite der DGL hat Produktform, $f(t, x) = g(t) h(x)$, das Definitionsgesbiet G ist ein (gegebenenfalls unbeschränktes) achsenparalleles *Rechteck* des \mathbb{R}^2 .

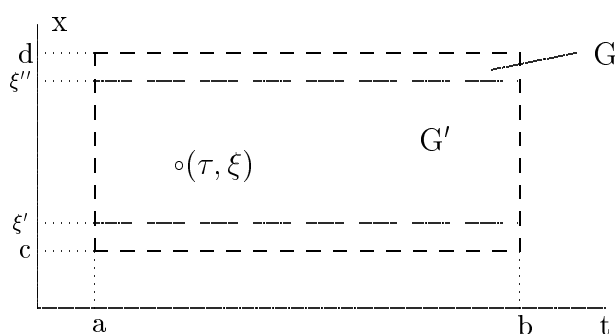


Fig.1.2

1) Voruntersuchung: Nullstellen von h . Sei $x_o \in (c, d)$, $h(x_o) = 0$. Dann ist $\varphi_o \mid (a, b) \rightarrow \mathbb{R} : \varphi_o(t) := x_o$ eine Lösung der DGL. Somit erzeugt jede Nullstelle von h eine spezielle (konstante) Lösung, die auf dem ganzen Intervall $I = (a, b)$ definiert ist.

Diese Voruntersuchung muß in jedem Fall allem weiteren Suchen nach Lösungen vorangestellt werden!

Die Graphen dieser konstanten Lösungen zerlegen das Rechteck G in disjunkte offene Rechtecke, auf denen h keine Nullstellen besitzt. Alle folgenden Untersuchungen finden in diesen Rechtecken statt.

2) Es sei $G' = (a, b) \times (\xi', \xi'')$ ein solches Rechteck mit $h(x) \neq 0$ für alle $x \in (\xi', \xi'')$, sei $(\tau, \xi) \in G'$ ein beliebig gewählter Anfangspunkt.

(a) Es sei φ eine Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = g(t)h(x)$, $(t, x) \in G'$, $x(\tau) = \xi$, auf dem Intervall $I \subset (a, b)$. Dann ist $\varphi(\tau) = \xi$, $\text{graph } \varphi \subset G'$, somit $h(\varphi(t)) \neq 0$ für alle $t \in I$, $\dot{\varphi}(t) = g(t)h(\varphi(t))$ für alle $t \in I$. Da $h(\varphi(t)) \neq 0$, gilt gleichermaßen $\forall t \in I \quad \frac{1}{h(\varphi(t))} \dot{\varphi}(t) = g(t)$, und unter Verwendung der Stammfunktionen (Integralberechnung!)

$$\Gamma(t) := \int_{\tau}^t g(s) ds \quad , \quad H(x) := \int_{\xi}^x \frac{1}{h(s)} ds \quad (1.6)$$

heißt das $\frac{d}{dt}H(\varphi(t)) = \frac{d}{dt}\Gamma(t)$. Da wegen der Wahl der unteren Integrationsgrenzen $\Gamma(\tau) = H(\xi) = H(\varphi(\tau)) = 0$ ist, ergibt eine Integration $\int_{\tau}^t \dots dt$ sofort

$$\forall t \in I \quad H(\varphi(t)) = \Gamma(t). \quad (1.7)$$

Auf dem Intervall (ξ', ξ'') ist $H'(x) = \frac{1}{h(x)}$ entweder positiv oder negativ, H ist also dort streng monoton und besitzt eine Inverse H^{-1} . Da gemäß (1.7) für jedes $t \in I \quad \Gamma(t) \in \text{range } H = \text{dom } H^{-1}$, folgt aus (1.7) $\forall t \in I \quad \varphi(t) = H^{-1}(\Gamma(t))$. Die Lösung φ des Anfangswertproblems erlaubt somit auf ihrem Definitionsintervall I die *Darstellung* $\varphi = H^{-1} \circ \Gamma$.

(b) Jede zu gegebenem $(\tau, \xi) \in G'$ so konstruierte Funktion $\varphi := H^{-1} \circ \Gamma$ ist, auf einem wohlbestimmten Intervall I , tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems.

H ist auf (ξ', ξ'') erklärt, stetig und streng monoton, bildet das Intervall also eineindeutig auf ein Intervall $(\gamma, \delta) \subset \mathbb{R}$ ab, es existiert $H^{-1} | (\gamma, \delta) \rightarrow (\xi', \xi'')$. Die obige Gleichung (1.7) legt es nahe, auf $G' = (a, b) \times (\xi', \xi'')$ die Gleichung $H(x) = \Gamma(t)$ zu betrachten und nach ihrer Auflösbarkeit nach x zu fragen.

Es ist $\Gamma(\tau) = 0 = H(\xi) \in (\gamma, \delta)$. Da Γ stetig ist, gibt es ein Intervall I mit $\tau \in I$, so daß $\forall t \in I \quad \Gamma(t) \in (\gamma, \delta) = \text{dom } H^{-1}$. Also ist für jedes $t \in I$ die Gleichung nach x auflösbar, und durch

$$x = H^{-1}(\Gamma(t)) =: \varphi(t)$$

ist eine Funktion $\varphi | I \rightarrow (\xi', \xi'')$ definiert. Diese ist nach ihrer Konstruktion aus den Stammfunktionen der stetigen Funktionen g und $\frac{1}{h}$ differenzierbar, es ist $\varphi(\tau) = H^{-1}(0) = \xi$ und

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{H'(H^{-1}(\Gamma(t)))} \dot{\Gamma}(t) = h(\varphi(t)) g(t).$$

Somit ist $\varphi := H^{-1} \circ \Gamma$ auf dem Intervall $I \subset (a, b)$ Lösung des Anfangswertproblems.

Die Überlegungen unter 2) haben gezeigt, daß *in jedem Rechteck* $G' = (a, b) \times (\xi', \xi'')$ (mit

$h(x) \neq 0, x \in (\xi', \xi'')$) jede Anfangswertaufgabe zu einem Anfangspunkt $(\tau, \xi) \in G'$ genau eine Lösung besitzt. Diese ist von der Form $\varphi = H^{-1} \circ \Gamma$, wobei H und Γ die oben eingeführten Stammfunktionen sind. Sie ist definiert auf dem eindeutig bestimmten maximalen Intervall I mit $\tau \in I$ und $\Gamma(I) \subset (\gamma, \delta) = H((\xi', \xi''))$.

Die *Regel* zum Lösen der DGL auf dem Rechteck G' ist also folgende:

- (i) Für $t, \tau \in (a, b), x, \xi \in (\xi', \xi'')$ = Intervall ohne Nullstellen von h berechne man die Stammfunktionen Γ und H nach (1.6);
- (ii) man betrachte die Gleichung $H(x) = \Gamma(t)$,
 - (a) stelle fest, für welche $t \Gamma(t) \in H((\xi', \xi''))$ gilt - diese t bilden ein Intervall I mit $\tau \in I$,
 - (b) löse die Gleichung $H(x) = \Gamma(t)$ für $t \in I$ nach x auf, $\varphi(\cdot) = (H^{-1} \circ \Gamma)(\cdot)$ ist die Lösung des AWP auf I (die Gleichungsauflösung kann natürlich praktische Schwierigkeiten bereiten).

3) Aus den obigen Überlegungen folgt schließlich, daß auch auf dem gesamten Rechteck G jede Anfangswertaufgabe eine Lösung besitzt (ist $h(\xi) = 0$, dann ist die konstante Funktion $\varphi(t) = \xi$ eine Lösung). Auf G ist die Unität damit jedoch noch nicht gesichert, denn, falls für die Lösung $\varphi | I = (\alpha, \beta) \rightarrow (\xi', \xi'')$ auf G' z.B. $\beta < b, \xi'' < d$ und der linksseitige Grenzwert $\varphi(\beta - 0) = \xi''$ ist, dann läßt sich φ durch die konstante Funktion $\bar{\varphi} | (\beta, b) \rightarrow \mathbb{R} : \bar{\varphi}(t) = \xi''$ über β hinaus nach rechts stetig differenzierbar *fortsetzen*, so daß die Anfangswertaufgabe zum Anfangspunkt (β, ξ'') mindestens zwei Lösungen besitzt (vgl. dazu Beispiele 1.4 und 1.12). Entscheidend für die Unität ist somit das Verhalten der Funktion h in ihren Nullstellen.

Beispiel 1.10 (Populationsdynamik nach Verhulst)

$$\dot{x} = x(1 - x), (t, x) \in \mathbb{R}^2, x(\tau) = \xi.$$

Hier ist $g(t) = 1, h(x) = x(1 - x)$, beide Funktionen sind auf ganz \mathbb{R} definiert.

Konstante Lösungen der DGL ($h(x) = 0$) : $\varphi_0(t) = 0, \varphi_1(t) = 1$.

Zerlegung von \mathbb{R} in drei *Streifen*:

$$G_1 := \{(t, x) | t \in \mathbb{R}, x < 0\}, G_2 := \{(t, x) | t \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}, G_3 := \{(t, x) | t \in \mathbb{R}, x > 1\}.$$

$(t, x) \in G_1$:

$$\Gamma(t) = t - \tau, \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \text{ (Partialbruchzerlegung),}$$

$$\begin{aligned} H(x) &= \log |x| - \log |1-x| - \log |\xi| + \log |1-\xi|, \xi, x < 0 \\ &= \log \frac{x}{x-1} - \log \frac{\xi}{\xi-1} \end{aligned}$$

Aufzulösende Gleichung $H(x) = \Gamma(t) : \log \frac{x}{x-1} = t - t_o, t_o := \tau - \log \frac{\xi}{\xi-1}$. Für $x < 0$ ist der Wertevorrat des Logarithmus auf der linken Seite $(-\infty, 0)$, die Gleichung ist für alle $t < t_o$ auflösbar, die Lösung ist nach kurzer Rechnung

$$\varphi(t) = \frac{\exp(t - t_o)}{\exp(t - t_o) - 1}, t \in (-\infty, t_o), t_o = \tau - \log \frac{\xi}{\xi - 1}.$$

Es ist $\varphi(t_o - 0) = -\infty$: die Lösung „explodiert“ zu der endlichen Zeit t_o .

$(t, x) \in G_2$:

Mit $\xi, x \in (0, 1)$ ist jetzt $H(x) = \log \frac{x}{1-x} - \log \frac{\xi}{1-\xi}$, $\Gamma(t) = t - \tau$.

Der Wertevorrat von H ist jetzt ganz \mathbb{R} , die Gleichung $H(x) = \Gamma(t)$ ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ auflösbar, die Lösung ist

$$\varphi(t) = \frac{\exp(t - t_o)}{1 + \exp(t - t_o)}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad t_o = \tau - \log \frac{\xi}{1 + \xi},$$

es ist $\varphi(-\infty) = 0$, $\varphi(+\infty) = 1$.

$(t, x) \in G_3$:

Mit $\xi > 1$ ist $H(x) = \log \frac{x}{x-1} - \log \frac{\xi}{\xi-1}$, $\Gamma(t) = t - \tau$. Der Wertevorrat des Logarithmus ist jetzt $(0, +\infty)$, die Gleichung $H(x) = \Gamma(t)$ ist für jedes $t > t_o$ auflösbar, die Lösung ist

$$\varphi(t) = \frac{\exp(t - t_o)}{\exp(t - t_o) - 1}, \quad t \in (t_o, +\infty), \quad t_o = \tau - \log \frac{\xi}{\xi - 1}.$$

Es ist $\varphi(t_o+0) = +\infty$. In Figur 1.3. sind die Integralkurven skizziert. Die speziellen Integral-

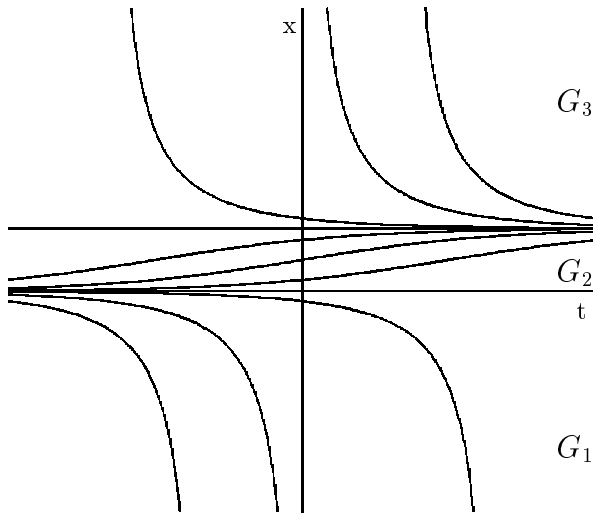


Fig. 1.3

kurven (zu konstanten Lösungen) sind Asymptoten für die anderen Integralkurven. Durch jeden Punkt $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ geht genau eine Integralkurve: Unität in \mathbb{R}^2 ! \square

Beispiel 1.11 $\dot{x} = x^2 \sin t$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, $x(\tau) = \xi$.

Hier ist $g(t) = \sin t$, $h(x) = x^2$, es gibt eine konstante Lösung: $\varphi_o(t) = 0$. graph φ_o zerlegt den \mathbb{R}^2 in die Halbebenen $G^+ : x > 0$ und $G^- : x < 0$. Im folgenden wird nur G^+ betrachtet.

Mit $(\tau, \xi) \in G^+$ sind $\Gamma(t) = -\cos t + \cos \tau$, $H(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{\xi}$. Aufzulösen ist die Gleichung $\frac{1}{x} = \cos t - \cos \tau + \frac{1}{\xi}$. Wegen $\frac{1}{x} > 0$ auf G^+ muß $\cos t - \cos \tau + \frac{1}{\xi} > 0$ sein. Dann ist die Lösung des Anfangswertproblems $\varphi(t) = [\cos t - \cos \tau + \frac{1}{\xi}]^{-1}$, $t \in I$, wobei I dasjenige Intervall ist, das τ enthält und auf dem $\cos t > \cos \tau - \frac{1}{\xi}$ ist. Der Sachverhalt soll an den Anfangswertproblemen mit $\tau = 0$ geklärt werden. Wegen der Geradheit des Kosinus ist I dann das Intervall mit Mittelpunkt 0, auf dem $\cos t > 1 - \frac{1}{\xi}$ ist: $I = \mathbb{R}$ für $\xi < \frac{1}{2}$; $I = (-\pi, \pi)$ für $\xi = \frac{1}{2}$, für wachsendes $\xi > \frac{1}{2}$ immer kürzer werdend, $I \rightarrow \emptyset$ für $\xi \rightarrow +\infty$.

Die Lösungen zu Anfangspunkten $(0, \xi)$ mit $\xi < \frac{1}{2}$ sind somit auf ganz \mathbb{R} definiert. Jede

Lösung mit $\xi \geq \frac{1}{2}$ besitzt ihr eigenes Existenzintervall (s. Fig. 1.4). Aus der 2π -Periodizität bzgl. t der rechten Seite der DGl folgt, daß in jedem Vertikalstreifen $\{(t, x) \mid (2k-1)\pi < t < (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}, x > 0\}$ die gleiche Schar von Integralkurven wie im skizzierten Streifen ($k=0$) vorliegt.

In den Streifen mit $x < 0$ liegen genau die an der t -Achse gespiegelten und um π verschobenen Integralkurven. ($y := -x, s := t + \pi$ überführt die DGl in $\dot{y} = y^2 \sin s$.) \square

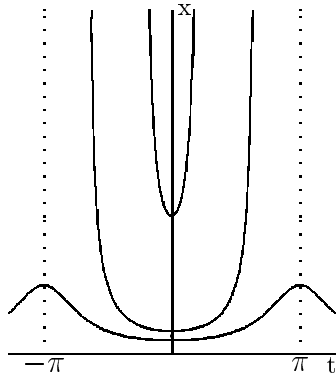


Fig. 1.4

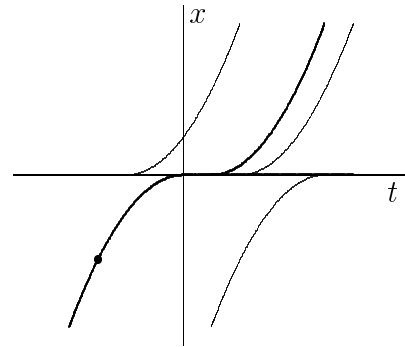


Fig.1.5

Beispiel 1.12 (Durcharbeitung von Beispiel 1.4)

$$\dot{x} = 2\sqrt{|x|}, (t, x) \in \mathbb{R}^2, x(\tau) = \xi. g(t) = 1, h(x) = 2\sqrt{|x|}.$$

Aus der Lösung der Gleichung $h(x) = 0$ ergibt sich die konstante Lösung $\varphi_0(t) = 0, t \in \mathbb{R}$. Es verbleiben die Betrachtungen in den beiden Streifen $x > 0$ und $x < 0$.

$$\begin{aligned} x > 0: \quad & h(x) = 2\sqrt{x}, \quad H(x) = \sqrt{x} - \sqrt{\xi}, \quad \Gamma(t) = t - \tau; \\ & \text{Aufzulösende Gleichung: } \sqrt{x} = t - \tau + \sqrt{\xi} > 0; \\ & \text{Lösung: } \varphi(t) = (t - t_o)^2, \quad t > t_o, \quad t_o := \tau - \sqrt{\xi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x < 0: \quad & h(x) = 2\sqrt{-x}, \quad H(x) = -\sqrt{-x} + \sqrt{-\xi}, \quad \Gamma(t) = t - \tau; \\ & \text{Aufzulösende Gleichung: } -\sqrt{-x} = t - \tau - \sqrt{-\xi} < 0; \\ & \text{Lösung: } \varphi(t) = -(t - t_o)^2, \quad t < t_o, \quad t_o := \tau + \sqrt{-\xi}. \end{aligned}$$

Die Integralkurven sind Halbparabeln. In $G^+(x > 0)$ bzw. $G^-(x < 0)$ ist die Anfangswertaufgabe eindeutig lösbar. Jede Halbparabel mündet für $t \rightarrow t_o$ glatt (!) in die t -Achse (spezielle Integralkurve!). Damit ist die Unität der Lösungen in $G = \mathbb{R}^2$ zerstört: durch jeden Punkt $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ gehen unendlich viele Integralkurven der Form untere Halbparabel \cup Stück der t -Achse \cup obere Halbparabel. Vergleiche Figur 1.5. (Es wird sich zeigen, daß dieses Phänomen mit der Nichtdifferenzierbarkeit von h bei $x = 0$ zusammenhängt.) \square

Bemerkung Die in Beispiel 1.6 offen gebliebene Frage kann jetzt durch Rechnung geklärt werden, denn diese DGl ist vom eben behandelten Typ. Wie ist die Antwort? \square

1.4.2 Die lineare Differentialgleichung im \mathbb{R}^1

Definition 1.13 Eine DGl $\dot{x} = f(t, x)$ heißt **lineare Differentialgleichung**, falls $f(t, \cdot)$ affin-linear (bezüglich x) ist.

Diese Definition gilt gleichermaßen für $x \in \mathbb{R}^1$ wie $x \in \mathbb{R}^n, n > 1$. In \mathbb{R}^1 bedeutet das $f(t, x) = a(t)x + b(t)$ mit zwei gegebenen stetigen Funktionen $a | I \rightarrow \mathbb{R}, b | I \rightarrow \mathbb{R}$ (auf einem gemeinsamen Definitionsintervall).

Die **lineare DGI im \mathbb{R}^1** ist somit

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), (t, x) \in I \times \mathbb{R}. \quad (1.8)$$

Die nach der Definition besser zutreffende Bezeichnung „affin-lineare DGI“ ist nicht gebräuchlich, statt dessen nennt man die DGI (1.8) **linear homogen**, falls $\forall t \in I b(t) = 0$, anderenfalls **linear inhomogen** mit der **Inhomogenität** $b(\cdot)$.

Abweichend von der bisherigen Vorgehensweise soll für diese DGI zunächst nach der Menge aller Lösungen gefragt und erst danach das Anfangswertproblem betrachtet werden.

Ist x eine auf I stetig differenzierbare Funktion, dann definiert die Zuordnung $x \mapsto \dot{x} - a(\cdot)x =: (\frac{d}{dt} - a(\cdot))x$ einen *linearen Operator* \mathbf{L} , der den reellen Vektorraum $C^1(I, \mathbb{R})$ in den Vektorraum $C^0(I, \mathbb{R})$ abbildet:

$$\mathbf{L} | C^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}).$$

Damit kann die DGI (1.8) als eine *lineare Operatorgleichung* aufgefaßt werden:

$$\text{Finde } x \in C^1(I, \mathbb{R}) \text{ so, daß } \mathbf{L}x = b.$$

Für die Lösungen linearer Operatorgleichungen gilt der folgende allgemeine Satz, auf den auch später zurückgegriffen wird.

Satz 1.14 Gegeben seien zwei reelle Vektorräume X und Y , ein linearer Operator

$\mathbf{L} | X \rightarrow Y$ und ein Element $y \in Y$.

\mathcal{L}_o sei die Menge aller Lösungen der homogenen Operatorgleichung $\mathbf{L}x = 0$ (d.h. $\mathcal{L}_o = \ker \mathbf{L}$), \mathcal{L} sei die Menge aller Lösungen der inhomogenen Operatorgleichung $\mathbf{L}x = y$.

Dann ist $\mathcal{L}_o \subset X$ ein reeller Vektorraum und es ist, falls $\mathcal{L} \neq \emptyset$, $\mathcal{L} = x_p + \mathcal{L}_o := \{x = x_p + x_o | x_p \text{ eine Lösung von } \mathbf{L}x = y, x_o \in \mathcal{L}_o\}$, eine lineare Mannigfaltigkeit in X .

Beweis

1. Mit $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_o$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist $\mathbf{L}(\lambda x_1 + \mu x_2) = \lambda \mathbf{L}x_1 + \mu \mathbf{L}x_2 = 0$,
d.h. $\lambda x_1 + \mu x_2 \in \mathcal{L}_o$.
2. Mit $x_1, x_2 \in \mathcal{L}$ ist $\mathbf{L}x_1 = \mathbf{L}x_2 = y$, also $\mathbf{L}(x_1 - x_2) = 0$, d.h. $x_1 - x_2 \in \mathcal{L}_o$.
3. Sei eine **partikuläre Lösung** $x_p \in \mathcal{L}$ fest gewählt. Dann ist für $x \in \mathcal{L}$ $x - x_p =: x_o \in \mathcal{L}_o$,
d.h. jedes $x \in \mathcal{L}$ hat die Form $x = x_p + x_o$: $\mathcal{L} \subset x_p + \mathcal{L}_o$.
4. Sei $x_p \in \mathcal{L}$ fest, beliebig $x_o \in \mathcal{L}_o$, dann ist $\mathbf{L}(x_p + x_o) = \mathbf{L}x_p + \mathbf{L}x_o = y + 0$,
d.h. $x_p + x_o \in \mathcal{L}$, also $x_p + \mathcal{L}_o \subset \mathcal{L}$.

■

Mit diesem Satz erledigt sich die Aufgabe, die Menge \mathcal{L} aller Lösungen der DGI (1.8) zu bestimmen, in zwei Schritten.

1. Bestimme \mathcal{L}_o , die Menge aller Lösungen der homogenen DGI $\dot{x} = a(t)x$.

Diese DGI ist vom Typ der getrennten Variablen. Nach dem Lösungsschema des Abschnittes

1.4.1 ergibt sich als Lösung (wobei hier τ und ξ nicht festgelegt werden, Γ und H sind somit als beliebige Stammfunktionen von g und $1/h$ anzusehen)

$$x_o(t) = C \exp(A(t)), \quad t \in I. \quad (1.9)$$

Dabei ist $A(t) = \int a(t) dt$ irgendeine Stammfunktion zu a und C eine beliebige reelle Konstante ($C = 0$ liefert die spezielle konstante Lösung). Somit ist

$$\mathcal{L}_o = \{x \mid x(t) = C \exp(A(t)), \quad C \in \mathbb{R}\},$$

entsprechend wird (1.9) mit $C \in \mathbb{R}$ die **allgemeine Lösung der homogenen DGL** genannt. Ersichtlich hat der Vektorraum \mathcal{L}_o die Dimension 1, $\{\exp \circ A\}$ ist eine Basis.

2. Bestimme eine Lösung x_p der inhomogenen DGL $\dot{x} = a(t)x + b(t)$.

In einfachen Fällen läßt sich ein x_p erraten. (z.B.: $\dot{x} = tx + t$, $x_p(t) = -1$).

In *jedem* Fall führt folgender *Ansatz* zum Ziel:

$$x_p(t) = u(t) \exp(A(t)). \quad (1.10)$$

$u(\cdot)$ steht an Stelle der Konstanten in (1.9) (**Variation der Konstanten**) und ist so zu bestimmen, daß x_p die inhomogene DGL löst:

$$\dot{x}_p = \dot{u} \exp(A) + u \exp(A) \dot{A} \stackrel{!}{=} a u \exp(A) + b.$$

Wegen $\dot{A} = a$ bleibt

$$\dot{u} = \exp(-A) b,$$

u folgt durch Integration: $u(t) = \int \exp(-A(t)) b(t) dt$, und

$$x_p(t) = \exp(A(t)) \int \exp(-A(t)) b(t) dt$$

ist eine Lösung der inhomogenen DGL (Probe!).

Somit ist *jede* Lösung der DGL (1.8) von der Form

$$x(t) = C \exp(A(t)) + \exp(A(t)) \int_{\alpha}^t \exp(-A(s)) b(s) ds, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (1.11)$$

wobei $\alpha \in I$ eine beliebig gewählte, feste Integrationsgrenze ist. \mathcal{L} ist die Menge aller Funktionen (1.11).

Eine Lösung des Anfangswertproblems zu gegebenem $(\tau, \xi) \in I \times \mathbb{R}$ muß unter diesen Funktionen durch Wahl einer passenden Konstanten C gesucht werden:

$$x(\tau) = C \exp(A(\tau)) + \exp(A(\tau)) \int_{\alpha}^{\tau} \exp(-A(s)) b(s) ds \stackrel{!}{=} \xi.$$

Diese Forderung legt C eindeutig fest, und es folgt mit $A(t) := \int_{\tau}^t a(s) ds$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \xi \exp(A(t)) + \int_{\tau}^t \exp(A(t) - A(s)) b(s) ds \\ &= \exp(A(t)) \left[\xi + \int_{\tau}^t \exp(-A(s)) b(s) ds \right] \end{aligned} \quad (1.12)$$

als einzige, *auf ganz I erklärte* Lösung des Anfangswertproblems, (1.12) ist eine bis auf zwei Quadraturen explizite Darstellung der Lösung.

Daß die Lösungen (1.12) auf dem ganzen Intervall I definiert sind, bedeutet insbesondere, daß bei linearen DGLn die Lösungen keine „Explosionsphänomene“ (wie in den Beispielen 1.10 und 1.11) aufweisen. Trotzdem brauchen die Lösungen, falls I offen ist, natürlich nicht beschränkt zu sein.

Anhand der DGL (1.8) oder mittels der Lösungsformel (1.12) lassen sich (insbesondere für Anwendungen relevante) Fragen wie die folgenden klären.

Unter welchen Bedingungen für $a(\cdot)$ und $b(\cdot)$ besitzt die DGL (1.8) beschränkte Lösungen / nur beschränkte Lösungen?

Seien $a(\cdot)$ und $b(\cdot)$ auf $I = \mathbb{R}$ periodische Funktionen. Unter welchen Bedingungen für $a(\cdot)$ und $b(\cdot)$ gibt es periodische Lösungen/sind alle Lösungen periodisch?

1.4.3 Transformation auf elementare Typen

Manchen DGLn $\dot{x} = f(t, x)$ läßt sich durch eine passende Transformation $z = Z(t, x)$ eine elementare DGL $\dot{z} = g(t, z)$ so zuordnen, daß, zumindest lokal, die Lösungen der beiden DGLn eindeutig einander zugeordnet sind. Dann lassen sich (lokal) Lösungen der originalen DGL durch die inverse Transformation $x = X(t, z)$ aus den bekannten Lösungen der elementaren DGL konstruieren. Dieses Vorgehen soll hier nur an einigen charakteristischen Beispielen demonstriert werden.

Beispiel 1.15 (Ähnlichkeitsdifferentialgleichung)

Mit gegebener Funktion $h \in C^o((c, d), \mathbb{R})$ soll die DGL

$$\dot{x} = h\left(\frac{x}{t}\right), \quad \frac{x}{t} \in (c, d), \quad t > 0, \quad (1.13)$$

betrachtet werden. Das Definitionsgebiet G ist ein „Keil“ in der rechten (t, x) -Halbebene, $G = \{(t, x) \mid ct < x < dt, t > 0\}$.

Transformation: $z = \frac{x}{t}$ bzw. $x = tz$.

Ist $x(\cdot)$ Lösung von (1.13), dann ist $\dot{x} = z + t\dot{z} = h(z)$, d.h., $z(\cdot) : t \mapsto \frac{x(t)}{t}$ genügt der DGL mit getrennten Veränderlichen

$$\dot{z} = \frac{1}{t}(h(z) - z). \quad (1.14)$$

Umgekehrt ist mit jeder Lösung $z(\cdot)$ von (1.14) $x(\cdot) : t \mapsto tz(t)$ Lösung von (1.13). \square

Beispiel 1.16 (Bernoullische DGL)

Mit zwei gegebenen Funktionen $a(\cdot), b(\cdot) \in C^o(I, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ wird die DGL

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha, \quad t \in I, \quad x > 0, \quad (1.15)$$

betrachtet. Für $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ ist die DGL linear, für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ ist x^α nur für positives x erklärt.

Die Transformation $z = x^{1-\alpha}$ überführt (1.15) in die lineare DGL

$$\dot{z} = (1 - \alpha)(a(t)z + b(t)). \quad (1.16)$$

Deren Lösungen sind durch (1.11) gegeben und auf ganz I definiert. Die Rücktransformation $x = z^{1/1-\alpha}$ erfordert die Einschränkung auf solche Teilintervalle $I' \subset I$, auf denen $z(t) > 0$ ist. \square

Beispiel 1.17 (Riccatische DGL)

Mit drei gegebenen Funktionen $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, $c(\cdot) \in C^0(I, \mathbb{R})$ wird die DGL

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t), \quad (t, x) \in I \times \mathbb{R}, \quad (1.17)$$

betrachtet. Es sei eine Lösung $\varphi(\cdot)$ auf $I_o \subset I$ bekannt. Die Transformation $z = \frac{1}{x - \varphi(t)}$ bzw. $x = \frac{1}{z} + \varphi(t)$ überführt die DGL in die lineare DGL

$$\dot{z} = -[2\varphi(t)a(t) + b(t)]z - a(t), \quad (t, z) \in I_o \times \mathbb{R}, \quad (1.18)$$

deren Lösungen auf I_o sich wieder durch (1.11) bestimmen. Die Rücktransformation verlangt die Beschränkung auf Teilintervalle $I'_o \subset I_o$, auf denen $z(t) \neq 0$ ist. \square

Bemerkung Die DGL $\dot{x} = x(1 - x)$ von Beispiel 1.10 ist vom Riccati-Typ. Zur Transformation auf eine lineare DGL empfehlen sich die speziellen Lösungen $\varphi(t) = 0$ oder $\varphi(t) = 1$. \square

Kapitel 2

Existenz und Unität der Lösungen

Lösungen von DGLn wurden in den vorangegangenen Beispielen durch Überlegungen bestimmt, die unmittelbar mit der analytischen Struktur der rechten Seite der DGL verbunden waren. Die eindeutige Lösbarkeit von Anfangswertaufgaben wurde anhand der (bis auf Quadraturen) explizit vorliegenden Lösungen diskutiert.

Existenz- und Unitätsfragen müssen notwendigerweise am Anfang einer Theorie der DGLn stehen. Zumindest muß durch Angabe hinreichender Bedingungen die Existenz und Unität der Lösungen abgesichert werden. Dies wird sich durch die Reduktion des Anfangswertproblems auf eine Integralgleichung und Anwendung eines allgemeinen Fixpunktsatzes erreichen lassen.

Ein hier nicht behandelter *Satz von Peano* sichert die Existenz von Lösungen des Anfangswertproblems bei stetiger rechter Seite der DGL (die Generalvoraussetzung in Definition 1.1), die Unität bleibt dabei offen (die behandelten Beispiele bestätigen diesen Sachverhalt).

2.1 Das Anfangswertproblem als Integralgleichung

Wir betrachten das allgemeine Anfangswertproblem in \mathbb{R}^n ,

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}, \quad x(\tau) = \xi, \quad (2.1)$$

mit gegebener rechter Seite $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$. Ist $\varphi \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine Lösung von (2.1), dann gilt $\forall t \in I \quad \dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ und $\varphi(\tau) = \xi$. Integration liefert $\int_{\tau}^t \dot{\varphi}(s) ds = \varphi(t) - \varphi(\tau) = \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds$, also gilt

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad (2.2)$$

d.h., die Lösung φ genügt einer Integralgleichung.

Die Gleichung (2.2) ist schon für stetige Funktionen φ sinnvoll. Sei φ eine auf einem Intervall I mit $\tau \in I$ stetige Funktion, $\varphi \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$, sei $\text{graph } \varphi \subset G$, und es gelte (2.2). Dann folgt für $t = \tau$ sofort $\varphi(\tau) = \xi$. Auf Grund der Stetigkeit des Integranden $f(\cdot, \varphi(\cdot))$ ist die rechte Seite von (2.2) nach t differenzierbar, also ist auch die linke Seite, $\varphi(\cdot)$, differenzierbar, und die Differentiation ergibt $\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$ für alle $t \in I$. (Ist $t \in I$ ein Randpunkt von I , dann ist unter $\dot{\varphi}(t)$ natürlich die entsprechende einseitige Ableitung zu verstehen.) Damit

ist auch $\dot{\varphi}$ stetig, und φ ist auf I Lösung des Anfangswertproblems (2.1).
Somit gilt

Satz 2.1 Die Lösungen φ des Anfangswertproblems (2.1) sind genau die stetigen Lösungen der Integralgleichung

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds. \quad (2.3)$$

■

Bemerkung (2.3) ist eine *Volterrasche Integralgleichung 2. Art* (Volterra-Typ: die gesuchte Funktion x tritt im Integranden eines Integrals mit variabler Grenze auf; 2. Art: x tritt auch außerhalb des Integrals auf). Die Herleitung zeigt, daß wegen der Stetigkeit von f jede stetige Lösung von (2.3) automatisch sogar stetig differenzierbar ist. (2.3) ist eine Integralgleichung im \mathbb{R}^n , in Koordinaten $x = (x^1, \dots, x^n)^T$, $f = (f^1, \dots, f^n)^T$ heißt das

$$x^i(t) = \xi^i + \int_{\tau}^t f^i(s, x^1(s), \dots, x^n(s)) ds, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.4)$$

und (2.4) kann als ein System gekoppelter Integralgleichungen in \mathbb{R}^1 aufgefaßt werden. □

Die Lösbarkeit der Anfangswertaufgabe läßt sich an der Integralgleichung (2.3) diskutieren. Diese Untersuchungen verlaufen nach folgendem Programm:

Bei fest vorgegebenem (τ, ξ) wird durch die Zuordnung

$$x(\cdot) \mapsto y(\cdot): y(t) := \xi + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds$$

ein Operator \mathbf{T} definiert, der jede stetige Funktion $x(\cdot)$ auf eine stetige (sogar stetig differenzierbare) Funktion $y(\cdot)$ abbildet (gewisse Feinheiten bezüglich der Definitionsbereiche sind dabei zu beachten): $\mathbf{T} | C^o \rightarrow C^o: y = \mathbf{T}x$. Eine Lösung der Integralgleichung erscheint damit als ein Fixelement von \mathbf{T} : $x = \mathbf{T}x$. *Fixpunktsätze* sind Aussagen über die Existenz von Fixpunkten von Abbildungen. Der *Fixpunktsatz von Banach* gibt hinreichende Bedingungen dafür, daß ein Operator genau einen Fixpunkt besitzt. Da \mathbf{T} durch die Funktion f bestimmt ist, werden wir solche Eigenschaften von f herausarbeiten, die für \mathbf{T} diese gewünschte Eigenschaft garantieren. Diese Eigenschaften von f sind dann hinreichend dafür, daß das Anfangswertproblem (2.1) genau eine Lösung besitzt (Existenz- und Unitätssatz). Natürlich hängen der Operator \mathbf{T} und sein Fixelement auch von dem gewählten Anfangspunkt (τ, ξ) ab. Aussagen darüber, *wie* das Fixelement (die Lösung des Anfangswertproblems) von (τ, ξ) abhängt, werden sich als grundlegend für die qualitative Theorie der DGLn erweisen. Ein erster Schritt zu solchen Aussagen besteht darin, daß (τ, ξ) in einer Umgebung eines festen Punktes (τ_o, ξ_o) als beliebig wählbar zugelassen wird. Damit hängt der Operator vom *Parameter* (τ, ξ) ab, $\mathbf{T}_{(\tau, \xi)}$, und die Fixpunktuntersuchungen beziehen sich auf eine *Familie von Operatoren*.

2.2 Der Fixpunktsatz von Banach

Um Nichtmathematikern das Verständnis des Folgenden zu erleichtern, sollen einige erforderliche Grundbegriffe vorangestellt werden.

Ein *metrischer Raum* ist eine Menge X , zusammen mit einer Abbildung $\varrho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, die folgende Eigenschaften besitzt:

- (i) $\forall x, y \in X \quad \varrho(x, y) \geq 0, \quad \varrho(x, y) = 0 \iff x = y$ (positive Definitheit).
- (ii) $\forall x, y \in X \quad \varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (Symmetrie).
- (iii) $\forall x, y, z \in X \quad \varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Eine solche Funktion ϱ heißt *Metrik* auf X , $\varrho(x, y)$ *Abstand* der Elemente x und y .

Beispiel 2.2

- 1) \mathbb{R} mit dem Standardabstand $\varrho(x, y) := |x - y|$.
- 2) \mathbb{R}^n mit der euklidischen Metrik $\varrho(x, y) := (\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2)^{1/2}$ oder der Maximummetrik $\varrho(x, y) := \max\{|x^i - y^i|, i = 1, \dots, n\}$.
- 3) $C^0[a, b]$ (Menge der stetigen Funktionen $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$) mit der Maximummetrik $\varrho(x, y) := \max\{|x(t) - y(t)|, t \in [a, b]\}$.

□

Die *offene (abgeschlossene) Kugel* im metrischen Raum (X, ϱ) mit dem Mittelpunkt $x_o \in X$ und dem Radius $r > 0$ ist die Menge aller $x \in X$, deren Abstand von x_o kleiner (nicht größer) als r ist: $K(x_o, r) = \{x \in X \mid \varrho(x, x_o) < r\}$, $(K^*(x_o, r) = \{x \in X \mid \varrho(x, x_o) \leq r\})$.

Eine Folge $(x_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset X$ heißt *konvergent*, falls es ein Element $x \in X$ gibt, so daß $\varrho(x_\nu, x) \rightarrow 0$ für $\nu \rightarrow \infty$.

Eine Folge $(x_\nu) \subset X$ heißt *Cauchy-Folge*, falls $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall \nu, \mu \geq n \quad \varrho(x_\nu, x_\mu) < \varepsilon$.

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Der metrische Raum (X, ϱ) heißt *vollständiger metrischer Raum*, falls jede Cauchy-Folge konvergiert. Ist (X, ϱ) vollständig und $A \subset X$ eine abgeschlossene Menge, dann ist (A, ϱ) ebenfalls ein vollständiger metrischer Raum.

Die obigen Beispiele sind vollständige metrische Räume. Ihre Grundmengen sind lineare Räume (Vektorräume) über dem Körper der reellen Zahlen. In diesen Beispielen gilt für den Abstand $\varrho(x, 0)$ eines Elementes vom Nullelement: $\varrho(x - y, 0) = \varrho(x, y), \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \varrho(\alpha x, 0) = |\alpha| \varrho(x, 0)$.

$\|x\| := \varrho(x, 0)$ heißt dann *Norm* von x .

Eine Teilmenge $A \subset X$ eines metrischen Raumes heißt *kompakt*, wenn jede Folge in A eine in A konvergente Teilfolge enthält. $A \subset \mathbb{R}^n$ (mit einer der in Beispiel 2.2 angegebenen Metriken) ist kompakt genau dann, wenn A beschränkt und abgeschlossen ist.

Eine Abbildung F eines metrischen Raumes (X, ϱ) in einen metrischen Raum (Y, ϱ') heißt *stetig*, falls zu jedem $x_o \in X$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß $\varrho(x, x_o) < \delta \implies \varrho'(F(x), F(x_o)) < \varepsilon$.

Satz 2.3 (Der Fixpunktsatz von Banach für eine Familie von Operatoren)

Gegeben seien

- (i) ein vollständiger metrischer Raum (X, ϱ) ;
- (ii) ein metrischer Raum (P, ϱ') ;
- (iii) eine Familie von Operatoren $\{\mathbf{T}_p \mid p \in P\} : \mathbf{T}_p \mid X \rightarrow X$.

Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

V1: Die Operatoren \mathbf{T}_p sind gleichgradig kontraktiv, d.h.

$$\exists \delta \in (0, 1) \quad \forall p \in P \quad \forall x_1, x_2 \in X \quad \varrho(\mathbf{T}_p x_1, \mathbf{T}_p x_2) \leq \delta \cdot \varrho(x_1, x_2)$$

(gleichgradig: δ hängt nicht von p ab).

V2: Die Operatoren der Familie hängen in folgendem Sinn stetig von p ab: ist $z(p, x) := \mathbf{T}_p x$, dann ist $z(\cdot, x) \mid P \rightarrow X$ für jedes $x \in X$ stetig auf P .

V3: P ist kompakt.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Jeder Operator $\mathbf{T}_p, p \in P$, hat genau einen Fixpunkt, $x^*(p)$.
2. Die rekursiv definierte Folge $(x_\nu(p)) \subset X : x_o \in X$ beliebig gewählt, $x_\nu(p) := \mathbf{T}_p x_{\nu-1}(p)$, konvergiert für jedes $p \in P$ gegen den Fixpunkt: $x_\nu(p) \xrightarrow{\varrho} x^*(p), \nu \rightarrow \infty$.
(Sukzessive Approximation des Fixpunktes).
Dabei gilt die a priori-Fehlerabschätzung $\varrho(x^*, x_\nu) \leq \frac{\delta^\nu}{1-\delta} \varrho(x_1, x_o)$.
3. Die Konvergenz $x_\nu(p) \xrightarrow{\varrho} x^*(p)$ ist auf P gleichmäßig, $x^*(\cdot)$ ist auf P stetig. ■

Bemerkung Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz unter 3. bedeutet: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall p \in P \quad \forall \nu \geq n \quad \varrho(x_\nu(p), x^*(p)) < \varepsilon$ (n hängt also nur von ε , nicht von p ab!). □

2.3 Der Existenz- und Unitätssatz von Picard und Lindelöf

Zur Vereinfachung werden wir die Herleitung dieses Satzes für DGLn im \mathbb{R}^1 vornehmen und anschließend die erforderlichen formalen Änderungen angeben, mit denen für DGLn im \mathbb{R}^n wörtlich die gleiche Schlußkette vorliegen würde. Außerdem sollen die simultan zu betrachtenden Anfangswertprobleme alle dieselbe Anfangszeit τ_o besitzen und nur der Anfangswert ξ beliebig aus der Nachbarschaft eines festen Wertes ξ_o zugelassen sein.

Somit werden die Anfangswertprobleme

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \subset G \subset \mathbb{R}^2, \quad x(\tau_o) = \xi$$

und die zugehörigen Integraloperatoren

$$\mathbf{T}_\xi \mid C^o \rightarrow C^o : (\mathbf{T}_\xi x)(t) := \xi + \int_{\tau_o}^t f(s, x(s)) ds$$

betrachtet. Für $f \in C^o(G, \mathbb{R})$ werden schrittweise solche Bedingungen formuliert, unter denen die Operatoren \mathbf{T}_ξ die Voraussetzungen des Satzes 2.3 erfüllen.

I) Da $G \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Menge ist, gibt es zum beliebig fixierten Punkt $(\tau_o, \xi_o) \in G$ zwei Zahlen $a > 0$ und $r > 0$, so daß der zweidimensionale abgeschlossene Quader

$$Q_a := [\tau_o - a, \tau_o + a] \times [\xi_o - r, \xi_o + r]$$

ganz in G liegt. Mit einem beliebigen $\alpha \in (0, a)$, über das noch verfügt wird, ist dann $Q_\alpha \subset Q_a \subset G$.

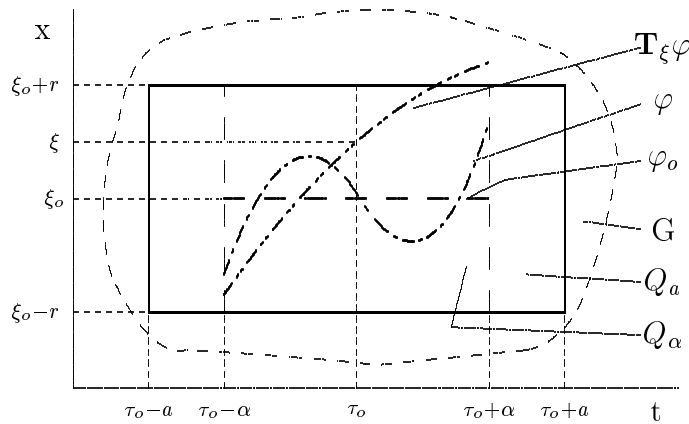


Fig.2.1

Es sei $C^o := C^o([\tau_o - \alpha, \tau_o + \alpha], \mathbb{R})$ mit der Maximummetrik ϱ ausgestattet (vollständiger metrischer Raum!). Es sei φ_o die konstante Funktion $\varphi_o(t) = \xi_o$, und φ sei ein beliebiges Element der Kugel $K^*(\varphi_o, r) \subset C^o$ (d.h. $\varphi \in C^o$ und $\text{graph } \varphi \subset Q_\alpha$).

Als abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raumes C^o ist $K^*(\varphi_o, r)$, ausgestattet mit der Maximummetrik, selbst ein vollständiger metrischer Raum.

Die durch den Operator \mathbf{T}_ξ vermittelte Abbildung $\mathbf{T}_\xi | K^*(\varphi_o, r) \rightarrow C^o$ wird im allgemeinen keine Selbstabbildung von $K^*(\varphi_o, r)$ sein, denn zu beliebigem $\varphi \in K^*(\varphi_o, r)$ wird der Graph des Bildes $T_\xi \varphi$ nicht unbedingt in Q_α liegen. Figur 2.1 läßt aber vermuten, daß dieser gewünschte Sachverhalt vorliegt, wenn ξ nicht zu fern von ξ_o und α hinreichend klein ist.

II) Da f stetig ist, existiert $\max_{Q_a} |f(t, x)| =: M$. Damit ist auch

$$\forall \alpha \in (0, a) \quad \forall (t, x) \in Q_\alpha \quad |f(t, x)| \leq M.$$

Zu beliebig gewähltem $r' \in (0, r)$ und $\xi \in [\xi_o - r', \xi_o + r']$ ist dann wegen $\text{graph } \varphi \subset Q_\alpha$

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{T}_\xi \varphi, \varphi_o) &= \max_{|t - \tau_o| \leq \alpha} \left| \xi + \int_{\tau_o}^t f(s, \varphi(s)) ds - \xi_o \right| \\ &\leq |\xi - \xi_o| + \max_{|t - \tau_o| \leq \alpha} \left| \int_{\tau_o}^t |f(s, \varphi(s))| ds \right| \leq r' + \alpha M. \end{aligned}$$

Also ist $\varrho(\mathbf{T}_\xi \varphi, \varphi_o) \leq r$, wenn nur $\alpha \leq \frac{r-r'}{M}$ gewählt wird, und das heißt

$$\mathbf{T}_\xi | K^*(\varphi_o, r) \rightarrow K^*(\varphi_o, r),$$

\mathbf{T}_ξ ist eine Selbstabbildung des vollständigen metrischen Raumes $K^*(\varphi_o, r)$.

III) Nun muß noch durch eine zusätzliche Forderung an f die Kontraktivität von \mathbf{T}_ξ gewährleistet werden. Mit zwei beliebigen Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 \in K^*(\varphi_o, r)$ ist

$$\varrho(\mathbf{T}_\xi \varphi_1, \mathbf{T}_\xi \varphi_2) \leq \max_{|t-\tau_o| \leq \alpha} \left| \int_{\tau_o}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \right|, \quad (2.5)$$

und \mathbf{T}_ξ ist mit Sicherheit dann eine Kontraktion, wenn die rechte Seite dieser Ungleichung angebar kleiner als $\varrho(\varphi_1, \varphi_2)$ ist. Da, mit $i = 1, 2$, $(s, \varphi_i(s)) \in \text{graph } \varphi_i \subset Q_\alpha \subset Q_a$ ist, genügt dafür die Voraussetzung

(V) Die Funktionen $f(t, \cdot)$ seien auf Q_a gleichgradig Lipschitz-stetig, d.h.,

$$\exists L > 0 \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in Q_a \quad |f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L |x_1 - x_2|.$$

Dann läßt sich die Abschätzung 2.5 fortsetzen,

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{T}_\xi \varphi_1, \mathbf{T}_\xi \varphi_2) &\leq \max_{|t-\tau_o| \leq \alpha} \left| \int_{\tau_o}^t L |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \right| \\ &\leq \max_{|t-\tau_o| \leq \alpha} \left| \int_{\tau_o}^t L \varrho(\varphi_1, \varphi_2) ds \right| = \alpha L \varrho(\varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

Wird $\alpha < \frac{1}{L}$ gewählt, dann ist $\varrho(\mathbf{T}_\xi \varphi_1, \mathbf{T}_\xi \varphi_2) < \delta \varrho(\varphi_1, \varphi_2)$, $\delta := \alpha L < 1$, und das heißt, daß die Operatoren \mathbf{T}_ξ kontraktiv sind. Die Gleichgradigkeit der Kontraktivität bezüglich ξ ist gewährleistet, da δ von ξ unabhängig ist.

Die Beschränktheitskonstante M und die Lipschitzkonstante L für f wurden für den „großen“ Quader Q_a eingeführt. Somit sind sie auch für jeden Quader $Q_\alpha \subset Q_a$ brauchbar und von α unabhängig.

IV) Die Voraussetzungen V2, V3 des Satzes 2.3 sind schnell überprüft:

Der Parameterraum $\Xi = [\xi_o - r', \xi_o + r']$ ist kompakt, und für jedes $\varphi \in K^*(\varphi_o, r)$ und alle $\xi, \xi' \in \Xi$ ist

$$\varrho(\mathbf{T}_\xi \varphi, \mathbf{T}_{\xi'} \varphi) = \max_{|t-\tau_o| \leq \alpha} |\xi - \xi'| = |\xi - \xi'|$$

und damit $\xi \mapsto \mathbf{T}_\xi \varphi$ stetig auf Ξ .

Zwischenergebnis: Wird α so gewählt, daß $0 < \alpha < \min\{a, \frac{r-r'}{M}, \frac{1}{L}\}$, dann genügen die Integraloperatoren \mathbf{T}_ξ den Voraussetzungen 1, 2, 3 des Satzes von Banach (wobei hier konkret $X = K^*(\varphi_o, r) \subset C^o, P = \Xi = [\xi_o - r', \xi_o + r'] \subset \mathbb{R}$). Damit besitzt jeder Operator \mathbf{T}_ξ genau einen Fixpunkt $x^*(\xi) \in C^o$, der stetig von ξ abhängt. Das bedeutet gemäß Satz 2.1, daß jedes Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau_o) = \xi, \quad \xi \in [\xi_o - r', \xi_o + r']$$

genau eine Lösung $\varphi(\cdot; \tau_o, \xi) \in C^1([\tau_o - \alpha, \tau_o + \alpha], \mathbb{R}) \subset C^o$ besitzt, die ebenfalls stetig von ξ abhängt. Dann ist sogar $\varphi(\cdot; \tau_o, \cdot)$ stetig: (der Kürze wegen sei $\varphi(t; \tau_o, \xi) =: \varphi(t, \xi)$)

$$\begin{aligned} |\varphi(t, \xi) - \varphi(t', \xi')| &\leq |\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \xi')| + |\varphi(t, \xi') - \varphi(t', \xi')| \\ &\leq \|\varphi(\cdot, \xi) - \varphi(\cdot, \xi')\|_{C^o} + |\varphi(t, \xi') - \varphi(t', \xi')|. \end{aligned}$$

Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 2.3, 3. ein $\delta_1 > 0$, so daß $\| \varphi(\cdot, \xi) - \varphi(\cdot, \xi') \|_{C^0} < \varepsilon$ falls $|\xi - \xi'| < \delta_1$ (Stetigkeit des Fixelementes $x^*(\cdot)$) und ein $\delta_2(\xi') > 0$, so daß $|\varphi(t, \xi') - \varphi(t', \xi')| < \varepsilon$ falls $|t - t'| < \delta_2$ (Stetigkeit von $\varphi(\cdot, \xi')$). Also ist $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t', \xi')| < 2\varepsilon$, sobald $|t - t'| + |\xi - \xi'| < \delta(\xi') := \delta_1 + \delta_2(\xi')$.

Bemerkung Formale Abänderungen für $n > 1$ sind die folgenden.

$x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n, f = (f^1, \dots, f^n)^T \in C^0(G, \mathbb{R}^n), G \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

$Q_a = [\tau_o - a, \tau_o + a] \times [\xi_o^1 - r, \xi_o^1 + r] \times \dots \times [\xi_o^n - r, \xi_o^n + r] \subset G$.

$C^0 = C^0([\tau_o - \alpha, \tau_o + \alpha], \mathbb{R}^n)$ mit der Metrik $\varrho(\varphi, \psi) = \max_{i=1, \dots, n} \max_{|t - \tau_o| \leq \alpha} |\varphi^i(t) - \psi^i(t)|$.

Lipschitz-Bedingung: $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$ mit der Maximum-Norm des \mathbb{R}^n : $\|x_1 - x_2\| = \max_{i=1, \dots, n} |x_1^i - x_2^i|$. \square

Aus den vorangegangenen Überlegungen folgt unmittelbar

Satz 2.4 (Satz von Picard und Lindelöf)

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ das Grundgebiet der DGl $\dot{x} = f(t, x), f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$.

(τ_o, ξ_o) sei ein fest gewählter Punkt von $G, Q_{a,r}$ ein in G liegender abgeschlossener Quader mit (τ_o, ξ_o) als Mittelpunkt, $Q_{a,r} = \{(t, x) : |t - \tau_o| \leq a, \|\xi - \xi_o\| \leq r\} \subset G$.

$f(t, \cdot)$ sei auf $Q_{a,r}$ gleichmäßig Lipschitz-stetig, d.h.,

$\exists L > 0 \forall (t, x_1), (t, x_2) \in Q_{a,r} \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq L \|x_1 - x_2\|$.

Dann gilt für $0 < r' < r, 0 < \alpha < \min\{a, \frac{r-r'}{M}, \frac{1}{L}\}$, mit $M = \max_{(t,x) \in Q_{a,r}} \|f(t, x)\|$:

(i) Jedes Anfangswertproblem $\dot{x} = f(t, x), (t, x) \in G, x(\tau_o) = \xi, \|\xi - \xi_o\| \leq r'$ besitzt genau eine Lösung $\varphi(\cdot; \tau_o, \xi) \in C^1([\tau_o - \alpha, \tau_o + \alpha], \mathbb{R}^n)$;

(ii) $\varphi(\cdot; \tau_o, \cdot)$ ist stetig auf $Q_{\alpha, r'}$;

(iii) die Iteration

$$\varphi_{k+1}(t; \tau_o, \xi) := \xi + \int_{\tau_o}^t f(s, \varphi_k(s; \tau_o, \xi)) ds, k \in \mathbb{N}, \varphi_o \text{ beliebig,} \quad (2.6)$$

konvergiert gleichmäßig auf $Q_{\alpha, r'}$ gegen die Lösung φ (sukzessive Approximation). \blacksquare

Folgerung Für die Anfangswertprobleme mit $x(\tau) = \xi, |\tau - \tau_o| \leq \alpha, \|\xi - \xi_o\| \leq r'$ gelten analoge Aussagen:

(a) Es existiert genau eine Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ auf $[\tau_o - \alpha, \tau_o + \alpha]$,

(b) $\varphi(\cdot; \cdot, \cdot)$ ist stetig. \square

Beweis Zur Herleitung dieser Aussagen ist die Operatorenfamilie $\{\mathbf{T}_{\tau, \xi} : |\tau - \tau_o| \leq \alpha, \|\xi - \xi_o\| \leq r'\}$, $(\mathbf{T}_{\tau, \xi} \varphi)(t) := \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds$ zu verwenden, beweistechnisch ist $\alpha < \min\{a, \frac{r-r'}{M}, \frac{1}{2L}\}$ erforderlich. \blacksquare

Der Kern des Satzes 2.4 ist die zweite Voraussetzung, die von f bezüglich x mehr als nur Stetigkeit (aber weniger als Differenzierbarkeit) fordert: $f(t, \cdot)$ soll lokal (auf dem Quader $Q_{a,r}$) beschränkte Differenzenquotienten haben.

Demzufolge muß die Nicht-Unität im Beispiel 1.12 nicht verwundern, denn $f : (t, x) \mapsto 2\sqrt{|x|}$ ist bei $x = 0$ nur (einseitig) uneigentlich differenzierbar und damit nicht Lipschitz-stetig.

Andererseits zeigt das Beispiel der DGI $\dot{x} = f(t, x)$ im \mathbb{R}^1 mit

$$f(t, x) := \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sqrt{|x|} \sin \frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \end{cases} ,$$

daß die Lipschitzstetigkeit tatsächlich nur hinreichend für die Unität ist: sie ist im vorliegenden Beispiel bei $x = 0$ verletzt, trotzdem ist jedes Anfangswertproblem eindeutig lösbar. (Die DGI ist vom Typ der getrennten Veränderlichen und kann gemäß Abschnitt 1.4.1 untersucht werden: spezielle Lösungen sind $\varphi_0(t) = 0$, $\varphi_k(t) = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{Z}$, jede andere Lösung existiert ebenfalls auf ganz \mathbb{R} .)

Gibt es zu jedem Punkt $(\tau_o, \xi_o) \in G$ eine solche Quaderumgebung $Q_{a,r} \subset G$, auf der $f(t, \cdot)$ gleichgradig Lipschitz-stetig ist, dann soll f auf G lokal gleichgradig Lipschitz-stetig bezüglich x genannt werden.

Daraus ergibt sich die folgende globale Eigenschaft von f .

Lemma 2.5 *f sei auf G stetig und lokal gleichgradig Lipschitz-stetig bezüglich x. Dann genügt f auf jedem Kompaktum $A \subset G$ einer Lipschitz-Bedingung mit fester Lipschitz-Konstanten, d.h.,*

$$\exists L^* > 0 \quad \forall (t, x_1), (t, x_2) \in A \quad \| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leq L^* \| x_1 - x_2 \| .$$

■

(Beweis s. [6].)

Eine praktikable hinreichende Bedingung für lokale Lipschitz-Stetigkeit ist die bezüglich x stetige partielle Differenzierbarkeit. Wie üblich, bezeichne $D_x f$ die Jacobimatrix $(f^i_{,x^j})_{n \times n}$ und $\| D_x f \|$ die zur Maximum-Norm des \mathbb{R}^n kompatible Matrixnorm

$$\| D_x f \| := \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n | f^i_{,x^j} | .$$

Lemma 2.6 (Hinreichende Bedingung für Lipschitz-Stetigkeit)

Ist $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ und $D_x f \in C^0(G, \mathbb{R}^{n \times n})$, dann ist $f(t, \cdot)$ auf G lokal gleichgradig Lipschitz-stetig.

Beweis Zu jedem $(\tau_o, \xi_o) \in G$ gibt es einen kompakten Quader $Q_{a,r} \subset G$. Infolge der Stetigkeit gilt: $\exists K > 0 \quad \forall (t, x) \in Q_{a,r} \quad | f^i_{,x^j}(t, x) | \leq \| D_x f(t, x) \| \leq K$. Da $Q_{a,r}$ konvex ist, gilt koordinatenweise der Mittelwertsatz (vgl. Fig. 2.2)

$$\begin{aligned} | f^i(t, x_1) - f^i(t, x_2) | &= | \sum_{j=1}^n f^i_{,x^j}(t, x_1 + \vartheta^i(x_2 - x_1))(x_1^j - x_2^j) | \\ &\leq \sum_{j=1}^n | f^i_{,x^j}(\dots) | \cdot \| x_1 - x_2 \| \leq K \| x_1 - x_2 \| . \end{aligned}$$

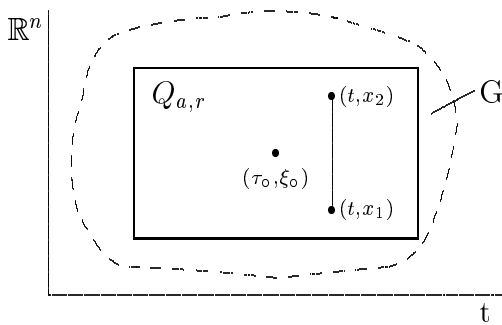


Fig.2.2

K ist eine von t unabhängige Lipschitzkonstante für f auf $Q_{a,r}$. ■

Damit ergibt sich die für die meisten praktischen Belange ausreichende und für eine angestrebte abgerundete Theorie erforderliche kürzere Fassung des Satzes von Picard und Lindelöf.

Satz 2.7 *Ist f auf $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ stetig und bezüglich x stetig partiell differenzierbar, dann besitzt jedes Anfangswertproblem $\dot{x} = f(t, x)$, $x(\tau) = \xi$, lokal genau eine Lösung.* ■

Bemerkung „Lokal“ bezieht sich dabei auf das in Satz 2.4 angegebene Intervall $[\tau_0 - \alpha, \tau_0 + \alpha]$. Ob sich die auf diesem Intervall gesicherte eindeutige Lösung auf ein größeres Intervall eindeutig fortsetzen läßt, wird Gegenstand der folgenden Untersuchungen sein. □

2.4 Folgerungen aus dem Satz von Picard und Lindelöf

Satz 2.4 gibt *lokale* Existenz- und Unitätsaussagen: Unter den angegebenen Voraussetzungen hat das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(t, x)$, $x(\tau_0) = \xi_0$, zu festem (τ_0, ξ_0) genau eine Lösung, die *mindestens* auf dem Intervall $[\tau_0 - \alpha, \tau_0 + \alpha]$ existiert (α ist beweistechnisch bedingt und kann klein sein), und die Lösungen der Anfangswertprobleme zu (τ, ξ) aus einer Umgebung von (τ_0, ξ_0) sind ebenfalls *mindestens* auf diesem *gemeinsamen* Intervall definiert.

Die lokale Unität der Lösungen impliziert sofort eine *globale Unität der Lösungen*: *Integralkurven können sich in G nicht schneiden oder verzweigen!* Denn anderenfalls würden zu dem im Inneren von G liegenden Schnitt- oder Verzweigungspunkt (τ, ξ) doch zwei verschiedene Lösungen gehören.

Eine globale Existenzaussage (die Lösung zu (τ, ξ) existiert auf beliebig vorgegebenem I mit $\tau \in I$) ist auch unter schärferen Glattheitsforderungen an f nicht erzielbar (vgl. etwa Beispiel 1.11, in dem f beliebig oft differenzierbar und sogar analytisch ist). Das gelingt nur unter starken Wachstumsrestriktionen für f (Abschnitt 2.5). Es gilt jedoch

Satz 2.8 (Satz über das Maximalintervall)

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard und Lindelöf existiert zu jedem $(\tau, \xi) \in G$ ein eindeutig bestimmtes offenes Intervall $I(\tau, \xi) := (a(\tau, \xi), b(\tau, \xi))$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $-\infty \leq a(\tau, \xi) < \tau < b(\tau, \xi) \leq +\infty$;
- (ii) das Anfangswertproblem (2.1) besitzt genau eine Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ auf $I(\tau, \xi)$, für die natürlich $\varphi(\tau; \tau, \xi) = \xi$ ist;
- (iii) ist $x(\cdot)$ eine Lösung des Anfangswertproblems (2.1) auf einem Intervall I mit $\tau \in I$, dann ist $I \subset I(\tau, \xi)$, und $x(\cdot)$ ist die Einschränkung $\varphi(\cdot; \tau, \xi)|_I$ auf dieses Teilintervall.

Beweis Seien I_1 und I_2 zwei offene, τ enthaltende Intervalle, auf denen $x_1(\cdot)$ bzw. $x_2(\cdot)$ Lösungen des Anfangswertproblems (2.1) sind. Wegen der globalen Unität der Lösungen müssen x_1 und x_2 auf dem offenen Intervall $I_1 \cap I_2$ zusammenfallen: $\forall t \in I_1 \cap I_2 \quad x_1(t) = x_2(t)$.

Nun sei I_{\max} die Vereinigung aller solcher Intervalle $I_\lambda, \lambda \in \Lambda$ (Indexmenge),

$$I_{\max} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda \quad : \quad I_\lambda \text{ offen, } \exists \text{ Lösung } x_\lambda(\cdot) \text{ auf } I_\lambda.$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi(\cdot)$ auf I_{\max} , die folgendermaßen konstruiert werden kann: Zu beliebigen $t \in I_{\max}$ existiert ein $I_\lambda \subset I_{\max}$, so daß $t, \tau \in I_\lambda$ und $x_\lambda(\cdot)$ Lösung auf I_λ ist. Dann sei $\varphi(t) := x_\lambda(t)$, das ist aber unabhängig von λ , denn nach der Vorüberlegung ist auch $\varphi(t) = x_{\lambda'}(t)$ für alle $\lambda' \in \Lambda$ mit $t \in I_{\lambda'}$.

I_{\max} ist nach Definition eindeutig bestimmt und ist als Vereinigung offener Intervalle selbst ein offenes Intervall. ■

Vereinbarung $I_{\max} =: I(\tau, \xi)$ heißt das *Maximalintervall* der Lösung zum Anfangspunkt (τ, ξ) . Unter $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ soll stets die Lösung auf dem Maximalintervall $I(\tau, \xi)$ verstanden werden.

Im Abschnitt 1.4 wurden tatsächlich Lösungen auf Maximalintervallen bestimmt. Die durchgerechneten Beispiele sollten nochmals unter diesem Gesichtspunkt betrachtet werden.

Die zunächst merkwürdige Tatsache, daß jede Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ ihr eigenes, möglicherweise kleines, Definitionsintervall $I(\tau, \xi)$ besitzt, verdient eine nähere Betrachtung. Es ist unmittelbar klar, daß jede Lösung φ höchstens auf dem offenen Intervall I^* definiert sein kann, welches durch Projektion $p : (t, x) \mapsto t$ des Gebietes G auf die t -Achse entsteht, $I^* = p(G)$, denn es ist ja $\text{graph } \varphi \subset G$, somit $p(\text{graph } \varphi) \subset I^*$.

Per Definition läßt sich $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ nicht über den Rand von $I(\tau, \xi) = (a(\tau, \xi), b(\tau, \xi))$ hinaus fortsetzen. Das ist einsichtig, falls $I(\tau, \xi) = I^*$ oder, wie in Beispielen des Abschnitts 1.4, die Lösung bei a und/oder b eine Unendlichkeitsstelle besitzt. Offensichtlich ist es nicht möglich, daß $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ z.B. bei $b(\tau, \xi)$ einen Grenzwert besitzt, $\varphi(b-0; \tau, \xi) =: x_o$, und $(b, x_o) \in G$ ist; denn dann gäbe es nach Satz 2.4 eine Lösung $\varphi(\cdot; b, x_o)$ auf einem Intervall $I_\alpha = [b-\alpha, b+\alpha]$, die wegen der Unität auf $[b-\alpha, b)$ mit $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ zusammenfällt, so daß die Lösung zum Anfangspunkt (τ, ξ) schließlich auf $I(\tau, \xi) \cup I_\alpha$ erklärt und $I(\tau, \xi)$ nicht Maximalintervall wäre.

Eine Integralkurve kann somit nicht in einem inneren Punkt von G enden. Weitere Untersuchungen zeigen, daß auch bei „wildem“ Verhalten am Rand von I Integralkurven dem Rand von G stets beliebig nahe kommen.

Die folgenden Begriffe und Sätze klären diesen Sachverhalt, Beweise finden sich in [6].

Definition 2.9 Auf dem Intervall $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ sei eine Funktion $h | I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben.

Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ heißt (linksseitiger) **Grenzpunkt** von h , falls in I eine (monotone) Folge (t_ν) mit $t_\nu \rightarrow b$ derart existiert, daß $h(t_\nu) \rightarrow x$, $\nu \rightarrow \infty$.

Die Menge $\Omega_b := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ Grenzpunkt von } h\}$ heißt **Grenzmenge** von h . (Analoge Definition für den Randpunkt a .)

Ist $x \in \Omega_b$, dann ist $(b, x) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (t_\nu, h(t_\nu))$ und $(t_\nu, h(t_\nu)) \in \text{graph } h$. Da $b \notin I$, ergibt sich daraus die

Folgerung Es ist $x \in \Omega_b$ genau dann, wenn (b, x) ein Häufungspunkt von $\text{graph } h$ ist, der nicht Element von $\text{graph } h$ ist. \square

Beispiel 2.10 .

$$1) \quad \exists \lim_{t \rightarrow b-0} h(t) =: \bar{x} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \Omega_b = \{\bar{x}\}.$$

$$2) \quad (n = 1), \quad h(t) = \sin \frac{1}{t}, \quad t \in (0, 1) : \quad \Omega_o = [-1, 1], \quad \Omega_1 = \{\sin 1\}.$$

$$3) \quad (n = 1), \quad h(t) = \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t}, \quad t \in (-1, 0) : \quad \Omega_o = \mathbb{R}$$

$$4) \quad (n = 1), \quad h(t) = \frac{1}{t}, \quad t > 0 : \quad \Omega_o = \emptyset, \quad \Omega_\infty = \{0\}.$$

$$5) \quad (n = 1), \quad h(t) = \begin{cases} 1, & t \text{ rational} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad t \in (0, 1) : \quad \Omega_1 = \{0, 1\}.$$

\square

Bezeichnet cl den Abschluß (closure) einer Menge, $cl A = A \cup \{\text{Häufungspunkte von } A\}$, dann hat eine Grenzmenge die folgende Darstellung (die an den Beispielen überprüft werden sollte):

$$\Omega_b = \bigcap_{a < T < b} cl\{h(t) \mid T \leq t < b\}. \quad (2.7)$$

Für Grenzmengen gilt der folgende

Satz 2.11 Die Grenzmenge Ω_b besitzt folgende Eigenschaften:

(i) Entweder ist $\Omega_b \neq \emptyset$ oder $\lim_{t \rightarrow b-0} \|h(t)\| = +\infty$.

(ii) Ω_b ist eine abgeschlossene Teilmenge des \mathbb{R}^n .

(iii) Ist $h(\cdot)$ beschränkt, dann ist $\Omega_b \neq \emptyset$ und kompakt.

(iv) Ist $h(\cdot)$ beschränkt und stetig, dann ist Ω_b außerdem eine zusammenhängende Menge, und es ist $\lim_{t \rightarrow b-0} \varrho(h(t), \Omega_b) = 0$ (Ω_b ist attraktiv).

Bemerkung Abstand Punkt-Menge: $\varrho(x, \Omega) = \inf\{\varrho(x, y) \mid y \in \Omega\}$. \square

Dieser Satz gilt natürlich gleichermaßen für die Grenzmengen von Lösungen einer DGL. In der DGL $\dot{x} = f(t, x)$, $(t, x) \in G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, genüge f den Voraussetzungen des Satzes von Picard und Lindelöf. Es sei $I = (a, b)$ das Maximalintervall einer Lösung $\varphi(\cdot)$ dieser DGL, und es sei $b < +\infty$. Entweder ist $\lim_{t \rightarrow b-0} \|\varphi(t)\| = +\infty$, (was höchstens dann auftreten kann, wenn G entsprechend unbeschränkt ist) - dann heißt b **endliche Entweichzeit** oder **Explosionszeit** dieser Lösung - oder $\varphi(\cdot)$ besitzt eine nichtleere Grenzmenge $\Omega_b \subset \mathbb{R}^n$. Die Folgerung nach Definition 2.9 besagt dann, daß jeder Punkt der Menge $\{b\} \times \Omega_b \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Häufungspunkt von $\text{graph } \varphi$ ist (aber $\text{graph } \varphi \cap (\{b\} \times \Omega_b) = \emptyset$). Der nächste Satz klärt die Lage dieser Menge relativ zum Grundgebiet G .

Satz 2.12 $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$ sei auf G lokal gleichgradig Lipschitz-stetig bezüglich x . Sei $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(t, x)$, $x(\tau) = \xi$, mit dem Maximalintervall $I(\tau, \xi) = (a, b)$, $b < +\infty$.

Ist $x^* \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt der Grenzmenge Ω_b von φ , dann ist $(b, x^*) \in \partial G$. (Analoges gilt für a .)

Beweis (indirekt). Annahme: $(b, x^*) \notin \partial G$, d.h., (b, x^*) innerer Punkt von G . Dann existiert ein offener beschränkter Quader Q mit (b, x^*) als Mittelpunkt, so daß $\bar{Q} = \text{cl } Q \subset G$ und f auf Q gleichgradig Lipschitz-stetig bezüglich x mit einer Lipschitzkonstanten L ist. Sei $M = \max_{\bar{Q}} \|f(t, x)\|$.

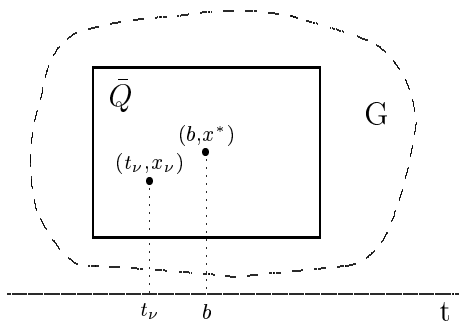


Fig.2.3

Da x^* Grenzpunkt von $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ ist, gibt es eine Folge $t_\nu \rightarrow b - 0$, so daß mit $\varphi(t_\nu; \tau, \xi) =: x_\nu$, $(b, x^*) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} (t_\nu, x_\nu)$. Damit gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $(t_\nu, x_\nu) \in Q$ für alle $\nu \geq n$. (t_ν, x_ν) hat somit positiven Abstand von ∂Q , es ist $0 < \varrho((t_\nu, x_\nu), \partial Q) =: \delta_\nu \leq \delta^* := \varrho((b, x^*), \partial Q)$, und $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \delta_\nu = \delta^*$.

Zu beliebigem festen $\nu \geq n$ sei $\varphi_\nu(\cdot)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_\nu) = x_\nu$. Nach Satz 2.3 existiert $\varphi_\nu(\cdot)$ gewiß auf dem Intervall $[t_\nu - \alpha_\nu, t_\nu + \alpha_\nu]$, wobei $\alpha_\nu := \mu \delta_\nu$ mit einem festen positiven $\mu < \min \left\{ 1, \frac{1}{M}, \frac{1}{L\delta^*} \right\}$. Wegen der Unität ist $\varphi_\nu(\cdot) = \varphi(\cdot; \tau, \xi)$ auf $[t_\nu - \alpha_\nu, t_\nu + \alpha_\nu]$. Da (a, b) das Maximalintervall von φ ist, muß notwendig $t_\nu + \mu \delta_\nu < b$ sein. Mit $\nu \rightarrow \infty$ folgt $b + \mu \delta^* \leq b$, also $\delta^* = 0$: (b, x^*) ist nicht Mittelpunkt eines offenen Quaders Q : Widerspruch! ■

Somit ist die Menge $\{b\} \times \Omega_b$ der nicht zu $\text{graph } \varphi$ gehörenden Häufungspunkte von $\text{graph } \varphi$ Teilmenge des Randes von G . Gleiches ist der Fall, wenn b eine endliche Explosionszeit

ist ($\Omega_b = \emptyset$). Für jede Lösung der DGL gilt also die Alternative [$b = +\infty$] oder [$b < +\infty$ und $\{b\} \times \Omega_b \subset \partial G$], analog für a . In diesem Sinn verläuft jede Integralkurve vom Rand von G zum Rand von G , sie kann nicht im Inneren von G enden.

Beispiel 2.13 ($n=1$) (vgl. Beispiel 1.10)

$$\dot{x} = x(1-x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \{x \mid x < 0\}.$$

□

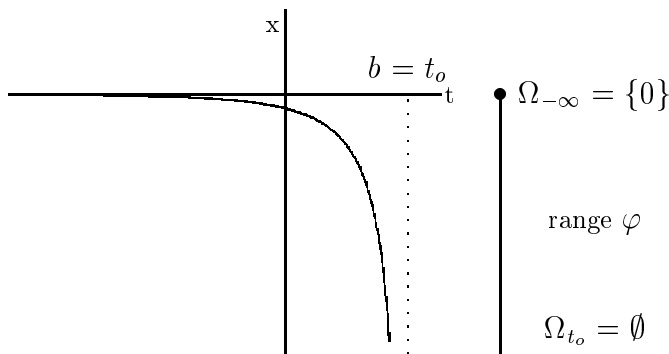


Fig. 2.4

Beispiel 2.14 ($n = 2$)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \\ \dot{y} &= x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) \end{aligned}, \quad (t, x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2. \quad (2.8)$$

Die rechte Seite der DGL ist von der Klasse C^1 auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Das Auftreten von $x^2 + y^2$ legt den Versuch nahe, mit glatten Funktionen $r(\cdot) > 0$ und $\psi(\cdot)$ Lösungen der Form

$$x = r \cos \psi, \quad y = r \sin \psi$$

zu suchen. Dann muß

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \psi - r \dot{\psi} \sin \psi = -r \sin \psi + r \cos \psi (1 - r) \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \psi + r \dot{\psi} \cos \psi = r \cos \psi + r \sin \psi (1 - r) \end{aligned}$$

erfüllt sein, und eine Auflösung nach $(\dot{r}, \dot{\psi})$ ergibt die DGLn

$$\dot{r} = r(1-r), \quad \dot{\psi} = 1, \quad (2.9)$$

deren Lösungen bekannt sind (Beispiel 1.10). Figur 2.5 zeigt die Integralkurven (koordinatenweise) von (2.9) zu Anfangswerten $r(0) = \frac{1}{2}, \psi(0) = 0$, sowie die zugehörige Lösung $\varphi(\cdot; 0, \frac{1}{2}, 0)$ von (2.8) mit Maximalintervall \mathbb{R} . □

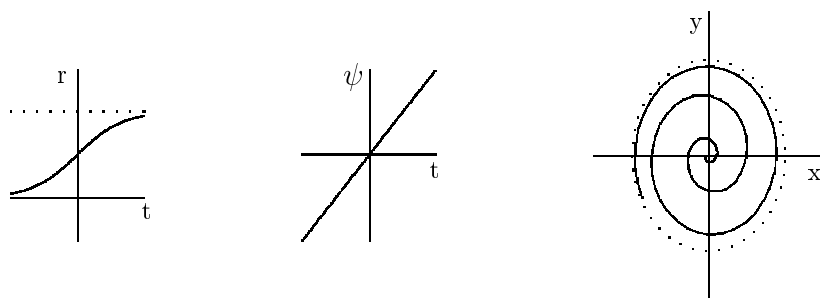


Fig. 2.5

Die Grenzmengen von φ sind $\Omega_{-\infty} = \{(0, 0)\}$, $\Omega_{+\infty} =$ Einheitskreislinie.

Im Kontext autonomer Differentialgleichungen werden die Grenzmengen $\Omega_{+\infty}$ bzw. $\Omega_{-\infty}$ (falls sie existieren) üblicherweise als ω - bzw. α -**Grenzmengen** der Lösung φ bezeichnet.

Die letzten beiden Beispiele zeigen, daß (bei unbeschränktem Definitionsintervall) eine Grenzmenge die leere Menge sein kann.

Das folgende Beispiel demonstriert unmittelbar die Aussage des Satzes 2.12.

Beispiel 2.15 ($n = 1$)

$$\dot{x} = \sqrt{1 - x^2}, \quad (t, x) \in G := \mathbb{R} \times (-1, 1).$$

Genau im angegebenen Gebiet ist die rechte Seite lokal Lipschitz-stetig. Nach den Methoden des Abschnittes 1.4 ergibt sich die Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ durch Auflösen der Gleichung

$$\arcsin x = t - \tau + \arcsin \xi =: t - t_o$$

nach x . Dafür muß $-\frac{\pi}{2} < t - t_o < \frac{\pi}{2}$ sein:

$$\varphi(t; \tau, \xi) = \sin(t - t_o), \quad t \in I(\tau, \xi) = \left(t_o - \frac{\pi}{2}, t_o + \frac{\pi}{2}\right), \quad t_o := \tau - \arcsin \xi.$$

Die Integralkurven zeigt Figur 2.6. Grenzmengen sind $\Omega_{t_o - \frac{\pi}{2}} = \{-1\}$, $\Omega_{t_o + \frac{\pi}{2}} = \{1\}$, und es ist $(t_o - \frac{\pi}{2}, -1) \in \partial G$, $(t_o + \frac{\pi}{2}, 1) \in \partial G$. □

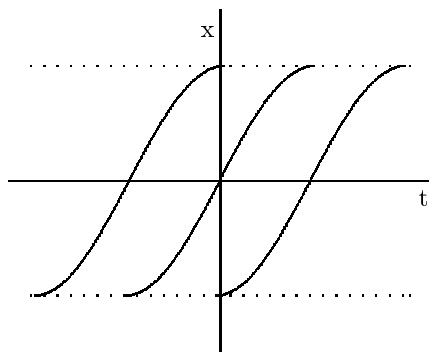


Fig. 2.6

Die Kenntnis der Grenzmengen von Lösungen ist insbesondere im Fall $b(\tau, \xi) = +\infty$ wichtig, da sie Aufschluß über das Verhalten des durch die DGL modellierten Prozesses für große Zeiten gibt. Grenzmengen können für $n \geq 3$ sehr komplizierte Struktur besitzen (Chaostheorie).

2.5 Ein globaler Existenzsatz

Die Untersuchungen dieses Abschnitts dienen der Angabe von hinreichenden Bedingungen dafür, daß jede Lösung einer DGL ganz \mathbb{R} als Maximalintervall besitzt. Dazu wird zunächst eine leichte Modifikation der Aussage des Satzes von Picard und Lindelöf bewiesen. Satz 2.4 garantierte die Existenz der Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(t, x)$, $x(\tau) = \xi$ (fest), auf einem abgeschlossenen Intervall $[\tau - \alpha, \tau + \alpha]$, wobei $\alpha < \min\{a, \frac{r}{M}, \frac{1}{L}\}$ zu wählen war (bei festem ξ kann $r' = 0$ verwendet werden, vgl. Beweis von Satz 2.4). Diese Wahl von α war beweistechnisch bedingt ($\alpha < a$: Teil des Quaders $Q_{a,r}$, auf dem f stetig und gleichgradig Lipschitz-stetig ist; $\alpha < \frac{r}{M}$: der Operator \mathbf{T}_ξ ist eine Selbstabbildung; $\alpha < \frac{1}{L}$: \mathbf{T}_ξ ist eine Kontraktion). Die Kontraktivität des Operators ist jedoch nur hinreichend, aber nicht notwendig für die Existenz und Unität eines Fixpunktes. Die Fixpunktaussage kann auch durch Ausnutzen spezieller Eigenschaften des im Kontext der DGLn konkret gegebenen Integraloperators gewonnen werden.

Korollar zu Satz 2.4 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 2.4 existiert die Lösung des Anfangswertproblems (2.1) auf dem (eventuell größeren) Intervall $[\tau - \bar{\alpha}, \tau + \bar{\alpha}]$ mit $\bar{\alpha} < \min\{a, \frac{r}{M}\}$.*

Beweis durch sukzessive Approximation einer Lösung der Integralgleichung (2.3) auf dem Intervall $[\tau - \bar{\alpha}, \tau + \bar{\alpha}]$. Sei stets t beliebig aus diesem Intervall. Mit

$$\varphi_0(t) := \xi \quad \text{und} \quad \varphi_1(t) := \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi_0(s)) ds$$

gilt die Abschätzung ($\|\cdot\|$: Norm in \mathbb{R}^n)

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| \leq \left| \int_{\tau}^t \|f(s, \xi)\| ds \right| \leq M |t - \tau|.$$

Weiter gilt, mit

$$\varphi_2(t) := \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi_1(s)) ds,$$

$$\begin{aligned} \|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| &\leq \left| \int_{\tau}^t \|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_0(s))\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{\tau}^t L \|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\| ds \right| \\ &\leq \left| \int_{\tau}^t LM |s - \tau| ds \right| = \frac{M}{L} \frac{1}{2!} (L |t - \tau|)^2. \end{aligned}$$

Iteration führt auf eine Folge von Funktionen $\varphi_k | [\tau - \bar{\alpha}, \tau + \bar{\alpha}] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\| \leq \frac{M}{L} \frac{1}{k!} (L |t - \tau|)^k$$

(vollständige Induktion!). Mittels sukzessiver Dreiecksungleichungen folgt daraus

$$\| \varphi_{k+p}(t) - \varphi_k(t) \| \leq \frac{M}{L} \sum_{\nu=k+1}^{k+p} \frac{1}{\nu!} (L |t - \tau|)^\nu, \quad k, p \in \mathbb{N}.$$

Da $\varphi_k \in C^o := C^o([\tau - \bar{\alpha}, \tau + \bar{\alpha}], \mathbb{R}^n)$, ist

$$\| \varphi_{k+p} - \varphi_k \|_{C^o} = \max_{|t-\tau| \leq \bar{\alpha}} \| \varphi_{k+p}(t) - \varphi_k(t) \| \leq \frac{M}{L} \sum_{\nu=k+1}^{k+p} \frac{1}{\nu!} (L \bar{\alpha})^\nu =: e(k, p).$$

$e(k, p)$ ist ein Abschnitt der konvergenten Potenzreihe von $\frac{M}{L} \exp(L\bar{\alpha})$, also $e(k, p) < \epsilon$ für hinreichend großes k . Somit ist (φ_k) eine Cauchy-Folge in C^o , also existiert ein $\varphi \in C^o$, so daß $\varphi_k \rightarrow \varphi$ im Sinne der Norm des C^o , für $k \rightarrow \infty$. Wir zeigen, daß φ Lösung der Integralgleichung (2.3) ist.

Mit beliebigem $s \in [\tau - \bar{\alpha}, \tau + \bar{\alpha}]$ ist

$$\| f(s, \varphi_k(s)) - f(s, \varphi(s)) \| \leq L \| \varphi_k(s) - \varphi(s) \| \leq L \| \varphi_k - \varphi \|_{C^o} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

d.h., die Funktionenfolge $(f(\cdot, \varphi_k(\cdot)))$ konvergiert auf $[\tau - \bar{\alpha}, \tau + \bar{\alpha}]$ gleichmäßig gegen $f(\cdot, \varphi(\cdot))$. Somit ist die Folge gliedweise integrierbar, und aus

$$\varphi_{k+1}(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi_k(s)) ds$$

folgt mit $k \rightarrow \infty$

$$\varphi(t) = \xi + \int_{\tau}^t f(s, \varphi(s)) ds,$$

d.h., $\varphi(\cdot)$ löst das Anfangswertproblem (2.1) auf $[\tau - \bar{\alpha}, \tau + \bar{\alpha}]$. ■

Die Beispiele 1.10 und 1.11 (mit in x quadratischer rechter Seite) zeigten ein Explosionsverhalten von Lösungen (und damit Beschränkung ihrer Definitionsintervalle), hingegen konnten solche Phänomene bei linearen DGLn (in \mathbb{R}^1) niemals auftreten. Es scheint, daß die Beschränkung des Maximalintervalls einer Lösung der DGL durch zu starkes (überlineares) Wachstum von $f(t, \cdot)$ bei großen x verursacht ist. Deshalb liegt die Betrachtung der folgenden Klasse von Funktionen nahe.

Definition 2.16 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Eine Funktion $f | I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **linear-beschränkt** bezüglich x , falls es zwei Funktionen $\varrho, \sigma \in C^o(I, \mathbb{R}^+)$ gibt, so daß $\forall (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n \quad \| f(t, x) \| \leq \varrho(t) \| x \| + \sigma(t)$.

Beispiel 2.17 $f(t, x) = A(t)x + b(t)$, $A(\cdot) \in C^o(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $b(\cdot) \in C^o(I, \mathbb{R}^n)$.

$\| f(t, x) \| \leq \| A(t) \| \| x \| + \| b(t) \|$, (mit irgendeiner Norm in \mathbb{R}^n und kompatibler Matrizennorm). □

Beispiel 2.18 $f(x) = Ax + g(x)$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $g(\cdot) | \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ beschränkt, d.h.,

$\| g \| := \max_{i=1, \dots, n} \sup_{\mathbb{R}^n} | g^i(x) | < +\infty$. Es gilt $\| f(x) \| \leq \| A \| \| x \| + \| g \|$. □

Damit läßt sich der folgende Existenz- und Unitätssatz beweisen.

Satz 2.19 (Globaler Existenz- und Unitätssatz für linear-beschränkte DGLn)

Es sei $G = I \times \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall. Gegeben sei $f | G \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

- (i) $f \in C^0(G, \mathbb{R}^n)$,
- (ii) f lokal gleichgradig Lipschitz-stetig bezüglich x ,
- (iii) f linear-beschränkt bezüglich x .

Dann besitzt das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(t, x)$, $x(\tau) = \xi$, $(t, x) \in G$, genau eine Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ mit dem Maximalintervall $I(\tau, \xi) = I$.

Beweis Es wird die Existenz einer Lösung auf einem *vorgegebenen* kompakten Teilintervall von I gezeigt und diese Lösung auf ganz I fortgesetzt (die globale Unität ist dabei durch die Lipschitz-Stetigkeit garantiert).

1) Sei $(\tau, \xi) \in G = I \times \mathbb{R}^n$ beliebig gewählt. $I_o = [t_1, t_2]$ sei ein vorgegebenes kompaktes Intervall, mit festem $\varepsilon > 0$ sei $\bar{I} := [t_1 - \varepsilon, t_2 + \varepsilon] \subset I$, und es gelte $t_1 < \tau < t_2$. Mit *irgendeinem* $r > 0$ ist $Q := \bar{I} \times \{x \mid \|x - \xi\| \leq r\}$ ein in G liegender kompakter Quader, der (τ, ξ) als inneren Punkt enthält. Nach Lemma 2.5 genügt f auf Q einer Lipschitz-Bedingung (mit einer durch \bar{I} und r bestimmten Lipschitz-Konstanten). Für jeden Punkt $(t, x) \in Q$ ist $|\|x\| - \|\xi\|| \leq \|x - \xi\| \leq r$, also $\|x\| \leq \|\xi\| + r$. Damit ist wegen (iii) $M := \max_Q \|f(t, x)\| \leq \max_Q (\varrho(t) \|x\| + \sigma(t)) \leq \bar{\varrho}(\|\xi\| + r) + \bar{\sigma}$, wobei $\bar{\varrho}, \bar{\sigma}$ die Maxima von ϱ, σ auf \bar{I} sind.

Da $\tau \in \text{int}\bar{I}$, ist der Abstand $\varrho(\tau, \partial\bar{I}) =: a > 0$. Sei α eine beliebige, fest gewählte Zahl, $0 < \alpha < \min\{a, 1/\bar{\varrho}\}$. Damit ist $\alpha\bar{\varrho} < 1$, und r kann so groß gewählt werden, daß $\alpha(\bar{\varrho} \|\xi\| + \bar{\sigma}) < r(1 - \alpha\bar{\varrho})$ ist und somit

$$\alpha < \frac{r}{\bar{\varrho}(\|\xi\| + r) + \bar{\sigma}} \leq \frac{r}{M}.$$

2) Nach dem Korollar zu Satz 2.4 in diesem Abschnitt existiert mit diesem *fest vorgegebenen* α die Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ gewiß auf dem Intervall $[\tau - \alpha, \tau + \alpha]$.

(Dieser Schluß könnte nach dem ursprünglichen Satz 2.3 nicht geführt werden, da dort $\alpha < \frac{1}{L}$ verlangt wurde und L bei der eventuell vorzunehmenden Vergrößerung von r selbst größer werden könnte.)

Ist $\tau + \alpha$ kleiner als der rechte Randpunkt von I_o , so sei $\varphi(\tau + \alpha; \tau, \xi) =: \xi_1$. Nach der gleichen Überlegung wie eben ist dann $\varphi(\cdot; \tau + \alpha, \xi_1)$ auf $[\tau, \tau + 2\alpha] \cap I_o$ erklärt und setzt $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ über $\tau + \alpha$ hinaus nach rechts fort. Durch Iteration dieses Verfahrens ist nach endlich vielen Schritten die Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ bis in den rechten Randpunkt von I_o fortgesetzt; analoges gilt für die Fortsetzung nach links.

3) Wird I durch eine aufsteigende Folge kompakter Intervalle I_k , $k \in \mathbb{N}_o$, ausgeschöpft, $\tau \in I_o \subset I_1 \subset \dots, \cup I_k = I$, dann wird schließlich $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ eindeutig auf ganz I fortgesetzt. ■

Kapitel 3

Lineare Differentialgleichungen

Die Klasse der linearen DGLn (im \mathbb{R}^n) wurde bereits durch Definition 1.13 festgelegt. Demgemäß ist eine *lineare DGL* von der Form

$$\dot{x} = A(t)x + b(t) \tag{3.1}$$

mit zwei auf dem gemeinsamen offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gegebenen Funktionen $A(\cdot) \in C^o(I, \mathbb{R}^{n \times n})$, $b(\cdot) \in C^o(I, \mathbb{R}^n)$. Das Grundgebiet ist hier $G = I \times \mathbb{R}^n$.

Definition 3.1 Die DGL (3.1) heißt **homogen**, falls $b(I) = \{0\}$, sonst **inhomogen** ($b(\cdot)$ wird dann auch „**Inhomogenität**“ genannt).

Mit

$$x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b^1 \\ \vdots \\ b^n \end{pmatrix},$$

wobei jetzt die a_j^i und b^i stetige reellwertige Funktionen auf I sind, ist

$$\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i(t)x^j + b^i(t), \quad i = 1, \dots, n \tag{3.2}$$

die Komponentendarstellung von (3.1). Je nach Anwendungsart ist die eine oder andere Form der DGL zweckmäßig. Verständlicherweise wird A die *Koeffizientenmatrix* der DGL genannt.

Die Existenz und Unität von Lösungen klärt sich rasch mit den in Kapitel 2.5 getroffenen Vorbereitungen.

Satz 3.2 Das Anfangswertproblem $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, $x(\tau) = \xi$, besitzt genau eine Lösung, $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$, mit dem Maximalintervall $I(\tau, \xi) = I$.

Beweis Die rechte Seite, $f : f(t, x) = A(t)x + b(t)$, ist wegen $D_x f = A(\cdot)$ nach Lemma 2.6 auf G lokal gleichgradig Lipschitz-stetig bezüglich x und (s. Beispiel 2.17) linear-beschränkt: die Voraussetzungen des Satzes 2.19 sind erfüllt. ■

Bemerkung Nach Satz 3.2 können, wie im \mathbb{R}^1 , auch bei linearen DGLn im \mathbb{R}^n im Innern des Intervalls I keine Explosionsphänomene von Lösungen auftreten. \square

Lineare Differentialgleichungen sind von ausgeprägter theoretischer und applikativer Wichtigkeit. Zwei Gründe dafür sind

- (i) Ist φ eine bekannte Lösung einer nichtlinearen DGL $\dot{y} = f(t, y)$, so ist es häufig erforderlich, Aussagen über „benachbarte“ Lösungen (d.h. solche mit wenig abweichenden Anfangswerten) zu gewinnen. Locker gesprochen folgen diese aus einer linearen DGL mit der rechten Seite $f(t, \varphi(t)) + D_y f(t, \varphi(t))x$ (lineare Taylor-Approximation von $f(t, \cdot)$ bei $y = \varphi(t)$), siehe Kapitel 4.4.
- (ii) Viele technisch relevante Systeme („Massenpunkt-Feder-Dämpfer-Systeme“ der Mechanik, Kirchhoffsche Netzwerke der Elektrotechnik) erlauben eine mathematische Modellierung durch lineare DGLn, große Teile der *technischen Schwingungslehre* sind nichts anderes als eine aufbereitete Theorie der linearen DGLn.

Allerdings muß darauf hingewiesen werden, daß lineare DGLn häufig, wenn auch weitgehend brauchbare, doch nur approximative mathematische Modelle darstellen. Typisch nichtlineare Effekte (z.B. das Explodieren von Lösungen oder das Auftreten von Grenzmengen wie in den Beispielen 1.10 und 2.14), die für das modellierte System zerstörend oder funktionsrelevant sein können, werden von diesen Modellen nicht erfaßt.

Auch für die linearen DGLn ist es im allgemeinen nicht möglich, Regeln zum Auffinden von Lösungen zu geben (Ausnahme: konstante Koeffizientenmatrix, s. Kapitel 3.4). Jedoch lassen sich die algebraische Struktur der Lösungsmenge und die Abhängigkeit einer Lösung von ihren Anfangswerten genau klären, und aus Eigenschaften der Koeffizientenmatrix $A(\cdot)$ kann auf Eigenschaften der Lösungen geschlossen werden.

3.1 Die Lösungsmenge

Wie in 1.4.2 kann die DGL (3.1) als Operatorgleichung interpretiert werden: Finde zu gegebenem stetigen $b(\cdot)$ Funktionen $x \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ so, daß $\mathbf{L}x = b$, wobei jetzt der lineare Operator $\mathbf{L} : C^1(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(I, \mathbb{R}^n)$ durch $\mathbf{L} : x(\cdot) \mapsto \dot{x}(\cdot) - A(\cdot)x(\cdot)$ gegeben ist. Zuzufolge Satz 1.14 ist die Menge \mathcal{L} aller Lösungen von (3.1) eine lineare Mannigfaltigkeit in $C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{L} = x_p + \mathcal{L}_o$, wobei x_p eine (partikuläre) Lösung der inhomogenen DGL (3.1) und \mathcal{L}_o der Vektorraum aller Lösungen der zugehörigen homogenen DGL $\dot{x} = A(t)x$ ist.

Damit ist wieder, wie bei $n = 1$ (Abschnitt 1.4.2), die Integrationsaufgabe der linearen DGL reduziert auf die Bestimmung aller Lösungen der homogenen DGL und einer Lösung der inhomogenen DGL. \mathcal{L}_o ist Teilraum des unendlich-dimensionalen Vektorraumes $C^1(I, \mathbb{R}^n)$; \mathcal{L}_o ist nicht leer, da mindestens die triviale Lösung $\Theta : \Theta(t) = 0$ als Nullelement enthalten ist. Jetzt ist sogar klar, daß \mathcal{L}_o eine unendliche Menge ist, da doch jedes Anfangswertproblem (der homogenen DGL) eine Lösung besitzt. Wesentlich ist in erster Linie die Bestimmung der Dimension des Vektorraumes \mathcal{L}_o .

3.1.1 Die homogene Differentialgleichung

Der Unitätssatz ist für homogen-lineare DGLn äquivalent mit

Lemma 3.3 $(x \in \mathcal{L}_o \wedge \exists t_o \in I \quad x(t_o) = 0) \Rightarrow \forall t \in I \quad x(t) = 0.$

Beweis x hat bei t_o denselben Anfangswert wie die triviale Lösung Θ , nach dem Unitätssatz ist somit $x = \Theta$. ■

Zusatz. Die Lösungen $x_1, x_2 \in \mathcal{L}_o$ mögen an einer Stelle $t_o \in I$ den gleichen Funktionswert $\xi \in \mathbb{R}^n$ besitzen: $x_1(t_o) = x_2(t_o) = \xi$. Dann ist $x := x_1 - x_2 \in \mathcal{L}_o$ und $x(t_o) = 0$, nach Lemma 3.3 somit $x = \Theta$, d.h. $x_1 = x_2$: Unität.

Die Untersuchung von $\dim \mathcal{L}_o$ benötigt den Begriff der linearen Unabhängigkeit im Vektorraum $C^o(I, \mathbb{R}^n)$ (Teilräume $\mathcal{L}_o \subset C^1 \subset C^o$). Das ist lediglich die Konkretisierung der linearen Unabhängigkeit im allgemeinen Vektorraum: das Nullelement läßt sich nur als triviale Linearkombination darstellen. Im einzelnen bedeutet das:

Sei $m \in \mathbb{N}$, $x_\mu \in C^o(I, \mathbb{R}^n)$, $c^\mu \in \mathbb{R}$, $\mu = 1, \dots, m$.

(i) Das Funktionen-m-tupel $\{x_1, \dots, x_m\}$ heißt *auf I linear unabhängig*, falls

$$\forall t \in I \quad \sum_{\mu=1}^m c^\mu x_\mu(t) = 0 \Rightarrow c^\mu = 0, \mu = 1, \dots, m.$$

(ii) $\{x_1, \dots, x_m\}$ heißt *auf I linear abhängig*, falls

$$\exists c^\mu \in \mathbb{R} : \sum_{\mu=1}^m |c^\mu| > 0 \wedge \forall t \in I \quad \sum_{\mu=1}^m c^\mu x_\mu(t) = 0.$$

Das folgende Lemma gibt eine (rechnerisch nachprüfbar) hinreichende Bedingung für lineare Unabhängigkeit.

Lemma 3.4 $\{x_1, \dots, x_m\} \in C^o(I, \mathbb{R}^n)$, $x_\mu = (x_\mu^1, \dots, x_\mu^n)^T$, $\mu = 1, \dots, m \leq n$.

Sei X die $n \times m$ -Matrix der Koordinatenfunktionen, $X = (x_\mu^i)$.

Dann gilt: $\exists \tau \in I : \text{rang} X(\tau) = m \Rightarrow \{x_1, \dots, x_m\}$ auf I linear unabhängig.

Beweis $\sum_{\mu=1}^m c^\mu x_\mu(t) = 0$ für alle $t \in I$ impliziert mit $t = \tau$ (koordinatenweise) $\sum_{\mu=1}^m c^\mu x_\mu^i(\tau) = 0$. Das sind n homogen-lineare Gleichungen für die c^μ mit maximalrangiger Koeffizientenmatrix $X(\tau)$. Einzige Lösung ist somit $c^\mu = 0$. ■

Die Implikation des Lemmas ist nicht umkehrbar, die Rangbedingung also nicht notwendig! Das zeigt

Beispiel 3.5 $n = m = 2$, $x_1(t) = (1, 0)^T$, $x_2(t) = (t, 0)^T$. Aus $c^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c^2 \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ für alle t folgt $c^1 = c^2 = 0$: $\{x_1, x_2\}$ linear unabhängig. Jedoch ist $\text{rang} X(t) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$ für jedes t . □

Im Teilraum $\mathcal{L}_o \subset C^o(I, \mathbb{R}^n)$ dagegen gelten strengere Regeln.

Definition 3.6 Sind $x_\nu \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$, $\nu = 1, \dots, n$, Lösungen einer homogen-linearen DGL $\dot{x} = Ax$, dann heißt $W(\cdot) := \det X(\cdot)$ die **Wronski-Determinante** der x_ν (in der ν -ten Spalte von X stehen die Koordinaten der Lösung x_ν - vgl. Lemma 3.4 bezüglich der Definition von X).

Satz 3.7 *Es gelten folgende Aussagen über die Wronski-Determinante:*

(i) *Das n -tupel $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{L}_o$ ist auf I linear abhängig gdw. die Wronski-Determinante auf I eine Nullstelle besitzt.*

(ii) *Die Wronski-Determinante verschwindet auf I entweder überall oder nirgends.*

Beweis (i) (\Rightarrow): folgt aus Lemma 3.4.

(\Leftarrow): Sei $W(t_o) = 0$. Dann hat das lineare Gleichungssystem $\sum_{\nu=1}^n c^\nu x_\nu^i(t_o) = 0$ eine nicht-triviale Lösung c_o^ν . Mit $x(t) := \sum_{\nu=1}^n c_o^\nu x_\nu(t)$, $t \in I$, ist $x \in \mathcal{L}_o$ und $x(t_o) = 0$, nach Lemma 3.3 somit $\forall t \in I$ $x(t) = 0$: die x_ν sind auf I linear abhängig.

(ii): Angenommen $(\exists t_1 \in I$ $W(t_1) = 0) \wedge (\exists t_2 \in I$ $W(t_2) \neq 0)$. $W(t_1) = 0$ impliziert nach (i) die lineare Abhängigkeit der x_ν , daraus folgt mit Lemma 3.4 $\forall t \in I$ $W(t) = 0$. Also gibt es kein t_2 wie angenommen, die Annahme ist falsch, es bleibt die strenge Alternative

$$[\forall t \in I$$
 $W(t) = 0] \vee [\forall t \in I$ $W(t) \neq 0]. \quad (3.3)$

■

Bemerkung Zur Untersuchung der linearen Abhängigkeit von n bekannten Lösungen einer homogen-linearen DGL genügt somit die Berechnung der Wronski-Determinante $W(\cdot)$, an einer Stelle t_o . Dabei kann t_o so gewählt werden, daß die Matrix $X(t_o)$ so angenehm mit Elementen besetzt ist, daß die Determinantenberechnung einfach wird. \square

Die Alternative (3.3) wird durch die folgende **Liouvillesche Formel** (3.4), welche die Wronski-Determinante in Abhängigkeit von den Anfangswerten der n Lösungen und von der Koeffizientenmatrix $A(\cdot)$ der DGL beschreibt, analytisch wiedergegeben.

Satz 3.8 $x_\nu \in \mathcal{L}_o, \nu = 1, \dots, n, \tau \in I$ beliebig fixiert. Dann ist für $t \in I$

$$W(t) = W(\tau) \cdot \exp\left(\int_\tau^t \operatorname{tr} A(s) ds\right), \quad (3.4)$$

wobei $\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^n a_i^i$ die Spur der Koeffizientenmatrix ist.

Beweis Es wird gezeigt, daß W einer homogen-linearen DGL (1.8) mit $a(t) = \operatorname{tr} A(t)$ genügt, deren Lösung genau (3.4) ist. Des Schreibaufwandes wegen beschränken wir uns auf den Fall $n = 2$.

Sind $x_\nu = (x_\nu^1, x_\nu^2)^T$, $\nu = 1, 2$, die beiden Lösungen, dann ist

$$\dot{W} = \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}_1^1 & \dot{x}_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ \dot{x}_1^2 & \dot{x}_2^2 \end{vmatrix}$$

(zeilenweises Differenzieren einer Determinante). $\dot{x}_\nu^i = \sum_{j=1}^2 a_j^i(t) x_\nu^j$ ergibt

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \begin{vmatrix} a_1^1 x_1^1 + a_2^1 x_1^2 & a_1^1 x_2^1 + a_2^1 x_2^2 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ a_1^2 x_1^1 + a_2^2 x_1^2 & a_1^2 x_2^1 + a_2^2 x_2^2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_1^1 x_1^1 & a_1^1 x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ a_2^2 x_1^2 & a_2^2 x_2^2 \end{vmatrix} \quad (\text{Zeilenkombination!}) \end{aligned}$$

$$\dot{W} = (a_1^1 + a_2^2)W.$$

Die Lösung dieser DGL mit $W(\tau) = \det(x_\nu^i(\tau))$ ist gerade (3.4). \blacksquare

Bemerkung (i) $W(t)$ verschwindet also genau dann, wenn W an der einen Stelle $\tau \in I$ eine Nullstelle hat: Alternative (3.3).

(ii) Die Wronski-Determinante ist genau dann konstant auf I , wenn $\text{tr}A = 0$ auf I (z.B. bei schiefssymmetrischer Koeffizientenmatrix A). \square

Alle Vorbereitungen für den folgenden zentralen Satz sind getroffen.

Satz 3.9 $\dim \mathcal{L}_o = n$.

Beweis Zu zeigen ist (i) es existieren n linear unabhängige Lösungen der homogen-linearen DGl und (ii) diese bilden eine Basis von \mathcal{L}_o , d.h., jede Lösung läßt sich eindeutig als Linearkombination dieser n Lösungen darstellen.

(i) Sei $e_\nu = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^n$, $e_\nu = (\delta_\nu^i)$, $\nu = 1, \dots, n$, $\tau \in I$ beliebig fixiert. Jedes Anfangswertproblem $\dot{x} = A(t)x$, $x(\tau) = e_\nu$, besitzt auf I die eindeutige Lösung $\varphi_\nu(\cdot) = \varphi(\cdot; \tau, e_\nu)$ mit $\varphi_\nu(\tau) = e_\nu$. Für die Wronski-Determinante dieser n Lösungen ist $W(\tau) = \det(\varphi_\nu^i(\tau)) = \det(\delta_\nu^i) = 1 \neq 0$, also sind $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ nach Satz 3.7 auf I linear unabhängig.

(ii) Sei $x \in \mathcal{L}_o$ irgendeine Lösung der homogenen DGl und sei $x(\tau) = \xi = (\xi^1, \dots, \xi^n)^T$. Da $\text{lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subset \mathcal{L}_o$, ist $\sum_{\nu=1}^n \xi^\nu \varphi_\nu =: y \in \mathcal{L}_o$, und diese Lösung hat den Anfangswert $y(\tau) = \xi$. Also ist nach dem Unitätssatz $y = x$. Da x beliebig aus \mathcal{L}_o gewählt war, ist somit $\mathcal{L}_o \subset \text{lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, also schließlich $\mathcal{L}_o = \text{lin}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$: die n linear unabhängigen φ_ν bilden eine Basis von \mathcal{L}_o . \blacksquare

Bemerkung Die φ_ν können prinzipiell (praktisch kaum) durch sukzessive Approximation bestimmt werden (vgl. (2.6)): $\varphi_{\nu(0)}(t) = e_\nu$, $\varphi_{\nu(k+1)}(t) = e_\nu + \int_\tau^t A(s)\varphi_{\nu(k)}(s)ds$. Ein allgemeines Rezept zum Finden der φ_ν gibt es nicht. \square

Folgerung (i) Je n linear unabhängige Lösungen x_1, \dots, x_n bilden eine Basis von \mathcal{L}_o .

(ii) n Lösungen x_1, \dots, x_n sind genau dann linear unabhängig, wenn in den Darstellungen $x_\mu = \sum_{\nu=1}^n \xi_\mu^\nu \varphi_\nu$ (Basisdarstellung) $\det(\xi_\mu^\nu) \neq 0$. \square

Beweis Lineare Algebra, Basistransformation im endlichdimensionalen Vektorraum mittels nichtsingulärer Matrix. \blacksquare

Den vorangehenden Überlegungen folgend, verwenden wir die

Definition 3.10 Je n linear unabhängige Lösungen $x_\nu = (x_\nu^1, \dots, x_\nu^n)^T$, $\nu = 1, \dots, n$, bilden ein **Fundamentalsystem von Lösungen** oder eine **Integralbasis**. Die spaltenweise mit diesen Lösungen besetzte Matrix $X = (x_\nu^i)$ heißt eine **Fundamentalmatrix**, die spezielle Fundamentalmatrix $\Phi(\cdot, \tau) := (\varphi^i(\cdot; \tau, e_\nu))$ wird **Übergangsmatrix** genannt.

Zusammenfassend gilt

Satz 3.11 (i) Die Lösungsmenge der DGL $\dot{x} = A(t)x$, $(t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$, ist $\mathcal{L}_o = \text{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$ mit n linear unabhängigen Lösungen x_ν (Wronski-Determinante $W(t) \neq 0$).

(ii) Jede Lösung $x \in \mathcal{L}_o$ besitzt eine Darstellung $x(t) = \sum_{\nu=1}^n c^\nu x_\nu(t)$, $t \in I$, mit eindeutig bestimmten $c^\nu \in \mathbb{R}$; mit $c := (c^1, \dots, c^n)^T$ und der Fundamentalmatrix $X : X(t) = (x_\nu^i(t))$ ist

$$x(\cdot) = X(\cdot)c, \quad c \in \mathbb{R}^n, \quad (3.5)$$

die **allgemeine Lösung** der homogenen DGL.

(iii) Die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(\tau) = \xi$ folgt daraus durch Selektion von $c : X(\tau)c = \xi$, als

$$\varphi(\cdot; \tau, \xi) = X(\cdot)X^{-1}(\tau)\xi = \Phi(\cdot; \tau)\xi. \quad (3.6)$$

φ hängt linear vom Anfangswert ξ ab. ■

Bemerkung Die Gleichheit der Matrizen $X(\cdot)X^{-1}(\tau)$ und $\Phi(\cdot, \tau)$ folgt aus dem Unitätsatz: beide sind Fundamentalmatrizen und stimmen bei $t = \tau$ überein. □

Beispiel 3.12 $n = 2$, $A(t) = 2t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\text{DGL: } \dot{x} = A(t)x, \text{ koordinatenweise: } \begin{cases} \dot{x}^1 = & 2tx^2 \\ \dot{x}^2 = & -2tx^1 \end{cases}.$$

Zwei Lösungen sind $x_1 : x_1(t) = (\cos t^2, -\sin t^2)^T$, $x_2 : x_2(t) = (\sin t^2, \cos t^2)^T$ (Probe durch Einsetzen!). Ihre Anfangswerte bei $\tau = 0$ sind $x_1(0) = (1, 0)^T$, $x_2(0) = (0, 1)^T$, also ist $x_\nu(t) = \varphi(t; 0, e_\nu)$, $\nu = 1, 2$, und die zugehörige Fundamentalmatrix ist

$$X(t) = \begin{pmatrix} \cos t^2 & \sin t^2 \\ -\sin t^2 & \cos t^2 \end{pmatrix} = \Phi(t, 0).$$

Die Wronski-Determinante ist $W(t) = 1$ (vgl. Bemerkung (ii) nach Satz 3.8).

Die Lösung mit Anfangswert $(1, -1)^T$ bei $\tau = 0$ ist

$$\varphi(t; 0, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}) = \Phi(t, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (\cos t^2 - \sin t^2, -\sin t^2 - \cos t^2)^T.$$

Mittels (3.6) zeige man, daß diese Lösung mit $-\sqrt{2} \varphi(t; \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ übereinstimmt. □

3.1.2 Die inhomogene Differentialgleichung

Es sei ein Fundamentalsystem X der homogenen DGL bekannt. Damit ist \mathcal{L}_o bekannt, und zur Angabe der Lösungsmenge $\mathcal{L} = x_p + \mathcal{L}_o$ ist die Bestimmung *einer* partikulären Lösung der inhomogenen DGL erforderlich.

x_p kann in einfachen Fällen erraten werden.

Beispiel 3.13 $n = 2$, $\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$: Man suche eine konstante Lösung. □

Im allgemeinen Fall führt die Methode der **Variation der Konstanten** zum Ziel.

Ansatz $x_p(t) = X(t)u(t)$ mit unbekanntem $u(\cdot) | I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Die Konstante $c \in \mathbb{R}^n$ in (3.5) wird durch die Variable $u(\cdot)$ ersetzt. u ist so zu bestimmen, daß x_p der inhomogenen DGL genügt:

$$\dot{x}_p(t) = \dot{X}(t)u(t) + X(t)\dot{u}(t) \stackrel{!}{=} A(t)X(t)u(t) + b(t), \quad t \in I.$$

Da $\dot{X} = A(t)X$ (die Spalten von X sind Lösungen von $\dot{x} = A(t)x$), bleibt $X(t)\dot{u}(t) = b(t)$, also $\dot{u}(t) = X^{-1}(t)b(t)$ zu erfüllen. Das erledigt sich durch Quadratur

$$u(t) = \int_{\alpha}^t X^{-1}(s)b(s)ds \quad \text{mit beliebigem } \alpha \in I,$$

(koordinatenweise: Berechnung von n Integralen mit bekannten Integranden).

Damit ist

$$x_p(t) = X(t) \int_{\alpha}^t X^{-1}(s)b(s)ds \tag{3.7}$$

eine partikuläre Lösung (Probe!).

Die Lösungsmenge \mathcal{L} besteht somit aus allen Funktionen $x(\cdot) | I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$x(t) = X(t)c + X(t) \int_{\alpha}^t X^{-1}(s)b(s)ds, \tag{3.8}$$

wobei $X(\cdot)$ eine Fundamentalmatrix (Spalten: Integrallbasis) der homogenen DGL ist, $c \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in I$.

Die Lösung mit Anfangswert $x(\tau) = \xi$ ist unter den Lösungen (3.8) zu suchen: die entsprechende Integrationskonstante c wird durch $x(\tau) = X(\tau)[c + \int_{\alpha}^{\tau} \dots] = \xi$ eindeutig festgelegt, Einsetzen in (3.8) und Umformung ($\int_{\alpha}^t - \int_{\alpha}^{\tau} = \int_{\tau}^t$, $X(t)$ unter das Integral ziehen, $X(t)X^{-1}(\tau) = \Phi(t, \tau)$) führt zu

Satz 3.14 Die Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi)$ des Anfangswertproblems $\dot{x} = A(t)x + b(t)$, $x(\tau) = \xi$, wird gegeben durch

$$\varphi(t; \tau, \xi) = \Phi(t, \tau)\xi + \int_{\tau}^t \Phi(t, s)b(s)ds, \quad t \in I, \tag{3.9}$$

wobei $\Phi(\cdot, \cdot)$ die Übergangsmatrix der homogenen DGL ist. ■

Gemäß (3.9) hängt φ affin-linear vom Anfangswert ξ ab. Die Lösung (3.9) ist eine additive Überlagerung der Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = A(t)x$, $x(\tau) = \xi$ (erster Term) und der Lösung der inhomogenen DGL, die bei $t = \tau$ verschwindet (zweiter Term).

Bemerkung Der wesentliche Teil der Aufgabe „inhomogene lineare DGL“ besteht also im Finden n linear unabhängiger Lösungen der homogenen DGL, diese bilden die Spalten von $X(\cdot)$; der Rest ist Rechnen (Matrizeninversion, $X^{-1}(\cdot)$) und Quadratur (die nicht elementar durchführbar zu sein braucht). □

3.2 Ein Reduktionsatz

Ein Hilfsmittel zum Finden einer Integralbasis der homogenen DGL $\dot{x} = A(t)x$ bietet der folgende Satz, der eine Dimensionsminderung ermöglicht, sobald eine Lösung bekannt ist.

Satz 3.15 *Ist eine nichttriviale Lösung, $y(\cdot)$, der n -dimensionalen homogenen DGL $\dot{x} = A(t)x$ bekannt, dann reduziert die Transformation (3.10) die DGL lokal auf eine homogen-lineare DGL im \mathbb{R}^{n-1} und eine Quadratur.*

Beweis (1) $y = (y^1, \dots, y^n)^T$ sei eine bekannte Lösung von $\dot{x} = A(t)x$, und es sei (z.B.) $y^1(t) \neq 0$ für $t \in I_1 \subset I$. Mit dieser führen wir folgende Transformation aus:

$$x = \begin{pmatrix} y^1 & & & 0 \\ y^2 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ y^n & 0 & & 1 \end{pmatrix} z \quad : \quad \begin{aligned} x^1 &= y^1 z^1 \\ x^\alpha &= z^\alpha + y^\alpha z^1, \quad \alpha = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$z \mid I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ wird zur neuen gesuchten Funktion. Einführen von (3.10) in die DGL $\dot{x}^i = \sum_{j=1}^n a_j^i(t)x^j$ ergibt folgende Gleichungen:

$$(i) \quad \dot{x}^1 = \underline{\dot{y}^1 z^1} + y^1 \dot{z}^1 \stackrel{!}{=} \underline{a_1^1 y^1 z^1} + \sum_{\beta=2}^n a_\beta^1 (z^\beta + y^\beta z^1).$$

Die markierten Terme heben sich heraus, da $y \in \mathcal{L}_o$, es bleibt

$$\dot{z}^1 = \frac{1}{y^1} \sum_{\beta=2}^n a_\beta^1 z^\beta. \quad (3.11)$$

(z^1 ergibt sich somit durch Quadratur, sobald die z^β , $\beta = 2, \dots, n$, bekannt sind.)

$$(ii) \quad \dot{z}^\alpha + \underline{\dot{y}^\alpha z^1} + y^\alpha \dot{z}^1 \stackrel{!}{=} \underline{a_1^\alpha y^1 z^1} + \sum_{\beta=2}^n a_\beta^\alpha (z^\beta + y^\beta z^1)$$

ergibt mit (3.11)

$$\dot{z}^\alpha = \sum_{\beta=2}^n (a_\beta^\alpha - \frac{y^\alpha}{y^1} a_\beta^1) z^\beta, \quad \alpha = 2, \dots, n, \quad (3.12)$$

ein System von $n - 1$ homogen-linearen DGLn (DGL in \mathbb{R}^{n-1}).

Nun sei $\{z_\varrho, \varrho = 2, \dots, n\}$, eine Integralbasis von (3.12). Mit den Koordinaten der z_ϱ , $z_\varrho = (z_\varrho^2, \dots, z_\varrho^n)^T$, berechnen wir nach (3.11), (3.10)

$$z_\varrho^1 := \int \frac{1}{y^1} \sum_{\beta=2}^n a_\beta^1 z_\varrho^\beta dt,$$

$$\begin{aligned} x_\varrho^1 &:= y^1 z_\varrho^1 \\ x_\varrho^\alpha &:= z_\varrho^\alpha + y^\alpha z_\varrho^1, \quad x_\varrho = (x_\varrho^1, x_\varrho^2, \dots, x_\varrho^n)^T, \quad \varrho = 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Dann ist $\{y, x_2, \dots, x_n\}$ eine Integralbasis von $\dot{x} = A(t)x$, $x \in \mathbb{R}^n$. Denn nach Konstruktion sind y und x_ϱ aus \mathcal{L}_o , und ihre Wronski-Determinante ist

$$\det(y^i, x_\rho^i) = \det \begin{pmatrix} y^1 & y^1 z_\rho^1 \\ y^\alpha & z_\rho^\alpha + y^\alpha z_\rho^1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} y^1 & 0 \\ y^\alpha & z_\rho^\alpha \end{pmatrix} = y^1 \det(z_\rho^\alpha) \neq 0, t \in I_1.$$

(2) Die gefundene Integralbasis, X_1 , ist nach Konstruktion zunächst nur auf dem von y^1 -Nullstellen freien Intervall $I_1 \subset I$ definiert. Da aber jede Lösung das Intervall I als Maximalintervall besitzt, läßt sich die Integralbasis auf ganz I fortsetzen.

Eine Fortsetzung über I_1 hinaus könnte praktisch folgendermaßen gewonnen werden. Sei $I_1 = (a, b)$ und $y^1(b) = 0$. Dann ist mindestens eine der Funktionen y^2, \dots, y^n bei $t = b$ verschieden von Null (Lemma 3.3). Sei z.B. $y^2(b) \neq 0$, dann ist $y^2(t) \neq 0$ für alle t eines offenen Intervalls I_2 mit $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset, I_2 \setminus I_1 \neq \emptyset$. Das Reduktionsverfahren wird wiederholt mit y^2 anstelle von y^1 , und es wird eine solche Integralbasis X_2 auf I_2 bestimmt, die auf $I_1 \cap I_2$ mit der ersten Integralbasis X_1 zusammenfällt, somit X_1 auf das Intervall $I_2 \setminus I_1$ fortsetzt.

Haben die y^i nur endlich viele Nullstellen auf I , dann ist nach endlich vielen der erläuterten Schritte eine Integralbasis auf I konstruiert. ■

Im Fall $n = 2$ ist (3.12) eine lineare DGL im \mathbb{R}^1 , deren Lösung durch Quadratur zu finden ist.

3.3 Einige Eigenschaften der Fundamentalmatrizen

Die Spalten $x_\nu = (x_\nu^1, \dots, x_\nu^n)^T, \nu = 1, \dots, n$, einer Fundamentalmatrix sind linear unabhängige Lösungen der DGL $\dot{x} = A(t)x, (t, x) \in I \times \mathbb{R}^n$. Somit ist eine Fundamentalmatrix X charakterisiert durch

$$\forall t \in I \quad \dot{X}(t) = A(t)X(t), \det X(t) = W(t) \neq 0. \tag{3.13}$$

$X(\cdot)$ ist also eine für jedes $t \in I$ nichtsinguläre Lösung der $n \times n$ -Matrizen-DGL $\dot{X} = A(t)X$. Die zu festem $\tau \in I$ gehörende Übergangsmatrix $\Phi(\cdot, \tau)$ ist durch

$$\forall t \in I \quad \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, \tau) = A(t)\Phi(t, \tau), \Phi(\tau, \tau) = E \tag{3.14}$$

($E : n \times n$ -Einheitsmatrix) charakterisiert. Gemäß (3.6) vermittelt sie den Übergang $\xi = x(\tau) \rightarrow x(t) = \varphi(t; \tau, \xi) = \Phi(t, \tau)\xi$. Jede der Matrizen $\Phi(t, \tau)$ repräsentiert somit eine lineare Abbildung $\mathbb{L}_{t, \tau} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, die wegen der Nichtsingularität von $\Phi(t, \tau)$, eine Bijektion ist. Alle diese (durch die DGL bestimmten) Abbildungen sind untereinander stark verknüpft. Um das zu sehen, betrachten wir die Bilder eines beliebigen Anfangspunktes ξ unter den Abbildungen $\mathbb{L}_{\tau_1, \tau_0}$ und $\mathbb{L}_{\tau_2, \tau_0}$ mit $\tau_0, \tau_1, \tau_2 \in I$. (Ist $\tau_0 < \tau_1 < \tau_2$, dann markiert die verbindende orientierte Kurve die Bahn $t \mapsto \mathbb{L}_{t, \tau_0}\xi$ bei monoton wachsendem $t \in (\tau_0, \tau_2)$). Ist $\mathbb{L}_{\tau_1, \tau_0}\xi = \eta, \mathbb{L}_{\tau_2, \tau_0}\xi = \zeta$, dann ist zufolge des Unitätssatzes $\zeta = \mathbb{L}_{(\tau_2, \tau_1)}\eta$, denn die beiden Lösungen $\varphi(\cdot; \tau_0, \xi)$ und $\varphi(\cdot; \tau_1, \eta)$ haben bei $t = \tau_1$ den gemeinsamen Wert η . Da ξ beliebig gewählt war, gilt somit

$$\forall \tau_0, \tau_1, \tau_2 \in I \quad \mathbb{L}_{\tau_2, \tau_1} \circ \mathbb{L}_{\tau_1, \tau_0} = \mathbb{L}_{\tau_2, \tau_0}. \tag{3.15-a}$$

beziehungsweise

$$\forall \tau_0, \tau_1, \tau_2 \in I \quad \Phi(\tau_2, \tau_1) \cdot \Phi(\tau_1, \tau_0) = \Phi(\tau_2, \tau_0) \tag{3.15-b}$$

Mit $\tau_0 = \tau_2 = \tau, \tau_1 = t$ folgt aus (3.15-b) $\Phi(\tau, t) \cdot \Phi(t, \tau) = \Phi(\tau, \tau) = E$, und das heißt

$$\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t). \quad (3.16)$$

Die Inverse einer bekannten Übergangsmatrix läßt sich also einfach durch Vertauschen der beiden Argumente bestimmen.

Eine Fundamentalmatrix $X(\cdot)$ bestimmt eindeutig die Koeffizientenmatrix $A(\cdot)$: durch Multiplikation von rechts mit $X^{-1}(t)$ folgt aus (3.13)

$$\dot{X}(t) \cdot X^{-1}(t) = A(t). \quad (3.17)$$

Ist also eine differenzierbare $n \times n$ -Matrix $X(\cdot)$ gegeben, die an keiner Stelle des Intervalls $I \subset \mathbb{R}$ singulär ist, dann sind ihre Spalten auf I linear unabhängige Lösungen der DGL $\dot{x} = A(t)x$ mit der durch (3.17) gegebenen Koeffizientenmatrix.

Die Inverse einer Fundamentalmatrix genügt selbst einer wohlbestimmten DGL. Wird die Identität $E = X^{-1}X$ nach t differenziert, dann folgt $0 = (X^{-1})'X + X^{-1}\dot{X} = (X^{-1})'X + X^{-1}AX$, und nach Multiplikation von rechts mit X^{-1}

$$(X^{-1})' = -X^{-1}A(t). \quad (3.18)$$

Für eine Übergangsmatrix heißt das (mit (3.16) und einer Vertauschung von t, τ)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t, \tau) = -\Phi(t, \tau)A(\tau). \quad (3.19)$$

Transposition in (3.13) ergibt unter Beachtung von $(X^T)' = \dot{X}^T$ für die Transponierte einer Fundamentalmatrix sofort die DGL

$$(X^T)' = X^T A^T(t). \quad (3.20)$$

Transposition in (3.18) ergibt für die transponierte Inverse, X^{-T} , einer Fundamentalmatrix

$$(X^{-T})' = -A^T(t)X^{-T}. \quad (3.21)$$

Die Spalten y_ν der transponierten Inversen einer Fundamentalmatrix (d.h., die Zeilen der Inversen) sind somit linear unabhängige Lösungen der zu $\dot{x} = A(t)x$ *formal adjungierten DGL*

$$\dot{y} = -A^T(t)y. \quad (3.22)$$

Es ist zu erwarten, daß spezielle Eigenschaften der Koeffizientenmatrix Anlaß zu speziellen Eigenschaften der Fundamentalmatrizen geben. Der folgende Satz beleuchtet diesen Sachverhalt in geometrisch und applikativ relevanter Weise.

Satz 3.16 *Folgende Aussagen sind äquivalent.*

- (i) *Die Koeffizientenmatrix ist schiefsymmetrisch, $\forall t \in I A(t) = -A^T(t)$.*
- (ii) *Jede Übergangsmatrix ist orthonormiert mit positiver Determinante, d.h., $\forall t, \tau \in I \Phi^T(t, \tau)\Phi(t, \tau) = E, \det \Phi(t, \tau) = 1$.*
- (iii) *Jede der linearen Abbildungen $\mathbb{L}_{t, \tau} : \xi \mapsto \Phi(t, \tau)\xi$ des \mathbb{R}^n ist eine Drehung.*

Beweis Sei X zunächst irgendeine Fundamentalmatrix. Dann ist $(X^T X)' = \dot{X}^T X + X^T \dot{X} = X^T A^T X + X^T A X = X^T (A^T + A) X$.

(ii) \Rightarrow (i): Ist $X^T X = E$ (es genügt schon Konstanz), dann ist $(X^T X)' = 0$, und Multiplikation mit X^{-T} bzw. X^{-1} ergibt $A^T + A = 0$.

(i) \Rightarrow (ii): $A^T = -A$ impliziert $X^T X = \text{const}$. Also ist X orthonormiert, falls an einer Stelle $t = \tau$ $X^T(\tau)X(\tau) = E$; für $X(\cdot) = \Phi(\cdot, \tau)$ ist das wegen $\Phi(\tau, \tau) = E$ erfüllt.

(ii) \Leftrightarrow (iii): Sachverhalt der linearen Algebra und Geometrie. ■

3.4 Die lineare Differentialgleichung mit konstanter Koeffizientenmatrix

Die jetzt zu untersuchende DGL

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{3.23}$$

mit konstanter Koeffizientenmatrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Inhomogenität $b(\cdot) \in C^o(I, \mathbb{R}^n)$ ist Spezialfall von (3.1). Somit findet die in Kapitel 3.1 entwickelte Theorie Anwendung (Integralbasis, Partikulärlösung, Variation der Konstanten). Darüber hinaus gestattet die Konstanz der Koeffizientenmatrix die explizite Berechnung der Integralbasen, so daß für die homogene DGL nun auch die analytische Struktur des Lösungsraumes \mathcal{L}_o geklärt wird.

Die Bestimmung einer Integralbasis erfolgt mit Mitteln der linearen Algebra, die benötigten Begriffe und Lemmata werden im folgenden Abschnitt zusammengestellt.

3.4.1 Hilfsmittel aus der linearen Algebra

In diesem Abschnitt sollen später benötigte Aussagen über die Eigenwerte und verallgemeinerten Eigenräume von reellen quadratischen Matrizen zusammengestellt werden. Die Beweise sind in der einschlägigen Literatur zur Linearen Algebra zu finden. Vergleiche aber auch [5].

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reelle quadratische Matrix und (λ, z) ein *Eigenpaar* von A - also $0 \neq z \in \mathbb{C}^n$ ist Lösung der Gleichung (in \mathbb{C}^n)

$$(A - \lambda E)z = 0. \tag{3.24}$$

λ heißt *Eigenwert* von A , und z ist der zugehörige *Eigenvektor*. λ ist also genau dann Eigenwert von A , wenn die Gleichung (3.24) nichttriviale Lösungen (in \mathbb{C}^n) besitzt. Die Menge aller Eigenwerte von A heißt *Spektrum* von A und wird mit $\sigma(A)$ bezeichnet. Aus (3.24) folgt, daß die Menge der zum Eigenwert λ gehörigen Eigenvektoren (ergänzt durch $0 \in \mathbb{C}^n$) einen (komplexen) linearen Raum E_λ - den *Eigenraum* - bilden. Bezeichnet man die Menge aller $z \in \mathbb{C}^n$, die (3.24) genügen, mit $\ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)$, ergibt sich somit $E_\lambda = \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)$.

Andererseits ist klar, daß die Gleichung (3.24) nur dann nichttriviale Lösungen ($z \neq 0$) besitzt, wenn

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{3.25}$$

Diese Gleichung gibt sofort eine Möglichkeit zur Berechnung von Eigenwerten. $P(\lambda) := \det(A - \lambda E)$ ist ein Polynom n -ten Grades - das sogenannte *charakteristische Polynom* von A . (3.25) besagt, daß die Nullstellen des charakteristischen Polynoms gerade die Eigenwerte von A sind. Sei λ ein Eigenwert von A . Die Vielfachheit k_λ der Nullstelle λ des charakteristischen Polynoms $P(\cdot)$ heißt *algebraische Vielfachheit* des Eigenwertes. Der Fundamentalsatz der Algebra lehrt nun, daß $\sum_{\lambda \in \sigma(A)} k_\lambda = n$ gilt. Die Dimension des Eigenraumes, $\dim E_\lambda =: m_\lambda$, heißt *geometrische Vielfachheit* des Eigenwertes. Im Falle $k_\lambda = 1$ ist λ ein *einfacher* Eigenwert.

Es gilt stets $1 \leq m_\lambda \leq k_\lambda$. Ist $m_\lambda = k_\lambda$, heißt λ *halbeinfacher* Eigenwert.

Für jedes $\lambda \in \sigma(A)$ ist $\dim \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)^{k_\lambda} = k_\lambda$. Die von Null verschiedenen Elemente von $\ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)^{k_\lambda}$ heißen *verallgemeinerte Eigenvektoren* von A , und entsprechend ist $\ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)^{k_\lambda}$ der *verallgemeinerte Eigenraum* zu λ (offensichtlich ist $E_\lambda \subset \ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)^{k_\lambda}$).

Ist λ ein reeller Eigenwert, so besitzt der verallgemeinerte Eigenraum $\ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)^{k_\lambda}$ (ebenso wie der Eigenraum E_λ) eine reelle Basis. Den dadurch erzeugten k_λ -dimensionalen reellen Vektorraum bezeichnen wir mit V_λ .

Ist dagegen $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ein Eigenwert von A , so gibt es keinen reellen Eigenvektor. Jedoch ist dann auch die konjugiert komplexe Zahl $\bar{\lambda}$ ein Eigenwert von A und es gilt $\bar{E}_\lambda := \{\bar{z} : z \in E_\lambda\} = E_{\bar{\lambda}}$. Das heißt, für die Eigenräume E_λ und $E_{\bar{\lambda}}$ existieren konjugiert komplexe Basen. Dasselbe gilt auch für die verallgemeinerten Eigenräume zu λ und $\bar{\lambda}$. Es gibt somit einen $2k_\lambda$ -dimensionalen Unterraum V_λ von \mathbb{R}^n , so daß $\ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)^{k_\lambda} \oplus \ker_{\mathbb{C}}(A - \bar{\lambda} E)^{k_{\bar{\lambda}}} = V_\lambda + iV_\lambda$ ist. V_λ ist ein reeller Unterraum von $\ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)^{k_\lambda} \oplus \ker_{\mathbb{C}}(A - \bar{\lambda} E)^{k_{\bar{\lambda}}}$. Natürlich ist $V_\lambda = V_{\bar{\lambda}}$.

V_λ nennen wir (sowohl für $\lambda \in \mathbb{R}$ als auch für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) den reellen verallgemeinerten Eigenraum.

Es gilt der folgende

Satz 3.17 Die direkte Summe der reellen verallgemeinerten Eigenräume ist der gesamte \mathbb{R}^n , also $\bigoplus_{\lambda \in \sigma(A)} V_\lambda = \mathbb{R}^n$. ■

3.4.2 Berechnen einer Integralbasis

Das Vorbild der homogen-linearen DGL im \mathbb{R}^1 ($\dot{x} = ax$, $a \in \mathbb{R}$, mit der allgemeinen Lösung $x(t) = ce^{at}$, $c \in \mathbb{R}^1$) legt den folgenden Versuch, Lösungen zu finden, nahe.

Exponentialansatz: $x(t) = ze^{\lambda t}$ mit $z \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (3.26)

Einführen in die DGL $\dot{x} = Ax$ ergibt: $\forall t \in \mathbb{R} \quad z\lambda e^{\lambda t} = Aze^{\lambda t}$, da die Exponentialfunktion keine Nullstellen besitzt, bleibt die Forderung $(A - \lambda E)z = 0$.

Der Ansatz (3.26) führt somit auf das Eigenwertproblem der Matrix A , es gilt

Lemma 3.18 Mit $x(t) := ze^{\lambda t}$ ist $x(\cdot) \in \mathcal{L}_o$ genau dann, wenn (λ, z) ein reelles Eigenpaar der Matrix A ist. ■

Damit ist klar, daß im ersten Schritt alle Eigenwerte der Matrix A zu bestimmen sind. Jeder reelle Eigenwert liefert so viele linear unabhängige Lösungen der Form (3.26) wie die

Dimension seines Eigenraumes angibt. Sind alle Eigenwerte reell und halbeinfach (Dimension des Eigenraumes gleich algebraischer Vielfachheit), dann entstehen so insgesamt n linear unabhängige Lösungen, d.h. eine Integralbasis. Im allgemeinen ist das nicht der Fall. Wir zeigen, daß in jedem Fall folgender Versuch zum Ziel führt.

Verallgemeinerter Exponentialansatz: $x(t) = p(t)e^{\lambda t}$ (3.27)

mit dem Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ der algebraischen Vielfachheit k und einem Polynom $p(\cdot) | \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ vom Grad $k - 1$.

Man überlege: Damit ein Ansatz $x(t) = p(t)e^{\mu t}$, $p(\cdot)$ -Polynom, eine Lösung der DGL $\dot{x} = Ax$ liefert, ist *notwendig*, daß μ Eigenwert von A ist und der Grad des Polynoms kleiner als die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes μ ist.

Der Ansatz befriedigt die DGL genau dann, wenn für alle $t \in \mathbb{R}$ $p(t)\lambda e^{\lambda t} + \dot{p}(t)e^{\lambda t} = Ap(t)e^{\lambda t}$, d.h. wenn $p(\cdot)$ der DGL

$$\dot{p}(t) = (A - \lambda E)p(t) \tag{3.28}$$

genügt. Schreiben wir das Polynom in der Form

$$p(t) = a_0 + \frac{1}{1!}a_1 t + \frac{1}{2!}a_2 t^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}a_{k-1} t^{k-1}, \quad a_\nu \in \mathbb{C}^n, \tag{3.29}$$

dann liefert der Koeffizientenvergleich in (3.28)

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= (A - \lambda E)a_0 \\ a_2 &= (A - \lambda E)a_1 = (A - \lambda E)^2 a_0 \\ \dots & \\ a_{k-1} &= (A - \lambda E)a_{k-2} = (A - \lambda E)^{k-1} a_0 \end{aligned} \right\} \tag{3.30-a}$$

$$0 = (A - \lambda E)a_{k-1} = (A - \lambda E)^k a_0. \tag{3.30-b}$$

Mit jeder Lösung a_0 des homogen-linearen Gleichungssystems (3.30-b) und den zugehörigen aus (3.30-a) rekursiv zu bestimmenden a_1, a_2, \dots, a_{k-1} löst (3.29) die DGL (3.28), und $x(\cdot)$ gemäß (3.27) ist eine (komplexwertige) Lösung von $\dot{x} = Ax$.

Sind $a_{0\kappa}$, $\kappa = 1, \dots, k$, linear unabhängige Lösungen der linearen Gleichung (3.30-b) (verallgemeinerte Eigenvektoren zum Eigenwert λ) und $p_\kappa(\cdot)$ die zugehörigen Polynome, dann sind $x_\kappa(\cdot)$, $x_\kappa(t) = p_\kappa(t)e^{\lambda t}$, $\kappa = 1, \dots, k$, linear unabhängige (jedoch möglicherweise komplexwertige) Lösungen der DGL $\dot{x} = Ax$. Ihre lineare Unabhängigkeit folgt aus Lemma 3.4 mit $\tau = 0$.

Ist λ reell, so sind auch sämtliche Lösungen $x_\kappa(t) = p_\kappa(t)e^{\lambda t}$ reellwertig. Das heißt, jeder reelle Eigenwert erzeugt so viele linear unabhängige Lösungen

$$x_\kappa(t) = \left(\sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} a_{\nu\kappa} t^\nu \right) e^{\lambda t} \tag{3.31}$$

der DGL wie seine algebraische Vielfachheit angibt. Die Lösungen zu verschiedenen Eigenwerten sind ebenfalls linear unabhängig (da die entsprechenden verallgemeinerten Eigenvektoren

linear unabhängig sind). Besitzt A also nur reelle Eigenwerte, dann ist, da die Summe der Vielfachheiten gleich n ist, eine Integralbasis gefunden.

Zu klären bleibt die Gewinnung reeller Lösungen zu nichtreellen Eigenwerten. Dazu verifizieren wir zunächst

Lemma 3.19 *Ist $x(\cdot) | \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine komplexwertige Lösung der DGl $\dot{x} = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann sind Real- und Imaginärteil $\operatorname{Re} x(\cdot)$ und $\operatorname{Im} x(\cdot)$ von $x(\cdot)$ zwei reelle Lösungen der DGl.*

Beweis Mit $x(\cdot) = u(\cdot) + iv(\cdot)$, $u, v | \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, gilt $\dot{u} + i\dot{v} = Au + iAv$, wegen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ somit $\dot{u} = Au$ und $\dot{v} = Av$. ■

Sei nun $\lambda = \varrho + i\sigma, \sigma \neq 0$, ein komplexer Eigenwert der algebraischen Vielfachheit k , und es sei $a_o \in \mathbb{C}^n$ eine Lösung der linearen Gleichung $(A - \lambda E)^k a_o = 0$. Da A und E reelle Matrizen sind, gilt auch die konjugiert komplexe Gleichung $(A - \bar{\lambda} E)^k \bar{a}_o = 0$. Mit λ ist auch $\bar{\lambda} = \varrho - i\sigma$ Eigenwert der Vielfachheit k (reelles charakteristisches Polynom!). Ist also $\{a_{o1}, \dots, a_{ok}\}$ eine Basis des verallgemeinerten Eigenraumes zu λ , dann ist $\{\bar{a}_{o1}, \dots, \bar{a}_{ok}\}$ Basis des verallgemeinerten Eigenraumes zu $\bar{\lambda}$ ($\bar{\lambda}$ erfordert somit keine neue Rechnung, sondern nur komplexe Konjugation). Gemäß (3.30-a) berechnen sich $a_{\nu\kappa} := (A - \lambda E) a_{\nu-1\kappa}$, $\nu = 1, \dots, k-1$ und $\bar{a}_{\nu\kappa} := (A - \bar{\lambda} E) \bar{a}_{\nu-1\kappa}$, $\nu = 1, \dots, k-1$. Damit erzeugen die beiden konjugiert komplexen Eigenwerte λ und $\bar{\lambda}$ die konjugiert komplexen Lösungen $x_\kappa(t) = p_\kappa(t)e^{\lambda t}$ mit $p_\kappa(t) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} a_{\nu\kappa} t^\nu$ und $\bar{x}_\kappa(t) = \bar{p}_\kappa(t)e^{\bar{\lambda} t}$, $\kappa = 1, \dots, k$, der DGl. Mit $e^{\lambda t} = e^{\varrho t} (\cos \sigma t + i \sin \sigma t)$, $a_{\nu\kappa} = \alpha_{\nu\kappa} + i\beta_{\nu\kappa}$, $\alpha_{\nu\kappa}, \beta_{\nu\kappa} \in \mathbb{R}^n$, ergibt die Zerspaltung in Real- und Imaginärteil die $2k$ reellen Lösungen

$$\begin{aligned} x_\kappa^{(1)}(t) &= e^{\varrho t} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} t^\nu (\alpha_{\nu\kappa} \cos \sigma t - \beta_{\nu\kappa} \sin \sigma t) \\ x_\kappa^{(2)}(t) &= e^{\varrho t} \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} t^\nu (\alpha_{\nu\kappa} \sin \sigma t + \beta_{\nu\kappa} \cos \sigma t) \end{aligned} \quad \kappa = 1, \dots, k. \quad (3.32)$$

Es ist noch zu zeigen, daß diese $2k$ Lösungen (reell) linear unabhängig sind.

Offensichtlich ist $x_\kappa^{(1)}(0) = \alpha_{o\kappa}$, $x_\kappa^{(2)}(0) = \beta_{o\kappa}$. Der Zusammenhang

$$(\alpha_{o\kappa}, \beta_{o\kappa}) = \frac{1}{2} (a_{o\kappa}, \bar{a}_{o\kappa}) \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

zeigt, daß der Übergang $(a_{o1}, \bar{a}_{o1}, \dots, a_{ok}, \bar{a}_{ok}) \rightarrow (\alpha_{o1}, \beta_{o1}, \dots, \alpha_{ok}, \beta_{ok})$ eine Basistransformation (überlege mit welcher regulären Matrix) des $2k$ -dimensionalen Raumes $\ker_{\mathbb{C}}(A - \lambda E)^k \oplus \ker_{\mathbb{C}}(A - \bar{\lambda} E)^k$ ist. Also sind $\alpha_{o1}, \dots, \beta_{ok}$ \mathbb{C} -linear unabhängig, somit erst recht \mathbb{R} -linear unabhängig, und die lineare Unabhängigkeit der $2k$ reellen Lösungen $x_\kappa^{(1)}, x_\kappa^{(2)}$, $\kappa = 1, \dots, k$, folgt nach Lemma 3.4.

Unter Verwendung der Sätze 3.9 und 3.17 ergibt sich schließlich der folgende

Satz 3.20 *Mit Hilfe des verallgemeinerten Exponentialansatzes (3.27) gewinnt man n linear unabhängige Lösungen und damit eine Integralbasis der linearen homogenen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.*

(3.31) und (3.32) zeigen die allgemeine Form einer Basislösung und damit die analytische Struktur des Lösungsraumes \mathcal{L}_o : jede Lösung ist eine Linearkombination von Funktionen der Form \mathbb{R}^n -wertiges Polynom mal Exponentialfunktion (eventuell) mal Kreisfunktion. Andere Funktionen können nicht Lösung einer Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sein. ■

Abschließend fassen wir die obigen Überlegungen zusammen zu einem **Algorithmus zur Bestimmung einer Integralbasis**

Schritt 1: Bestimme alle Eigenwerte der Matrix $A : \lambda_\mu, \mu = 1, \dots, m$, mit ihren algebraischen Vielfachheiten $k_\mu \geq 1$.

Schritt 2: Mit $\lambda = \lambda_\mu, k = k_\mu$ bestimme k linear unabhängige Lösungen $a_{o\kappa}, \kappa = 1, \dots, k$, der linearen Gleichung

$$(A - \lambda E)^k a_o = 0 \tag{3.33}$$

und danach rekursiv

$$a_{\nu\kappa} = (A - \lambda E)a_{\nu-1,\kappa}, \quad \nu = 1, \dots, k - 1. \tag{3.34}$$

Mit $p_\kappa(t) := \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} a_{\nu\kappa} t^\nu$ sind $x_\kappa(\cdot) : x_\kappa(t) = p_\kappa(t)e^{\lambda t}, \kappa = 1, \dots, k$, k vom Eigenwert λ erzeugte Elemente (komplexwertig, falls λ nichtreell) einer Integralbasis.

Schritt 3: Für nichtreelles $\lambda = \lambda_\mu$ bilde $x_\kappa^{(1)} = \operatorname{Re} x_\kappa$ und $x_\kappa^{(2)} = \operatorname{Im} x_\kappa$ als die von den beiden Eigenwerten λ und $\bar{\lambda}$ erzeugten $2k$ reellen Elemente einer Integralbasis.

Bemerkung Von zwei konjugiert komplexen Eigenwerten muß also nur einer durchgerechnet werden. Bei $k = 1$ ist die Rekursion (3.34) leer, bei halbeinfachen λ sind die $a_{o\kappa}$ Eigenvektoren und $a_{\nu\kappa} = 0, \nu = 1, \dots, k - 1$. Der Algorithmus erfordert keine Ranguntersuchung von Matrizen, verlangt in jedem Schritt 2 nur eine Gleichungsauflösung und ansonsten nur Matrizenmultiplikationen. Der ganze Algorithmus kann mit verfügbarer Algebra-Software automatisiert werden. \square

Beispiel 3.21 Wir betrachten folgende Differentialgleichung im \mathbb{R}^5 :

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Das charakteristische Polynom von A ist $P(\lambda) = (2 - \lambda)^3(\lambda^2 - 2\lambda + 2)$. Wir erhalten $\sigma(A) = \{2, 1 + i, 1 - i\}$. Der Eigenwert $\lambda = 2$ besitzt die algebraische Vielfachheit $k_2 = 3$. Damit ist der 1.Schritt des Algorithmus abgearbeitet.

Als nächstes bestimmen wir die zum Eigenwert $\lambda = 2$ gehörigen Lösungen der Differentialgleichung:

$$(A - \lambda E)^3 a_o = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 & -4 & -4 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} a_o \stackrel{!}{=} 0$$

liefert $a_{o1} = (0, 0, 0, -1, 1)^T, \quad a_{o2} = (0, 0, -1, 0, 2)^T$ und $a_{o3} = (0, -1, 0, 0, 1)^T$.

Nach (3.34) berechnen wir jetzt $a_{11} = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ und $a_{12} = a_{13} = (0, -1, 0, 0, -1)^T$ und

schließlich $a_{21} = a_{22} = a_{23} = (0, 0, 0, 0, 0)^T$. Wir erhalten drei linear unabhängige Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (0, 0, 0, -1, 1)^T e^{2t}, \\ x_2(t) &= ((0, 0, -1, 0, 2)^T + (0, -1, 0, 0, -1)^T t) e^{2t} \text{ und} \\ x_3(t) &= ((0, -1, 0, 0, 1)^T + (0, -1, 0, 0, -1)^T t) e^{2t}. \end{aligned}$$

Bleibt die Berechnung der zu den komplexen Eigenwerten gehörenden Lösungen:

Zu den konjugiert komplexen Eigenwerten $1 + i$ bzw. $1 - i$ finden wir die konjugiert komplexen Eigenvektoren $(2, -1 - i, 0, 0, 0)^T$ bzw. $(2, -1 + i, 0, 0, 0)^T$. Die zu $1 + i$ gehörende (komplexwertige) Lösung von $\dot{x} = Ax$ lautet $x(t) = (2, -1 - i, 0, 0, 0)^T e^{(1+i)t}$. Mit

$$x_4(t) := \operatorname{Re} x(t) = ((2, -1, 0, 0, 0)^T \cos t + (0, 1, 0, 0, 0)^T \sin t) e^t$$

und

$$x_5(t) = \operatorname{Im} x(t) = ((0, -1, 0, 0, 0)^T \cos t + (2, -1, 0, 0, 0)^T \sin t) e^t$$

ist die (reelle) Integralbasis komplett. \square

3.4.3 Die Übergangsmatrix der DGI $\dot{x} = Ax$

Im Kapitel 3.4.2 wurde ein Algorithmus zur *praktischen* Bestimmung der Elemente einer Integralbasis (= Spalten einer Fundamentalmatrix X) angegeben. Eine Übergangsmatrix kann dann durch $\Phi(t, \tau) := X(t)X^{-1}(\tau)$ gewonnen werden.

Für *theoretische* Zwecke ist eine andere, formal geschlossene Darstellung von $\Phi(t, \tau)$ unverzichtbar. Um diese zu erhalten, gehen wir von der Integralgleichungsform

$$x(t) = \xi + \int_{\tau}^t Ax(s)ds =: (\mathbf{T}_A x)(t) \quad (3.35)$$

des AWP $\dot{x} = Ax$, $x(\tau) = \xi$, aus. Von der Picard-Lindelöf Iteration (2.6)

$$\varphi_0(t) := \xi, \quad \varphi_{k+1}(t) := \xi + \int_{\tau}^t A\varphi_k(s)ds \quad (3.36)$$

wissen wir, daß sie auf einem Intervall $[\tau - \alpha, \tau + \alpha]$ (mit hinreichend kleinem $\alpha > 0$) gleichmäßig gegen die Lösung des AWP konvergiert. Aufgrund der einfachen Struktur des Integranden läßt sich das Verfahren globalisieren und $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\cdot)$ explizit angeben.

Sei $I \subset \mathbb{R}$ irgendein kompaktes Intervall und $\tau \in I$. Mit $|I|$ bezeichnen wir die Länge des Intervalles I . Auf I definieren wir die Folge $(\varphi_k(\cdot))$ gemäß (3.36). Mit der Maximumnorm $\|\cdot\|$ im \mathbb{R}^n und dazu kompatibler Matrixnorm gelten folgende Abschätzungen für jedes $t \in I$:

$$\begin{aligned} \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| &\leq \left| \int_{\tau}^t \|A\xi\| ds \right| \leq |t - \tau| \|A\| \|\xi\| \leq |I| \|A\| \|\xi\|, \\ \|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\| &\leq \left| \int_{\tau}^t \|A\| \|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\| ds \right| \leq \|A\| \left| \int_{\tau}^t |s - \tau| \|A\| \|\xi\| ds \right| \\ &= \frac{1}{2} |t - \tau|^2 \|A\|^2 \|\xi\| \leq \frac{1}{2} |I|^2 \|A\|^2 \|\xi\| \end{aligned}$$

und induktiv

$$\|\varphi_k(t) - \varphi_{k-1}(t)\| \leq \frac{1}{k!} |I|^k \|A\|^k \|\xi\|. \quad (3.37)$$

Unter Verwendung der Dreiecksungleichung folgt

$$\|\varphi_k(t) - \varphi_m(t)\| \leq \sum_{\nu=m+1}^k \frac{1}{\nu!} |I|^\nu \|A\|^\nu \|\xi\| =: e(m, k) \|\xi\|. \quad (3.38)$$

Damit ist auch $\|\varphi_k - \varphi_m\|_{C^0(I, \mathbb{R}^n)} \leq e(m, k) \|\xi\|$ und, da $e(m, k)$ Reihenabschnitt von $\exp(|I| \|A\|)$ ist, bilden die $\varphi_k(\cdot)$ eine Cauchy-Folge in $C^0(I, \mathbb{R}^n)$, also existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(\cdot) =: \varphi(\cdot) \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$. Wegen der Stetigkeit des Operators $\mathbf{T}_A|C^0 \rightarrow C^0$ folgt aus (3.36) $\varphi = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{T}_A \varphi_k = \mathbf{T}_A \varphi$, also stimmt $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k$ auf I mit der Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi) = \Phi(t, \tau)\xi$ des AWP überein. Aus der Rekursion (3.36) lassen sich die Iterierten explizit berechnen: $\varphi_1(t) = \xi + \int_\tau^t A \xi ds = (E + A(t - \tau))\xi$, $\varphi_2(t) = \xi + \int_\tau^t A(E + A(s - \tau))\xi ds = (E + A(t - \tau) + \frac{1}{2!}A^2(t - \tau)^2)\xi$, allgemein (mit $A^0 := E$)

$$\varphi_k(t) = \left(\sum_{\nu=0}^k \frac{1}{\nu!} A^\nu (t - \tau)^\nu \right) \xi =: A_k(t, \tau)\xi. \quad (3.39)$$

Die vorangegangenen Überlegungen zeigen, daß mit jedem $\xi \in \mathbb{R}^n$ für $k \rightarrow \infty$ der Limes gleichmäßig bezüglich $t \in I$ existiert, daher konvergiert die Folge der Matrizen $A_k(t, \tau)$ gleichmäßig bezüglich t im Sinne der Matrixnorm gegen die Übergangsmatrix.

Schreibweise:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k(t, \tau) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^\nu (t - \tau)^\nu =: e^{A(t-\tau)}. \quad (3.40)$$

Lemma 3.22 *Auf jedem kompakten Intervall, welches τ enthält, ist $t \mapsto e^{A(t-\tau)}\xi = \varphi(t; \tau, \xi)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = Ax$, $x(\tau) = \xi$.*

Die Übergangsmatrix der DGl $\dot{x} = Ax$ ist

$$\Phi(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}. \quad (3.41)$$

■

Allenfalls für sehr spezielle Matrizen A wird man die Übergangsmatrix wirklich nach (3.41) und (3.40) berechnen. Für qualitative Aussagen über die Lösungen ist jedoch die explizite Lösungsdarstellung sehr wertvoll. Die folgenden Hilfssätze bieten dafür eine Grundlage. Zum Beweis dient entweder die konvergente Reihe (3.40) oder die Tatsache, daß $t \mapsto e^{At}$ Fundamentalmatrix ist.

Definition 3.23 *Die Zuordnung*

$$\exp|\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} : A \mapsto \exp(A) := e^A = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} A^\nu \quad (3.42)$$

heißt Matrizen-Exponentialfunktion.

Lemma 3.24 Θ *sei die $n \times n$ Nullmatrix. Es gilt*

(i) $\exp(\Theta) = E$;

(ii) $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \Rightarrow \exp(A) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$;

(iii) (λ, ξ) Eigenpaar zu $A \Rightarrow (e^\lambda, \xi)$ Eigenpaar zu $\exp(A)$.

Beweis Mit (3.42) unter Beachtung von $(\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n))^\nu = \text{diag}(\lambda_1^\nu, \dots, \lambda_n^\nu)$ und $A\xi = \lambda\xi \Rightarrow A^\nu\xi = \lambda^\nu\xi$. ■

Korollar Speziell gilt $\exp(\lambda E) = e^\lambda E$.

Lemma 3.25 Für kommutierende Matrizen, $AB = BA$, gilt

(i) $Be^A = e^A B$;

(ii) $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

Beweis $t \mapsto e^{At}$ löst $\dot{X} = AX$, also ist $(e^{At})' = Ae^{At}$.

(i) $\Phi(t) := Be^{At}, \Psi(t) := e^{At}B$. Man rechne nach, daß Φ und Ψ Lösungen des AWP $\dot{X} = AX, X(0) = B$ sind, also zusammenfallen. $\Phi(1) = \Psi(1)$ liefert die Behauptung.

(ii) Analog unter Benutzung von (i). ■

Korollar Speziell gilt

(a) $\forall t \in \mathbb{R} \quad Ae^{At} = e^{At}A$;

(b) $E = e^A e^{-A} : e^A$ ist stets nichtsingulär, $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;

(c) $\forall t, s \in \mathbb{R} \quad e^{A(t+s)} = e^{At} e^{As}$;

(d) $\det e^A = e^{\text{tr}A}$. ■

Die letzte Aussage des Korollars folgt aus der Liouvilleschen Formel (3.4) mit $\tau = 0, t = 1$.

Lemma 3.26 Ist C eine nichtsinguläre Matrix, dann gilt $C \exp(A) C^{-1} = \exp(CAC^{-1})$.

Beweis Wie oben mit $\Phi(t) = Ce^{At}C^{-1}, \Psi(t) = e^{CAC^{-1}t}$. ■

3.4.4 Die lineare DGL nter Ordnung

Nach den Überlegungen in Kapitel 1.3 ist jede DGL nter Ordnung im \mathbb{R}^1 einer DGL im \mathbb{R}^n äquivalent. Die lineare DGL nter Ordnung im \mathbb{R}^1

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b_0(t) \quad (3.43)$$

mit $a_\nu, b_0 \in C^0(I, \mathbb{R})$, I offenes Intervall des \mathbb{R} , ist gemäß (1.5-b) der linearen DGL

$$\dot{x} = A(t)x + b(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdot & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b_0 \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

äquivalent. Aus diesem Grund ist die Theorie des Kapitels 3 auch für die DGL (3.43) zuständig - das heißt nicht, daß zum praktischen Lösen jede DGL (3.43) erst in die Form (3.44) gebracht

werden muß! Die spezielle Besetzung der Matrix A bringt vorteilhafte Besonderheiten mit sich.

1) Die allgemeine Lösung von (3.43) ist $y = y_o + y_p$, wobei y_o die *allgemeine* Lösung der homogenen DGI ($b_o = 0$) und y_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen DGI ist.

2) Die allgemeine Lösung y_o ist reelle Linearkombination n linear unabhängiger Lösungen, $y_o = \sum_{\nu=1}^n c^\nu y_\nu$, $c^\nu \in \mathbb{R}$. Die y_1, \dots, y_n sind linear unabhängig gdw. ihre *Wronski-Determinante*

$$W(t) = \det Y(t), \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

auf I keine Nullstelle hat. Nach der Liouvilleschen Formel (3.4) ist hier

$$W(t) = W(\tau) \exp\left(-\int_\tau^t a_{n-1}(s) ds\right). \quad (3.46)$$

3) Die Partikulärlösung y_p kann durch *Variation der Konstanten* bestimmt werden, sobald eine *Integralbasis* $\{y_1, \dots, y_n\}$ bekannt ist:

$$y_p(t) = \sum_{\nu=1}^n u^\nu(t) y_\nu(t) \quad (3.47)$$

(das ist einfach die erste Zeile des Ansatzes $x_p(t) = X(t)u(t)$), $u = (u^1, \dots, u^n)^T$ ergibt sich aus der DGI $Y(t)\dot{u}(t) = b(t)$, d.h.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u}^1 \\ \dot{u}^2 \\ \dots \\ \dot{u}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b_o \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

4) Im Falle konstanter Koeffizienten $a_\nu \in \mathbb{R}$, $\nu = 0, 1, \dots, n-1$, vereinfacht sich die Berechnung einer Integralbasis $\{y_1, \dots, y_n\}$ beträchtlich. Das *charakteristische Polynom* $P(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ ist

$$P(\lambda) = (-1)^n (\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \lambda + a_o), \quad (3.49)$$

seine Nullstellen - die Eigenwerte von A - seien λ_μ , $\mu = 1, \dots, m$, mit den (algebraischen) Vielfachheiten $k_\mu \in \{1, \dots, n\}$. Jede Matrix $(A - \lambda_\mu E)$ hat den Defekt 1, d.h., jeder Eigenwert ist von der geometrischen Vielfachheit 1. Daraus folgt, daß zu λ_μ die linear unabhängigen Lösungen

$$y_{\mu\kappa}(t) = t^\kappa e^{\lambda_\mu t}, \quad \kappa = 0, 1, \dots, k_\mu - 1 \quad (3.50)$$

gehören, die man sofort aufschreiben kann. Nichtreelle Eigenwerte treten wieder in konjugiert-komplexen Paaren auf, reellwertige Lösungen gewinnt man durch Zerspalten in Real- und Imaginärteil.

5) Die (allgemeine!) Methode der Variation der Konstanten ist, besonders im Fall konstanter

Koeffizienten, bei einfacher Inhomogenität $b_o(\cdot)$ häufig unnötig aufwendig.
Ist $b_o(\cdot)$ eine Funktion der Form

$$t \mapsto t^m e^{\alpha t} \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \beta t, \quad m \in \mathbb{N}_0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

dann findet man eine Partikulärlösung y_p durch den *speziellen Ansatz* (mit unbestimmten Koeffizienten A_μ, B_μ)

$$y_p(t) = t^k e^{\alpha t} \left[\left(\sum_{\mu=0}^m A_\mu t^\mu \right) \cos \beta t + \left(\sum_{\mu=0}^m B_\mu t^\mu \right) \sin \beta t \right], \quad (3.51)$$

wobei $\alpha + i\beta$ k -fache Nullstelle von $P(\lambda)$ ist ($k = 0: P(\alpha + i\beta) \neq 0$).

Der Ansatz begründet sich wesentlich durch die Tatsache, daß der Differentialoperator auf der linken Seite von (3.43) – mit konstanten Koeffizienten – die Klasse der Funktionen { Polynom mal Exponentialfunktion mal Kreisfunktion } in sich abbildet. Details und Beispiele siehe [4].

Kapitel 4

Grundlagen der Theorie autonomer Differentialgleichungen

4.1 Integralkurven und Phasenkurven

An den Abschnitt 1.2 anschließend arbeiten wir zunächst die Besonderheiten heraus, durch die sich autonome Differentialgleichungen auszeichnen.

Ist eine Differentialgleichung $\dot{x} = f(t, x)$ mathematisches Modell eines physikalischen (oder biologischen, ökologischen, ökonomischen) Systems, so charakterisiert $x = (x^1, \dots, x^n)$ einen *Zustand* des Systems, mit t als Zeit beschreibt eine Lösung $x(\cdot) : t \mapsto x(t)$ der Differentialgleichung einen *Prozeß*, $x(t)$ ist die Phase des Prozesses zur Zeit t , die x^i heißen deshalb *Phasenkoordinaten*. $t \mapsto x(t)$ wird eine (durch t parametrisierte) *Phasenkurve* genannt, \dot{x} die *Phasengeschwindigkeit*. Die Differentialgleichung ordnet zu jeder Zeit t dem Zustand x eindeutig die Phasengeschwindigkeit $\dot{x} = f(t, x)$ zu. Konstante Lösungen der Differentialgleichung (Phasengeschwindigkeit Null) heißen deshalb auch *Gleichgewichtslösungen*.

Ist f t -unabhängig, so ist das Grundgebiet G der Differentialgleichung ein Zylindergebiet des \mathbb{R}^{n+1} ,

$$G = \mathbb{R} \times \mathcal{D}, \quad \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n \text{ Gebiet.}$$

\mathcal{D} heißt *Phasenraum*. Ein Zustand x legt - gleichgültig zu welcher Zeit - eindeutig die Phasengeschwindigkeit $\dot{x} = f(x)$ fest: die (im Rahmen der zuständigen außermathematischen Theorie) systemimmanente Gesetzmäßigkeit $x \mapsto f(x)$ bestimmt alle Zustandsänderungen des Systems, Prozesse (Bewegung, Evolution) verlaufen *autonom*. Eine t -Abhängigkeit von f beschreibt eine (gewollte oder ungewollte) Beeinflussung des Systems von außen: Prozesse sind vom System *und* von außen bestimmt, sie verlaufen *heteronom*. (Für feinere Begriffsbestimmungen verweisen wir auf die Literatur zur Mathematischen Systemtheorie, z.B. [8] und [9].)

Um Existenz und Unität der Lösungen der DGl $\dot{x} = f(x)$ zu sichern, treffen wir für alles Folgende die

Vereinbarung Das Vektorfeld f ist auf dem Phasenraum \mathcal{D} lokal Lipschitz-stetig oder sogar von der Klasse C^k , $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Wird ein physikalisches System durch eine autonome DGL modelliert, so ist folgende *Vermutung* naheliegend. Ein Prozeß beginne zur Anfangszeit t_0 mit dem Anfangszustand ξ , ein zweiter Prozeß beginne mit dem gleichen Zustand ξ zur Zeit t_1 ; dann sind beide Prozesse identisch bis auf eine konstante relative Zeitverschiebung $t_1 - t_0$. Zu den Prozessen gehört dann ein und dieselbe Phasenkurve, lediglich in zwei verschiedenen Parametrisierungen, die durch eine Translation der t -Achse ineinander übergehen.

Diese Vermutung läßt sich mit Hilfe der bisherigen Kenntnisse über die Lösungen von Anfangswertproblemen bestätigen.

Dazu betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad x(\tau) = \xi. \quad (4.1)$$

Unter den Voraussetzungen des Satzes von Picard und Lindelöf besitzt dieses die eindeutig bestimmte Lösung $\varphi(\cdot; \tau, \xi) \in C^1(I(\tau, \xi), \mathcal{D})$. Dann ist die Funktion

$$\psi(\cdot) : \psi(s) := \varphi(s + \tau; \tau, \xi) \quad (4.2)$$

auf dem Intervall $I' := \{s \mid s + \tau \in I(\tau, \xi)\}$ definiert und löst dort dieselbe DGL. (Man überlege sich, daß das bei heteronomer DGL nicht der Fall zu sein braucht!) Da für $s = 0$ außerdem $\psi(0) = \varphi(\tau; \tau, \xi) = \xi$ ist, folgt aus dem Unitätssatz

$$\psi(\cdot) = \varphi(\cdot; 0, \xi). \quad (4.3)$$

Vereinbarung Für $\varphi(\cdot; 0, \xi)$ schreiben wir ab jetzt (bei autonomer DGL!) kurz $\varphi(\cdot, \xi)$. Entsprechend bezeichnen wir das Maximalintervall $I(0, \xi)$ durch $I(\xi)$.

Mit beliebigem $s + \tau = t \in I(\tau, \xi)$ folgt aus (4.2) $\varphi(t; \tau, \xi) = \psi(t - \tau)$ und somit nach (4.3)

$$\varphi(t; \tau, \xi) = \varphi(t - \tau, \xi). \quad (4.4)$$

D.h., daß sich bei einer autonomen DGL die Lösung zum Anfangswert (τ, ξ) aus der Lösung zum Anfangswert $(0, \xi)$ durch eine Argumentverschiebung $t \mapsto t - \tau$ ergibt. Die obige Vermutung ist damit bestätigt. Das gilt *nur* bei autonomen DGLn. Denn, angenommen, für die Lösungen einer DGL $\dot{x} = f(t, x)$ gilt $\forall \tau, \xi \quad \forall t \in I(\tau, \xi) \quad \varphi(t; \tau, \xi) = \varphi(t - \tau; 0, \xi)$ (das bedeutet auch $t \in I(\tau, \xi) \Leftrightarrow t - \tau \in I(0, \xi)$), dann folgt $\forall \tau, \xi \quad \forall t \in I(\tau, \xi) \quad \dot{\varphi}(t - \tau; 0, \xi) = f(t, \varphi(t - \tau; 0, \xi))$. Für $t = \tau$ heißt das $\forall \tau, \xi \quad \dot{\varphi}(0; 0, \xi) = f(\tau, \xi)$, $f(\cdot, \xi)$ muß also konstant sein: die DGL ist autonom.

Bemerkung Man kontrolliere die in den früheren Kapiteln durchgerechneten Beispiele auf den Fakt, daß die Lösungen mit dem Argument $t - \tau$ genau bei den autonomen DGLn auftreten. \square

Aus der für autonome DGLn charakteristischen Gleichheit (4.4) folgt eine charakteristische Eigenschaft der Integralkurven. Die Integralkurve zum Anfangswert (τ, ξ) ist

$$\begin{aligned} \text{graph } \varphi(\cdot; \tau, \xi) &= \{(t, \varphi(t; \tau, \xi)) \mid t \in I(\tau, \xi)\} \\ &= \{(t, \varphi(t - \tau, \xi)) \mid t - \tau \in I(\xi)\} \quad \text{nach (4.4)} \\ &= \{(s + \tau, \varphi(s, \xi)) \mid s \in I(\xi)\}, \end{aligned}$$

und die letztere Menge ist natürlich nichts anderes als die um τ parallel zur t -Achse verschobene Integralkurve zum Anfangswert $(0, \xi)$. Alle Integralkurven zu Anfangswerten (τ, ξ) mit festem ξ liegen also „übereinander“ und erfüllen eine Zylinderfläche im \mathbb{R}^{n+1} mit zur t -Achse parallelen Geraden als Mantellinien und mit *range* $\varphi(\cdot, \xi) = \text{Bild}$ der Phasenkurve durch $\xi \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ als Spurkurve im \mathbb{R}^n .

Satz 4.1 *Folgende Aussagen über eine DGL sind äquivalent.*

- (i) Die DGL ist autonom, $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.
- (ii) Bei beliebigem $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}$ ist $t \mapsto \varphi(t - \tau, \xi)$ die Lösung des Anfangswertproblems mit $x(\tau) = \xi$ wobei $\varphi(\cdot, \xi)$ die Lösung für $x(0) = \xi$ ist.
- (iii) Die Integralkurven zu Anfangswerten (τ, ξ) mit festem ξ liegen äquidistant auf einer zur t -Achse parallelen Zylinderfläche des \mathbb{R}^{n+1} , welche die Phasenkurve $\varphi(\cdot, \xi)$ als Erzeugende besitzt. ■

Bemerkung

- a) Die noch fragliche Implikation (iii) \Rightarrow (i) beweise der Leser ohne Rechnung.
- b) Man überlege sich anhand von (iii), daß im Fall $n = 1$ eine autonome DGL keine oszillatorischen Bewegungen beschreiben kann.
- c) Unität der Lösungen von Anfangswertproblemen bedeutete, daß verschiedene Integralkurven disjunkt sind. Durch (iii) wird für autonome DGLn diese Eigenschaft auf die Phasenkurven übertragen: (die Bilder von) Phasenkurven sind entweder identisch oder disjunkt. □

Satz 4.1 legt eine neue Auffassung vom Wesen einer autonomen DGL nahe: durch die DGL $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathcal{D}$, wird eine Funktion $\varphi : (t, \xi) \mapsto \varphi(t, \xi) \in \mathcal{D}$ definiert, diese ist zu untersuchen. φ könnte man *allgemeine Lösung* nennen. Zu beliebigem $\xi \in \mathcal{D}$ ist $\varphi(\cdot, \xi)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \xi$. Nach den bisherigen Untersuchungen ist bekannt, daß $\text{dom } \varphi = \{(t, \xi) \mid \xi \in \mathcal{D}, t \in I(\xi)\}$ ist. Zu festem ξ beschreibt $\varphi(\cdot, \xi)$ die Phasenkurve durch den Punkt $\xi \in \mathcal{D}$, sie ist von der Klasse $C^{k+1}(I(\xi), \mathcal{D})$, falls $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$. Wir können uns aber auch - und diese Betrachtungsweise ist neu - für die Funktion $\varphi(t, \cdot)$ bei festem $t \in \mathbb{R}$ interessieren. Ihr Definitionsbereich ist $\mathcal{D}_t := \{\xi \mid t \in I(\xi)\} \subset \mathcal{D}$, er kann leer sein. Ist $\mathcal{D}_t \neq \emptyset$, so vermittelt $\varphi(t, \cdot)$ eine Abbildung jeder nichtleeren Menge $M \subset \mathcal{D}_t$ auf $\varphi(t, M) \subset \mathcal{D}$, indem jeder Punkt $\xi \in M$ auf $\varphi(t, \xi)$ abgebildet wird. Nehmen wir zunächst t als positiv an, dann läßt sich die ganze Familie von Abbildungen $\{\varphi(s, \cdot) \mid 0 \leq s \leq t\}$ betrachten, und bei kinematischer Interpretation *fließen* die Punkte $\xi \in M$ längs der Phasenkurven: $\xi = \varphi(0, \xi) \rightarrow \varphi(s, \xi) \rightarrow \varphi(t, \xi)$, vergleiche Figur 4.1. Die Abbildung $M \rightarrow \varphi(t, M)$ ist gewiß injektiv, da sich Phasenkurven nicht schneiden. Es bleibt zu klären, welche weiteren Eigenschaften diese Abbildung aufweist (Stetigkeit/Glattheit?) und wie die Inverse beschaffen ist. Noch einmal: Die Funktion $\varphi(\cdot, \cdot)$ läßt sich nur in seltenen Fällen „berechnen“ (allenfalls numerisch approximieren); Eigenschaften von φ aus Eigenschaften von f zu deduzieren, das ist genau das Anliegen der *qualitativen Theorie der (autonomen) DGLn*.

Wir beginnen die entsprechenden Überlegungen mit der Untersuchung der Funktion $\varphi(t, \cdot)$. Zunächst betrachten wir die Menge aller dieser Funktionen und werden eine bestimmte algebraische Struktur dieser Menge aufdecken. Die danach folgende Untersuchung der Glattheit dieser Funktionen wird sie als Diffeomorphismen erweisen und schließlich zum Begriff des glatten dynamischen Systems führen.

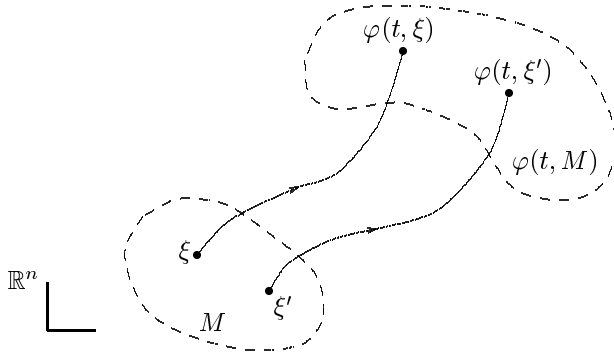


Fig.4.1

4.2 Der lokale Fluß

Wir betrachten die allgemeine Lösung, $\varphi : (t, x) \mapsto \varphi(t, x)$, der autonomen DGL $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Zu festem $\xi \in \mathcal{D}$ ist $\varphi(\cdot, \xi) | I(\xi) \rightarrow \mathcal{D}$ die eindeutig bestimmte (maximale) Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \xi$. Damit ist φ eindeutig bestimmt,

$$\varphi | W \rightarrow \mathcal{D}, \quad W := \text{dom } \varphi = \{(t, x) \mid x \in \mathcal{D}, t \in I(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}. \quad (4.5)$$

Einige von früher bekannte analytische Eigenschaften von φ wurden im letzten Abschnitt erwähnt, dementsprechende Fragen werden später wieder aufgegriffen. Hier untersuchen wir zunächst $\{\varphi(t, \cdot) \mid t \in \mathbb{R}\}$ als eine Familie von Abbildungen aus \mathcal{D} in \mathcal{D} . Wir schreiben

$$\begin{aligned} \varphi_t(\cdot) &:= \varphi(t, \cdot) | \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{D} \quad (\text{bei festem } t \in \mathbb{R}), \\ \mathcal{D}_t &= \text{dom } \varphi_t = \{x \in \mathcal{D} \mid t \in I(x)\}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die folgenden Aussagen über Definitionsbereiche sind im wesentlichen unmittelbare Folgerungen aus den Definitionen.

$$(i) \quad x \in \mathcal{D}_t \Leftrightarrow (t, x) \in W \Leftrightarrow t \in I(x). \quad (4.7)$$

$$(ii) \quad 0 < s < t \vee t < s < 0 \Rightarrow \mathcal{D}_t \subset \mathcal{D}_s \subset \mathcal{D}_0 = \mathcal{D}. \quad (4.8)$$

(Beachte zum Beweis: $\forall x \in \mathcal{D} \quad 0 \in I(x)$, $I(x)$ offenes Intervall.) Für große $|t|$ kann \mathcal{D}_t leer sein - falls nämlich alle $I(x)$ beschränkt sind; Beispiel: $\dot{x} = 1 + x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

$$(iii) \quad \exists \delta > 0 \quad \forall t, s \in \mathbb{R} [|t|, |s| < \delta \Rightarrow \mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_s \neq \emptyset]. \quad (4.9)$$

Für jedes $x \in \mathcal{D}$ ist $\varphi_0(x) = \varphi(0, x) = x$, also ist

$$\varphi_0 = id_{\mathcal{D}} \quad (4.10)$$

die identische Abbildung von \mathcal{D} auf sich.

Lemma 4.2 Sei $x \in \mathcal{D}$, $s \in I(x)$. Dann gilt

$$(i) \quad I(\varphi_s(x)) = I(x) - s; \quad (4.11)$$

$$(ii) \quad \forall t \in I(\varphi_s(x)) \quad \varphi_t(\varphi_s(x)) = \varphi_{s+t}(x). \quad (4.12)$$

Beweis Zu festen $x \in \mathcal{D}$ und $s \in I(x)$ sei $\psi(t) := \varphi(t + s, x) = \varphi_{t+s}(x)$. Die dadurch bestimmte Funktion ist auf $\text{dom } \psi = \{t \mid t + s \in I(x)\} = I(x) - s$ definiert. Für jedes $t \in \text{dom } \psi$ ist $\dot{\psi}(t) = \dot{\varphi}(t + s, x) = f(\psi(t))$, ψ genügt also der DGI $\dot{x} = f(x)$ und hat außerdem den Anfangswert $\psi(0) = \varphi(s, x) = \varphi_s(x)$. Nach dem Unitätssatz ist somit $\psi(\cdot) = \varphi(\cdot, \varphi_s(x))$, also ist auch $\text{dom } \psi = I(\varphi_s(x))$, damit ist 4.11 gezeigt, und es gilt $\varphi_{s+t}(x) = \psi(t) = \varphi(t, \varphi_s(x)) = \varphi_t(\varphi_s(x))$. ■

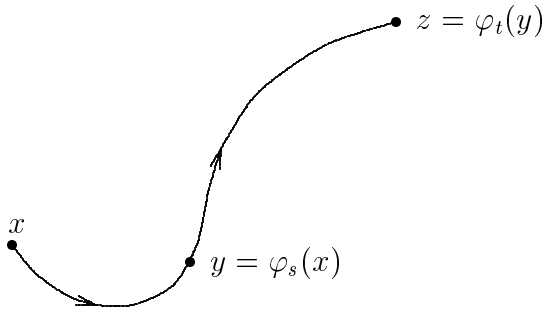


Fig.4.2

Figur 4.2 skizziert den Sachverhalt des Lemmas. Sei $0 < s < t$. $x \in \mathcal{D}$ bestimmt eindeutig die Phasenkurve $\varphi(\cdot, x)$, deren Bogen $\gamma_x = \varphi(I(x), x)$ sei. Da $y \in \gamma_x$, wird durch y der gleiche Bogen, nur mit der Parameterdarstellung $\varphi(\cdot, y) \mid I(y) \rightarrow \mathcal{D}$ bestimmt, also ist auch $z \in \gamma_x$. Im kinematischen Bild „fließt“ der beobachtete Phasenpunkt längs γ_x von x nach y im Zeitintervall $[0, s]$, von y nach z im Zeitintervall $[0, t]$, somit von x nach z im Zeitintervall $[0, s + t]$.

Lemma 4.3 Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

- (i) $\text{dom } \varphi_t = \mathcal{D}_t \subset \mathcal{D}$ ist eine offene Menge.
- (ii) $\text{range } \varphi_t = \varphi_t(\mathcal{D}_t) = \mathcal{D}_{-t}$.
- (iii) $\varphi_t \mid \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{D}_{-t}$ ist bijektiv und $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

Beweis Über die Funktion $\varphi \mid W \rightarrow \mathcal{D}$ ist nach Satz 2.4 folgendes bekannt. Es sei $\xi \in \mathcal{D}$, und mit einem $r > 0$ sei $K(\xi, r) \subset \mathcal{D}$. Zu jedem $r' \in (0, r)$ gibt es dann einen Quader $Q_{\alpha, r'}(\xi) = (-\alpha, \alpha) \times K(\xi, r')$ mit dem Mittelpunkt $(0, \xi)$, auf dem φ stetig ist (sogar auf der Abschließung von $Q_{\alpha, r'}$). Dabei ist $\alpha = \alpha(\xi)$ durch $0 < \alpha < \min\{\frac{r-r'}{M}, \frac{1}{L}\}$ restringiert, wobei (im hier betrachteten autonomen Fall) M das Maximum von $\|f(x)\|$ und L eine Lipschitzkonstante von f auf der abgeschlossenen Kugel $K^*(\xi, r)$ sind.

Somit ist φ stetig auf der offenen Menge $U := \cup_{\xi \in \mathcal{D}} Q_{\alpha, r'}(\xi) \subset W$, einer $(n+1)$ -dimensionalen Umgebung von \mathcal{D} . Damit ist insbesondere für hinreichend kleine $|t|$ \mathcal{D}_t nichtleer und offen, und $\varphi_t(\cdot)$ ist stetig.

(i) Nun sei $(T_o, \xi_o) \in W$ beliebig gewählt, d.h., $\xi_o \in \mathcal{D}$, $T_o \in I(\xi_o)$. (Wir nehmen $T_o > 0$ an - anderenfalls ist nur das Intervall $[0, T_o]$ durch $[T_o, 0]$ zu ersetzen.) Wir zeigen, daß eine Umgebung von ξ_o in \mathcal{D}_{T_o} liegt. Dazu betrachten wir das Bogenstück $\gamma_o := \varphi([0, T_o], \xi_o)$ der Phasenkurve durch ξ_o . Dieses ist eine kompakte Teilmenge von \mathcal{D} und besitzt somit einen positiven Abstand von der abgeschlossenen Menge $\partial\mathcal{D}$. Es sei

$$d(\gamma_o, \partial\mathcal{D}) =: r_o > 0, \quad r := \begin{cases} \frac{1}{2}r_o, & \text{falls } r_o < \infty \\ 2, & \text{falls } r_o = \infty \end{cases}, \quad r' := \frac{1}{2}r.$$

Damit liegt jede Kugel $K(x, r)$, $x \in \gamma_o$, gewiß in \mathcal{D} , und

$$\Gamma_o := cl \cup_{x \in \gamma_o} K(x, r), \quad \Gamma'_o := cl \cup_{x \in \gamma_o} K(x, r')$$

sind Kompakta, $\gamma_o \subset \text{int}\Gamma'_o \subset \Gamma_o \subset \mathcal{D}$.

Es sei $M_o := \max\{\|f(x)\| \mid x \in \Gamma_o\}$, und L_o sei eine Lipschitzkonstante für f auf Γ_o (ihre Existenz sichert Lemma 2.5). Wählen wir etwa $\alpha_o := \frac{1}{3} \min\{\frac{r-r'}{M_o}, \frac{1}{L_o}\}$, dann ist φ sicher stetig in allen Punkten (t, x) , $x \in \Gamma'_o$, $|t| \leq \alpha_o$. Somit ist für alle t mit $|t| \leq \alpha_o$ gewiß $\text{int}\Gamma'_o \subset \mathcal{D}_t$, und φ_t ist dort stetig.

Wir konstruieren eine Zerlegung von γ_o . Dazu sei $N \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, daß $h := T_o/N < \alpha_o$. Es sei

$$t_\nu := \nu h, \quad \xi_\nu := \varphi(t_\nu, \xi_o), \quad \nu = 0, 1, \dots, N.$$

Dann ist nach Lemma 4.2 $\xi_{\nu+1} = \varphi(t_\nu + h, \xi_o) = \varphi_h(\varphi_{t_\nu}(\xi_o))$, also $\xi_{\nu+1} = \varphi_h(\xi_\nu)$ und somit durch Auflösen dieser Rekursion

$$\xi_N = \varphi(T_o, \xi_o) = \underbrace{(\varphi_h \circ \varphi_h \circ \dots \circ \varphi_h)}_{N \text{ mal}}(\xi_o).$$

Sei $K_N := K(\xi_N, r')$. K_N ist offen in \mathcal{D} . Wir betrachten eine Kette vollständiger φ_h -Urbilder:

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{N-1} &:= \varphi_h^{-1}(K_N) \\ \tilde{K}_{\nu-1} &:= \varphi_h^{-1}(\tilde{K}_\nu), \quad \nu = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Die Mengen \tilde{K}_ν sind offen in \mathcal{D}_h , somit auch offen in \mathcal{D} (da $\varphi_h|_{\mathcal{D}_h} \rightarrow \mathcal{D}$ stetig ist) und nichtleer (da $\xi_\nu \in \tilde{K}_\nu$).

Nach Konstruktion kann umgekehrt φ_h N -mal auf die Elemente $x \in \tilde{K}_o$ angewendet werden, und nach Lemma 4.2 (ii) mit $t = s = h$ ist $\varphi_h^n(x) = \varphi_{T_o}(x)$, d.h., $\tilde{K}_o \subset \mathcal{D}_{T_o}$. Also liegt mit ξ_o auch die Umgebung \tilde{K}_o in \mathcal{D}_{T_o} , d.h., \mathcal{D}_{T_o} ist offen. Ist für ein $t \in \mathbb{R}$ $\mathcal{D}_t = \emptyset$, dann ist die Offenheit trivial.

(ii) Sei $\mathcal{D}_t \neq \emptyset$, $x \in \mathcal{D}_t$. Dann ist in Folge $t \in I(x)$, $0 = t - t \in I(x)$, also $-t \in I(x) - t = I(\varphi_t(x))$ nach (4.11). Das bedeutet nach (4.7) $(-t, \varphi_t(x)) \in W$ und gleichermaßen $\varphi_t(x) \in \mathcal{D}_{-t}$. Somit ist $\mathcal{D}_{-t} \neq \emptyset$ und, da x beliebiges Element von \mathcal{D}_t ist, $\varphi_t(\mathcal{D}_t) \subset \mathcal{D}_{-t}$. Mit $x' \in \mathcal{D}_{-t}$ ergibt sich in gleicher Weise $\varphi_{-t}(x') \in \mathcal{D}_t$. Also kann φ_t auf $\varphi_{-t}(x')$ angewendet werden: $\varphi_t(\varphi_{-t}(x')) = \varphi_{t-t}(x') = x' \in \varphi_t(\mathcal{D}_t)$. Wegen der Beliebigkeit von x' folgt $\mathcal{D}_{-t} \subset \varphi_t(\mathcal{D}_t)$, schließlich (ii). ($\mathcal{D}_t = \emptyset$ impliziert $\mathcal{D}_{-t} = \emptyset$, denn $x' \in \mathcal{D}_{-t}$ führt auf den Widerspruch $\varphi_{-t}(x') \in \mathcal{D}_t = \emptyset$: (ii) ist auch für $\mathcal{D}_t = \emptyset$ richtig.)

(iii) φ_t bildet nach (ii) von \mathcal{D}_t auf \mathcal{D}_{-t} ab, ist also surjektiv. Aus (ii) folgt auch $\varphi_t(x_1) = \varphi_t(x_2) \Rightarrow \varphi_{-t}(\varphi_t(x_1)) = \varphi_{-t}(\varphi_t(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$: φ_t ist injektiv. Damit existiert $(\varphi_t)^{-1}$ auf \mathcal{D}_{-t} , aus dem Beweisteil (ii) entnehmen wir $(\varphi_t \circ \varphi_{-t})(x') = x'$ für alle $x' \in \mathcal{D}_{-t}$, und analog gilt $\forall x \in \mathcal{D}_t$ $(\varphi_{-t} \circ \varphi_t)(x) = x$. Somit ist $\varphi_{-t} = (\varphi_t)^{-1}$. ■

Korollar (1) Existiert die Lösung $\varphi(\cdot, \xi_o)$ auf dem kompakten Intervall $[0, T_o]$ (d.h., ist $[0, T_o] \subset I(\xi_o)$), dann gibt es eine Umgebung V_o von ξ_o , so daß jede Lösung $\varphi(\cdot, \xi)$ mit $\xi \in V_o$ ebenfalls auf $[0, T_o]$ existiert ($\forall \xi \in V_o$ $[0, T_o] \subset I(\xi)$).

Analoges für $T_o < 0$.

(2) $W = \text{dom } \varphi$ ist offen in \mathbb{R}^{n+1} .

Beweis (1) Das ist nur eine andere Formulierung von Lemma 4.3 (i) – eine solche Umgebung ist die im Beweis konstruierte Menge \tilde{K}_o .

(2) Da $I(\xi_o)$ offen ist, gibt es ein $\varepsilon_o > 0$, so daß $I_o(\xi_o) := (T_o - \varepsilon_o, T_o + \varepsilon_o) \subset I(\xi_o)$. Also gehört nach (1) mit dem Punkt (T_o, ξ_o) auch eine offene Umgebung $I_o(\xi_o) \times V_o$ zu W . ■

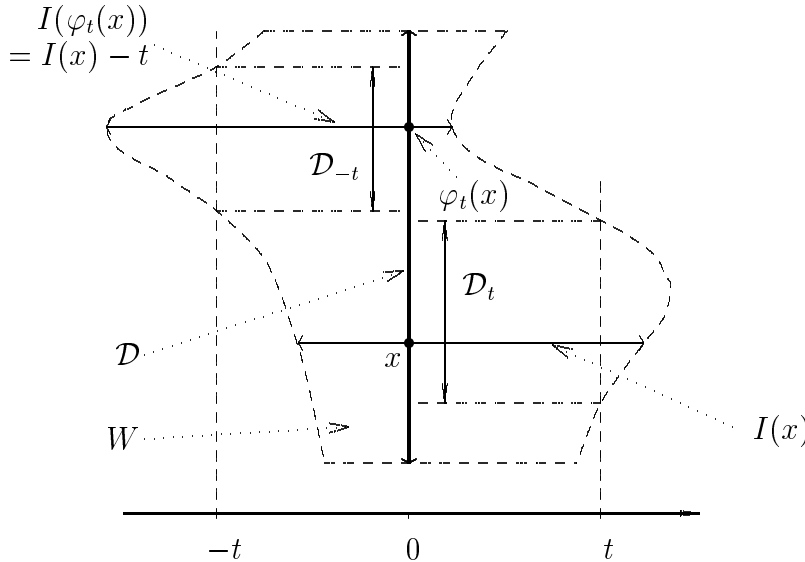


Fig.4.3

Figur 4.3 ist eine Prinzipskizze für die Mengen $W, \mathcal{D}, I(x)$ etc..

Wir fassen die bisherigen Ergebnisse in folgender Weise zusammen.

Definition 4.4 Die durch das lokal Lipschitz-stetige Vektorfeld $f | \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eindeutig bestimmte Familie $\mathcal{F} = \{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}$ von Bijektionen von \mathcal{D}_t auf \mathcal{D}_{-t} heißt **der durch f erzeugte lokale Fluß**.

Bemerkung Manche Autoren nennen die Funktion $\varphi | W \rightarrow \mathcal{D}$ den lokalen Fluß. □

Satz 4.5 Der lokale Fluß $\mathcal{F} = \{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}$ enthält die identische Abbildung $\varphi_0 = id_{\mathcal{D}}$. Mit jedem $\varphi_t \in \mathcal{F}$ gehört auch $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ zu \mathcal{F} . Mit je zwei Elementen φ_t, φ_s von \mathcal{F} gilt

$$(\varphi_t \circ \varphi_s)(x) = \varphi_{t+s}(x)$$

für alle die $x \in \mathcal{D}$, für die die linke Seite definiert ist. ■

Bemerkung Die letzte Gleichung ist nach Lemma 4.2 erfüllt für $x \in \mathcal{D}, s \in I(x), t \in I(\varphi_s(x))$, d.h., $x \in \mathcal{D}_s, \varphi_s(x) \in \mathcal{D}_t$, also $x \in \mathcal{D}_s \cap \varphi_{-s}(\mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{-s})$; nach (4.11) ist dann automatisch $t + s \in I(x)$, d.h. $x \in \mathcal{D}_{t+s}$. Der Definitionsbereich von $\varphi_t \circ \varphi_s$ kann leer sein. Auch wenn $dom(\varphi_t \circ \varphi_s)$ nicht leer ist so kann doch $dom(\varphi_s \circ \varphi_t) = \emptyset$ sein: in (4.12) brauchen t und s nicht vertauschbar zu sein! □

Bemerkung Die Abbildungen φ_t werden sich als Homöomorphismen, im Fall $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n), k \geq 1$, sogar als Diffeomorphismen erweisen. □

4.3 Stetigkeit und Differenzierbarkeit des lokalen Flusses

Die Stetigkeit von $\varphi|_W \rightarrow \mathcal{D}$ ist auf einer $(n+1)$ -dimensionalen Umgebung von \mathcal{D} bekannt. Es gilt aber sogar

Lemma 4.6 $\varphi \in C^o(W, \mathcal{D})$.

Beweis Die nachfolgenden Notationen sind die gleichen wie im Beweis von Lemma 4.3. Sei $(T_o, \xi_o) \in W$, d.h., $\xi_o \in \mathcal{D}_{T_o}$. Wir überlegen zunächst die Stetigkeit der Abbildung $\varphi_{T_o} = \varphi_h \circ \dots \circ \varphi_h$ im Punkte ξ_o .

φ_h ist auf Γ'_o und somit in den Punkten $\xi_\nu \in \gamma_o \subset \Gamma'_o$ stetig, also bildet φ_h eine (in $K(\xi_\nu, r')$ liegende) Umgebung von ξ_ν in eine Umgebung von $\xi_{\nu+1}$ ab. Damit bildet $\varphi_{T_o} = \varphi_h \circ \dots \circ \varphi_h$ eine hinreichend kleine δ -Umgebung von ξ_o in eine beliebig kleine ε -Umgebung von ξ_N ab, d.h., $\varphi(T_o, \cdot)$ ist stetig im Punkte ξ_o . Nun ist (s. Figur 4.4)

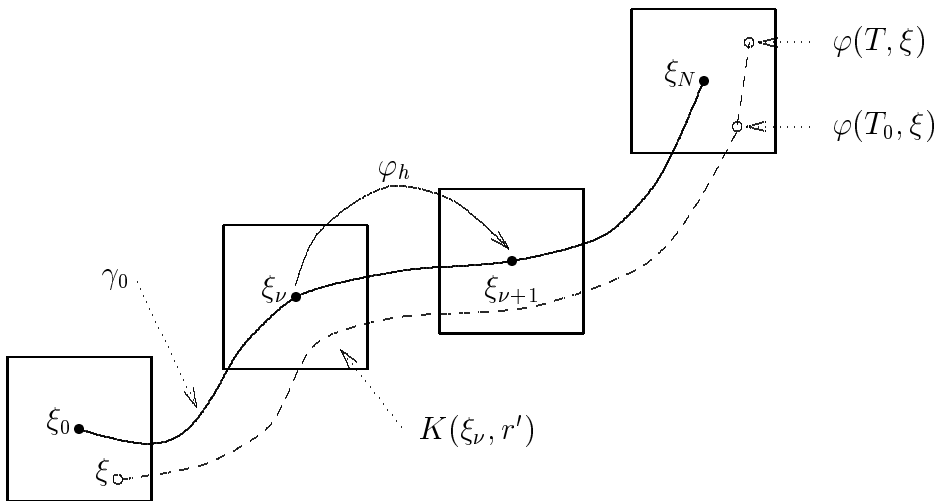


Fig.4.4

$$\| \varphi(T, \xi) - \varphi(T_o, \xi_o) \| \leq \| \varphi(T, \xi) - \varphi(T_o, \xi) \| + \| \varphi(T_o, \xi) - \varphi(T_o, \xi_o) \|,$$

und zu beliebigem $\varepsilon \in (0, r')$ gibt es ein $\delta_2 > 0$, so daß der zweite Term $< \varepsilon$ ist, wenn nur $\| \xi - \xi_o \| < \delta_2$ ist. Damit ist $\varphi(T_o, \xi) \in K(\varphi(T_o, \xi_o), r')$ und der erste Term,

$$\| \varphi(s + T_o, \xi) - \varphi(T_o, \xi) \| = \| \varphi(s, \varphi(T_o, \xi)) - \varphi(0, \varphi(T_o, \xi)) \|,$$

ist der Abstand zweier Funktionswerte von φ auf $[-\alpha_o, \alpha_o] \times \Gamma'_o$. Da φ dort gleichmäßig stetig ist, gibt es ein von ξ unabhängiges $\delta_1 > 0$, so daß mit $|s| < \delta_1$ auch dieser Abstand kleiner als ε ist. Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ gilt also

$$|s| = |T - T_o| < \delta \wedge \| \xi - \xi_o \| < \delta \Rightarrow \| \varphi(T, \xi) - \varphi(T_o, \xi_o) \| < 2\varepsilon,$$

φ ist im (beliebigen) Punkt $(T_o, \xi_o) \in W$ stetig. ■

Zur Differenzierbarkeit von φ bei Lipschitz-stetigem Vektorfeld f wissen wir bisher nur

$$\forall \xi \in \mathcal{D} \quad \varphi(\cdot, \xi) \in C^1(I(\xi), \mathcal{D}), \quad D_t \varphi = f \circ \varphi.$$

Über die partielle Differenzierbarkeit von $\varphi(t, \cdot)$ ist nichts bekannt. Wir beginnen die diesbezüglichen Untersuchungen mit einer vorbereitenden heuristischen Betrachtung.

Unter der

Voraussetzung $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, d.h. $\mathcal{D}_x f$ stetig,

wollen wir die Funktion φ als glatt *annehmen* und daraus auf eine weitere Eigenschaft von φ schließen, die dann den Ausgangspunkt der genauen Untersuchung motiviert.

Für jedes $\xi \in \mathcal{D}$ ist $\varphi(\cdot, \xi)$ auf dem Maximalintervall $I(\xi)$ die Lösung des Anfangswertproblems $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \xi$. Nach Satz 2.1 gilt dann

$$\forall (t, \xi) \in W = \text{dom } \varphi \quad \varphi(t, \xi) = \xi + \int_0^t f(\varphi(s, \xi)) ds.$$

Unter der **Annahme** $\varphi(\cdot, \cdot) \in C^1(W, \mathcal{D})$

sind beide Seiten der letzten Gleichung nach ξ differenzierbar und da der Integrand ebenfalls C^1 ist, darf rechts unter dem Integral abgeleitet werden. Somit gilt

$$D_\xi \varphi(t, \xi) = E + \int_0^t D_x f(\varphi(s, \xi)) D_\xi \varphi(s, \xi) ds.$$

Das bedeutet mit festem $\xi = \xi_o$ nach Satz 2.1 nichts anderes, als daß die Funktion $D_\xi \varphi(\cdot, \xi_o) | I(\xi_o) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ das lineare Matrizen-Anfangswertproblem

$$\dot{V} = A(t; \xi_o) V, \quad V(0) = E, \tag{4.13-a}$$

mit der auf $I(\xi_o)$ definierten und dort stetigen Koeffizientenmatrix

$$A(t; \xi_o) := D_x f(\varphi(t, \xi_o)) \tag{4.13-b}$$

löst. Außerdem ist für alle $t \in I(\xi_o)$ $\det(D_\xi \varphi(t, \xi_o)) \neq 0$, da ein Vergleich mit (3.14) die Lösung $D_\xi \varphi(\cdot, \xi_o)$ als die Übergangsmatrix zur Anfangszeit $\tau = 0$ der linearen DGI $\dot{y} = A(t; \xi_o)y$ ausweist.

Wir beweisen die Richtigkeit der obigen Annahme, indem wir, durch (4.13-b) inspiriert, das folgende Anfangswertproblem untersuchen:

$$\dot{x} = f(x) \tag{4.14-a}$$

$$\dot{y} = D_x f(x)y, \tag{4.14-b}$$

$$(x, y) \in \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n, \quad x(0) = \xi, \quad y(0) = \eta.$$

Diese autonome DGI für $z := (x, y)$ heißt die **Prolongation** der originalen DGI $\dot{x} = f(x)$.

Die hierarchische Struktur $\begin{pmatrix} f(x) \\ g(x, y) \end{pmatrix}$ der rechten Seite bringt folgende angenehme Besonderheit für die Lösungen mit sich. Für eine Lösung $\chi = (\chi_1, \chi_2)$ des Anfangswertproblems

(4.14) ist die erste Komponente χ_1 eindeutig durch (4.14-a) bestimmt: $\chi_1(\cdot) = \varphi(\cdot, \xi)$ mit dem Maximalintervall $I(\xi)$ - dazu genügt die lokale Lipschitz-Stetigkeit von f . Also löst χ_2 das heteronome homogen-lineare Problem $\dot{y} = D_x f(\varphi(t, \xi))y$, $y(0) = \eta$, mit einer Koeffizientenmatrix, die in t stetig ist, falls $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$. Somit ist χ_2 nach Satz 3.2 eindeutig bestimmt mit demselben Maximalintervall $I(\xi)$ und hat nach Satz 3.11 die Form $\chi_2(\cdot) = \Psi(\cdot; \xi)\eta$. Dabei ist $\Psi(\cdot; \xi)$ die Übergangsmatrix (für Anfangszeit $\tau = 0$) zur ξ -abhängigen Koeffizientenmatrix $D_x f(\varphi(t, \xi))$, d.h., die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems in $\mathbb{R}^{n \times n}$

$$\dot{V} = D_x f(\varphi(t, \xi))V, \quad t \in I(\xi), \quad V(0) = E.$$

Praktisch können also bei einer so strukturierten DGI die Lösungskomponenten immer nacheinander bestimmt werden.

Unser ganz anderes Anliegen - die Glattheit von $\varphi(t, \cdot)$ und einen Zusammenhang zwischen φ und χ_2 zu zeigen - erfordert die simultane Behandlung von (4.14-a) und (4.14-b). Dazu benötigen wir die lokale Lipschitz-Stetigkeit von $F(z) := \begin{pmatrix} f(x) \\ D_x f(x)y \end{pmatrix}$, und diese sichern wir mit der schärferen

Voraussetzung $f \in C^2(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$.

Damit ist sogar $F \in C^1$, und die Konvergenz des Verfahrens der sukzessiven Approximation für die äquivalente Integralgleichung

$$\begin{aligned} x(t) &= \xi + \int_0^t f(x(s))ds \\ y(t) &= \eta + \int_0^t D_x f(x(s))y(s)ds \end{aligned}$$

ist gewährleistet. Sie ist gleichmäßig auf einem abgeschlossenen Quader $Q_{\tilde{\alpha}, r'} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{D} \times \mathbb{R}^n$ mit dem Mittelpunkt $(0, \xi_o, \eta_o) : Q_{\tilde{\alpha}, r'} = [-\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}] \times K^*(\xi_o, r') \times K^*(\eta_o, r')$. Da das Grundgebiet bezüglich t und y unbeschränkt ist, muß lediglich gelten

$$\begin{aligned} 0 &< r' < r, \quad K^*(\xi_o, r) \subset \mathcal{D}, \\ 0 &< \tilde{\alpha} < \min\{(r - r')/\tilde{M}, 1/\tilde{L}\}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

wobei \tilde{M}, \tilde{L} Beschränktheits- und Lipschitzkonstante für $\|F(z)\|$ auf $K^*(\xi_o, r) \times K^*(\eta_o, r)$ sind (K^* ist wieder die abgeschlossene Kugel des \mathbb{R}^n mit Maximummetrik).

Schritt 0 der sukzessiven Approximation:

$$z_o : \begin{cases} x_o(t, \xi) & := \xi \\ y_o(t, \xi, \eta) & := \eta. \end{cases}$$

Triviale Feststellung: x_o ist nach ξ differenzierbar, und es ist $D_\xi x_o \cdot \eta = y_o$.

Schritt $k + 1$:

$$z_{k+1} : \begin{cases} x_{k+1}(t, \xi) & = \xi + \int_0^t f(x_k(s, \xi))ds \\ y_{k+1}(t, \xi, \eta) & = \eta + \int_0^t D_x f(x_k(s, \xi))y_k(s, \xi, \eta)ds. \end{cases}$$

Feststellung:

Falls x_k nach ξ differenzierbar und $D_\xi x_k \cdot \eta = y_k$ ist, dann ist x_{k+1} nach ξ differenzierbar, und es ist $D_\xi x_{k+1} \cdot \eta = y_{k+1}$.

Damit folgt induktiv sofort, daß $D_\xi x_k \cdot \eta = y_k$ für jeden Iterationsschritt gilt. Die Folge der sukzessiven Approximationen $z_k = (x_k, y_k)$ konvergiert für $k \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf dem Quader $Q_{\tilde{\alpha}, r'}$ gegen die Lösung $z = (x, y)$ der Integralgleichung (des Anfangswertproblems). Die Folge (x_k) ist unabhängig von der Folge (y_k) , deshalb ist natürlich ihr Limes $x(t, \xi) = \varphi(t, \xi)$. Da die Glieder der gleichmäßig konvergenten Folge (x_k) nach ξ differenzierbar sind und die Folge der Ableitungen $(D_\xi x_k \cdot \eta) = (y_k)$ ebenfalls gleichmäßig konvergiert, ist auch φ nach ξ differenzierbar, und es ist $D_\xi \varphi \cdot \eta = y$. Satz 2.4 garantiert die Stetigkeit der Grenzfunktion $z(\cdot, \cdot, \cdot) : (t, \xi, \eta) \mapsto (\varphi(t, \xi), D_\xi \varphi(t, \xi) \cdot \eta)$.

Da das mit beliebigem $\eta \in \mathbb{R}^n$ gilt, ist auch $D_\xi \varphi(\cdot, \cdot)$ stetig. Die Stetigkeit von $D_t \varphi(\cdot, \cdot)$ ist ohnehin klar, also ist gezeigt:

$$\varphi(\cdot, \cdot) \in C^1([-\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}] \times K^*(\xi_o, r'), \mathcal{D})$$

mit beliebigen $\xi_o \in \mathcal{D}$, r' und (kleinem) $\tilde{\alpha}$ gemäß (4.15).

Diese lokale Glattheit von φ läßt sich auf ganz W ausdehnen durch das gleiche Verfahren, das die Globalisierung der Stetigkeit ermöglichte.

Dazu nehmen wir $(T_o, \xi_o) \in W$, $\eta_o \in \mathbb{R}^n$ und betrachten das Bogenstück $\tilde{\gamma}_o = \chi([0, T_o], \xi_o, \eta_o)$ der Phasenkurve der prolongierten DGl. Entsprechend konstruierte umgebende Kompakta $\tilde{\Gamma}_o, \tilde{\Gamma}'_o$ führen zu einem global verwendbaren $\tilde{\alpha}_o$. Mit $|h| < \tilde{\alpha}_o$ gilt dann wieder $\chi(T_o, \xi_o, \eta_o) = (\chi_h \circ \chi_h \circ \dots \circ \chi_h)(\xi_o, \eta_o)$ und damit für die erste Komponente, φ_t , von χ_t

$$\varphi_{T_o}(\xi) = (\varphi_h \circ \varphi_h \circ \dots \circ \varphi_h)(\xi)$$

mit zu ξ_o benachbartem ξ . Durch die Komposition auf der rechten Seite wird (nicht nur die Stetigkeit sondern auch) die C^1 -Eigenschaft von φ_h auf φ_{T_o} übertragen: $\varphi_{T_o}(\cdot)$ ist differenzierbar auf einer Umgebung von ξ_o , und die Ableitung ist in ξ_o stetig. Das heißt schließlich

$$\varphi(\cdot, \cdot) \in C^1(W, \mathcal{D}),$$

die frühere Annahme ist verifiziert. Damit ist nun auch gesichert, daß die Ableitung $D_\xi \varphi(\cdot, \xi_o)$ das Anfangswertproblem (4.13) löst.

Bemerkung Die oben getroffene Voraussetzung $f \in C^2(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ war technischer Natur, es genügt $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, um (natürlich mit einer anderen Verfahrensweise) die gleichen Schlußfolgerungen über φ zu ziehen. Damit gilt die Implikation $f \in C^1 \Rightarrow$ Prolongation $F \in C^o \Rightarrow \varphi \in C^1$. □

φ besitzt sogar stetige bezüglich t und ξ gemischte zweite Ableitungen. Denn $V = D_\xi \varphi$ genügt der DGl (4.13), also existiert $\dot{V} = D_t D_\xi \varphi$, und es ist

$$D_t D_\xi \varphi = (D_x f \circ \varphi) D_\xi \varphi = D_\xi (f \circ \varphi) = D_\xi \dot{\varphi} = D_\xi D_t \varphi.$$

Durch Betrachtung iterierter Prolongationen folgt induktiv die Implikation $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n) \Rightarrow \varphi \in C^k(W, \mathcal{D})$, $k \in \mathbb{N}$. Natürlich ist dann mit festem t auch $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$ von der Klasse C^k (wir verwenden diese Sprechweise auch für den Trivialfall $\mathcal{D}_t = \text{dom} \varphi_t = \emptyset$). Da $\varphi_t|_{\mathcal{D}_t} \rightarrow \mathcal{D}_{-t}$ bijektiv und $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ ebenfalls C^k ist, erweist sich φ_t als Diffeomorphismus der Klasse C^k .

Im Ergebnis der vorausgegangenen Untersuchungen haben wir

Satz 4.7 In der DGL $\dot{x} = f(x)$ sei $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $k \in \{1, 2, \dots, \infty\}$. Dann gilt

- (i) Die allgemeine Lösung $\varphi : (t, \xi) \mapsto \varphi(t, \xi)$ ist von der Klasse $C^k(W, \mathcal{D})$.
- (ii) Die partielle Ableitung $D_\xi \varphi$ ist nach t stetig differenzierbar und löst das lineare Anfangswertproblem $D_t D_\xi \varphi = (D_x f \circ \varphi) D_\xi \varphi$, $D_\xi \varphi(0, \xi) = E$.
- (iii) Der durch f erzeugte lokale Fluß $\mathcal{F} = \{\varphi_t | t \in \mathbb{R}\}$, $\varphi_t(\cdot) := \varphi(t, \cdot)$, ist eine Familie lokaler Diffeomorphismen, $\varphi_t \in \text{Diff}^k(\mathcal{D}_t, \mathcal{D}_{-t})$, wobei $\mathcal{D}_t = \{x \in \mathcal{D} | t \in I(x)\}$ offene Teilmenge von \mathcal{D} ist. Es ist $\varphi_0 = \text{id}_{\mathcal{D}}$, $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$, und es gilt $(\varphi_t \circ \varphi_s)(x) = \varphi_{t+s}(x)$ mit allen $x \in \mathcal{D}$, für welche die linke Seite definiert ist. ■

Die Untersuchung des Flusses einer autonomen DGL wird im Kapitel 4.5 fortgesetzt. Vorher betrachten wir zwei Anwendungen.

4.4 Variationsgleichungen, lineare Approximationen

Wir betrachten die Lösungen $\varphi(\cdot, \xi_o) | I(\xi_o) \rightarrow \mathcal{D}$ und $\varphi(\cdot, \xi) | I(\xi) \rightarrow \mathcal{D}$ der DGL $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, zu benachbarten Anfangswerten ξ_o, ξ . Es ist $0 \in I(\xi_o) \cap I(\xi) =: I$, und I ist ein offenes Intervall. Die Lösung $\varphi(\cdot, \xi_o) =: \varphi_o(\cdot)$ möge bekannt sein. Setzen wir

$$\forall t \in I \quad \varphi(t, \xi) - \varphi_o(t) =: z(t), \quad z(0) = \xi - \xi_o =: \zeta,$$

dann ist

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \dot{\varphi}(t, \xi) - \dot{\varphi}_o(t) = f(\varphi(t, \xi)) - f(\varphi_o(t)) \\ &= f(\varphi_o(t) + z(t)) - f(\varphi_o(t)) = D_x f(\varphi_o(t)) z(t) + o(\|z(t)\|). \end{aligned}$$

In erster Näherung (vernachlässigter o -Term) genügt also z der DGL

$$\dot{z} = D_x f(\varphi_o(t)) z, \tag{4.16}$$

das ist gerade der lineare Teil der Prolongation, die **Linearisierung** der originalen DGL $\dot{x} = f(x)$ längs der bekannten Lösung $\varphi_o(\cdot)$. Wir nennen sie auch die **Variationsgleichung bezüglich der Anfangswerte**. Ist $z(\cdot)$ die Lösung von (4.16) mit normmäßig kleinem $z(0) = \xi - \xi_o$, dann wird $\varphi_o(t) + z(t)$ eine brauchbare Näherung für $\varphi(t, \xi)$ sein, solange $\|z(t)\|$ klein ist. Im allgemeinen wird das nur für kleine $|t|$ der Fall sein; $\varphi_o + z$ gibt dann eine lokale *quantitative* Approximation, die sich wegen der Linearität von (4.16) numerisch sehr schnell berechnen läßt (das kann z.B. bei online-Bahnkorrekturrechnungen für Raumflugkörper entscheidend sein).

Besonders bearbeitungsfreundlich ist natürlich der Fall einer konstanten Lösung $\varphi_o : t \mapsto \xi_o$ (Gleichgewicht). Wegen der konstanten Koeffizientenmatrix $D_x f(\xi_o)$ läßt sich z mit den algebraischen Methoden des Kapitels 3.4 berechnen, wobei die Eigenwerte der Matrix eine dominierende Rolle spielen. Wir werden uns später sehr gründlich dafür interessieren, ob die Funktionen $\xi_o + z(\cdot)$ in einer Umgebung von ξ_o eine brauchbare *qualitative* Approximation der Phasenkurven der originalen DGL $\dot{x} = f(x)$ darstellen.

Bei vielen Untersuchungen in der qualitativen Theorie der DGLn und in Anwendungen

(wenn die DGL ein physikalisches System modelliert) ist die rechte Seite von Parametern, $(p_1, p_2, \dots, p_m) =: p \in \mathbb{R}^m$, abhängig,

$$\dot{x} = f(x, p), \quad x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n, \quad p \in \mathbb{R}^m.$$

Genaugenommen liegt damit eine m -dimensionale Schar von DGLn vor, die Grundgebiete der einzelnen DGLn könnten auch von p abhängig sein. Die p -Abhängigkeit von f überträgt sich auf die Lösung, $\varphi(\cdot, \cdot; p)$. Die Art der Übertragung ist von Interesse - besonders in Anwendungen, wo die Parameterwerte stets mit Meßungenauigkeiten behaftet oder gar nur Schätzwerte sind. Wir beschränken unsere Überlegungen auf den Fall von p unabhängiger Anfangswerte. Dann gilt

Satz 4.8 *Ist bei dem parameterabhängigen Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = f(x, p), \quad x(0) = \xi,$$

f von der Klasse C^1 , dann existiert für die Lösung $\varphi(\cdot, \xi; p)$ auch $D_p\varphi$ und ist stetig.

Beweis Wir ersetzen das n -dimensionale Anfangswertproblem mit p -abhängiger DGL durch ein $n + m$ -dimensionales Anfangswertproblem mit parameterunabhängiger DGL:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ \dot{u} &= 0, \quad (x, u)(0) = (\xi, p). \end{aligned}$$

Jetzt ist p Anfangswert, und Satz 4.7 regelt alles. ■

Die Ableitung $D_p\varphi$ löst ein lineares Anfangswertproblem. Zu den festen Werten ξ_o, p_o sei die Lösung $\varphi(\cdot, \xi_o; p_o) =: \varphi_o(\cdot) \mid I(\xi_o, p_o) \rightarrow \mathcal{D}$ bekannt. Dann gilt mit benachbartem Parameterwert p

$$\varphi(t, \xi_o; p) = \xi_o + \int_0^t f(\varphi(s, \xi_o; p), p) ds, \quad t \in I(\xi_o, p). \quad (4.17)$$

Für alle p ist $I(\xi_o, p) \cap I(\xi_o, p_o)$ ein nichtleeres offenes Intervall. Nach Satz 4.8 darf in (4.17) auf beiden Seiten, und rechts unter dem Integral, an der Stelle p_o nach p differenziert werden:

$$D_p\varphi(t, \xi_o; p_o) = 0 + \int_0^t [D_x f(\varphi_o(s), p_o) D_p\varphi(s, \xi_o; p_o) + D_p f(\varphi_o(s), p_o)] ds.$$

Das bedeutet nach Satz 2.1: $D_p\varphi(\cdot, \xi_o; p_o)$ ist Lösung von

$$\dot{V} = D_x f(\varphi_o(t), p_o) V + D_p f(\varphi_o(t), p_o), \quad V(0) = 0. \quad (4.18)$$

Sinngemäß heißt diese (inhomogene!) lineare DGL die **Variationsgleichung bezüglich des Parameters**.

4.5 Globale Flüsse und dynamische Systeme

Im Kapitel 4.3 wurden die Elemente des lokalen Flusses $\mathcal{F} = \{\varphi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ eines Vektorfeldes $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, als lokale C^k -Diffeomorphismen $\varphi_t \mid \mathcal{D}_t \rightarrow \mathcal{D}_{-t}$ nachgewiesen (lokale Homöomorphismen, falls f nur Lipschitz-stetig ist). „Lokal“ bezieht sich auf die Tatsache, daß im allgemeinen \mathcal{D}_t nur eine echte offene Teilmenge von \mathcal{D} ist, die (für große $|t|$) sogar leer sein kann - die entsprechenden φ_t werden dann mit dem *leeren Diffeomorphismus* identifiziert. Unabhängig von den Glattheitseigenschaften beschreibt Satz 4.5 eine gewisse Struktur der Menge \mathcal{F} , die an die Struktur einer Gruppe erinnert:

- \mathcal{F} enthält das ausgezeichnete Element $\varphi_0 = id_{\mathcal{D}}$ (Einselement?);
- \mathcal{F} enthält mit jedem Diffeomorphismus φ_t auch seinen inversen, $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$; φ_t und φ_{-t} sind also in beliebiger Reihenfolge komponierbar, und es ist

$$\varphi_{-t} \circ \varphi_t = \varphi_0 \Big|_{\mathcal{D}_t}, \quad \varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0 \Big|_{\mathcal{D}_{-t}} \quad (4.19)$$
 (das ist auch bei leerem \mathcal{D}_t sinnvoll);
- Zwei Elemente φ_s und φ_t sind auf der offenen (möglicherweise leeren) Menge $\mathcal{D}_s \cap \varphi_{-s}(\mathcal{D}_t \cap \mathcal{D}_{-s}) =: \mathcal{D}_{t,s}$ komponierbar, es ist $\mathcal{D}_{t,s} \subset \mathcal{D}_{t+s}$ und

$$\varphi_t \circ \varphi_s \Big|_{\mathcal{D}_{t,s}} = \varphi_{t+s} \Big|_{\mathcal{D}_{t,s}} \quad (4.20)$$
 (mit $t + s = 0$ folgt daraus (4.19)).

Ist für wenigstens ein $t \in \mathbb{R}$ \mathcal{D}_t eine *echte* Teilmenge von \mathcal{D} , dann ist die Komposition von Abbildungen, \circ , *keine* binäre Operation in \mathcal{F} . Denn z.B. die Komposition $\varphi_{-t} \circ \varphi_t$ führt nach (4.19) auf $\varphi_0 \Big|_{\mathcal{D}_t}$, und diese *echte* Einschränkung der Abbildung φ_0 (mit $dom \varphi_0 = \mathcal{D}$) gehört per definitionem *nicht* zu \mathcal{F} . Die Verhältnisse ändern sich schlagartig zum Angenehmen, falls $\mathcal{D}_t = \mathcal{D}$ für alle $t \in \mathbb{R}$: \circ wird zur binären Operation, (\mathcal{F}, \circ) wird eine Gruppe von Abbildungen $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$.

$\mathcal{D}_t = \mathcal{D}$ ist nach (4.7) äquivalent mit $\forall x \in \mathcal{D} \quad t \in I(x)$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ das zutrifft, ist durch das Vektorfeld f bestimmt. Gehören alle positiven (negativen) t zu $I(x)$, dann ist die durch das Vektorfeld f festgelegte Zukunft (Vergangenheit) des Phasenpunktes x zeitlich unbeschränkt.

Definition 4.9 Das Vektorfeld $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, heißt
vorwärtskomplett (future complete), falls $\forall x \in \mathcal{D} \quad I(x) \supset \mathbb{R}^+$,
rückwärtskomplett (past complete), falls $\forall x \in \mathcal{D} \quad I(x) \supset \mathbb{R}^-$,
komplett (complete), falls $\forall x \in \mathcal{D} \quad I(x) = \mathbb{R}$.

Beispiel 4.10 (a) Jedes lineare Vektorfeld $f : f(x) = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, ist nach Satz 3.2 komplett.

(b) Das Vektorfeld $f : f(x) = x(1-x)$, $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^1$, ist vorwärtskomplett auf $\mathcal{D} := (1, +\infty)$, rückwärtskomplett auf $\mathcal{D} := (-\infty, 0)$ und komplett auf $\mathcal{D} := (0, 1)$, vgl. Beispiel 1.10. \square

Die Komplettheit eines Vektorfeldes ist nicht durch ein allgemeines Kriterium zu entscheiden. Eine hinreichende Bedingung ist nach Satz 2.19 die lineare Beschränktheit: $\exists \varrho, \sigma \in \mathbb{R}^+ : \|f(x)\| \leq \varrho \|x\| + \sigma$.

Die praktische Bedeutung der Komplettheit besteht in folgendem. Das glatte Vektorfeld f

modelliere ein physikalisches System. Jeder Anfangszustand des Systems bestimmt dann eindeutig einen Prozeß, der zeitlich unbeschränkt abläuft: aus dem Anfangszustand kann mittels f auf die Systemzustände in ferner Zukunft und in grauer Vergangenheit geschlossen werden. Geometrisch heißt das, daß der Phasenpunkt bei seiner Bewegung *nicht* in endlicher Zeit den Rand von \mathcal{D} , wo die durch f dargestellte physikalische Gesetzlichkeit des Systems zu gelten aufhört, erreicht (bei unbeschränktem Gebiet \mathcal{D} kann also auch $\|\varphi_t(x)\|$ nicht in endlicher Zeit gegen Unendlich gehen: „Explosionen“ können im System nicht auftreten). Die Bedeutung der Komplettheit eines Vektorfeldes für die Theorie offenbart der folgende

Satz 4.11 *Der durch ein komplettes Vektorfeld $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, erzeugte Fluß $\mathcal{F} = \{\varphi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist eine 1-parametrische Familie globaler Diffeomorphismen, $\mathcal{F} \subset \text{Diff}^k(\mathcal{D})$. Mit der Komposition \circ ist (\mathcal{F}, \circ) eine Abelsche Gruppe und homomorphes Bild der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$.*

Beweis (i) Die Globalität der Diffeomorphismen φ_t , d.h., $\text{dom } \varphi_t = \mathcal{D}$ für jedes $t \in \mathbb{R}$, ist nach (4.7) und Definition 4.9 mit der Komplettheit von f äquivalent.
 (ii) Mit $\mathcal{D}_t = \mathcal{D}$ verlangt die Komposition $\varphi_t \circ \varphi_s$ keine Einschränkung (in (4.20) ist $\mathcal{D}_{t,s} = \mathcal{D}$), es ist $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, und somit können t und s vertauscht werden.
 (iii) Die DGl $\dot{x} = f(x)$ bestimmt die Zuordnung $h : t \mapsto \varphi_t$, d.h. eine Abbildung $h \mid \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{F}$. Dabei ist insbesondere $h(0) = \varphi_0$, $h(t+s) = \varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s = h(t) \circ h(s)$: h ist operationstreu bezüglich der Gruppenoperationen $+$ und \circ . ■

Der Fluß eines kompletten Vektorfeldes ordnet sich der allgemeineren Begriffsbildung des *dynamischen Systems* unter.

In Vorbereitung der folgenden Definition soll M eine nichtleere Menge bezeichnen, und $\mathcal{A}(M)$ sei die Menge aller Abbildungen von M auf sich. Die in $\mathcal{A}(M)$ unbeschränkt ausführbare Komposition, \circ , von Abbildungen ist eine assoziative Operation, $(\mathcal{A}(M), \circ)$ ist eine Halbgruppe mit dem Einselement id_M .

Definition 4.12 *Gegeben seien*

- (i) *eine nichtleere Menge M ,*
 - (ii) *eine Abelsche Gruppe $(\mathcal{G}, +)$ und*
 - (iii) *eine Abbildung $h \mid \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{A}(M) : g \mapsto h(g) =: \varphi_g$, $\varphi_g \mid M \rightarrow M$.*
- Mit $\mathcal{F} := h(\mathcal{G}) = \{\varphi_g \mid g \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{A}(M)$ sei dabei

- (a) *(\mathcal{F}, \circ) eine Gruppe und*
- (b) *$h \mid (\mathcal{G}, +) \rightarrow (\mathcal{F}, \circ)$ ein Homomorphismus.*

Dann heißt (M, \mathcal{G}, h) oder auch (M, \mathcal{F}) ein **dynamisches System** mit dem **Fluß** \mathcal{F} .

Diese Definition ist weitgehend abstrakt gehalten: M ist eine beliebige Menge, \mathcal{G} eine beliebige Gruppe mit *irgendeiner* Gruppenoperation $+$, h ist unter den wesentlichen Forderungen (a), (b) irgendeine Abbildung der Gruppe \mathcal{G} in die Menge *aller* Abbildungen von M auf sich.

Für die Tatsache, daß der Homomorphismus h jedem Gruppenelement $g \in \mathcal{G}$ eine Selbstabbildung φ_g von M zuordnet, wird auch die Sprechweise „*die Gruppe \mathcal{G} operiert auf M* “ benutzt, und h wird eine *Gruppenaktion* genannt. Ist \mathcal{G} die Menge der reellen oder der ganzen Zahlen mit der normalen Addition als Gruppenoperation, $(\mathbb{R}, +)$ oder $(\mathbb{Z}, +)$, dann heißt (M, \mathcal{F}) ein *kontinuierliches* bzw. *diskretes dynamisches System*.

Jedes kontinuierliche dynamische System generiert sofort diskrete dynamische Systeme, indem der Homomorphismus $h | (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathcal{F}, \circ)$ auf die Untergruppe $(\mathbb{Z}, +)$ bzw. $(\alpha\mathbb{Z}, +)$ mit $\alpha \neq 0$ eingeschränkt wird. Das ist ganz anschaulich! Denken wir wieder $t \in \mathbb{R}$ als Zeit und betrachten die Bilder $\varphi_t(K)$ einer Teilmenge $K \subset M$. Dann sehen wir als Aktion von $(\mathbb{R}, +)$ eine stetige Bewegung $t \mapsto \varphi_t(K)$, nach Einschränkung auf $(\mathbb{Z}, +)$ nur noch eine diskrete (stroboskopische) Folge von Bildern $\varphi_t(K)$, $t = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ (die, wenn die Zeiteinheit 1 physikalisch genügend klein ist, wie im Kino den *Eindruck* einer stetigen Bewegung erzeugen kann).

Numerische Lösungsverfahren ordnen sich häufig in dieses Schema ein: Bei vorgegebener Schrittweite α berechnet ein Algorithmus A (dessen Interna für uns geheimnisvoll bleiben können) mit Hilfe des Vektorfeldes f aus dem Anfangswert x den (mit vorgegebbarer Genauigkeit angenäherten) Wert der Lösung $\varphi_\alpha(x) = A[f(\cdot), \alpha, x]$ und durch Iteration die diskrete Folge (Wertetabelle) $\varphi_{k\alpha}(x) = \varphi_\alpha(\varphi_{(k-1)\alpha}(x)) = A[f(\cdot), \alpha, \varphi_{(k-1)\alpha}(x)]$, $k \in \mathbb{N}$.

Ein diskretes dynamisches System muß jedoch nicht notwendig in der obigen Weise mit einem kontinuierlichen dynamischen System verknüpft sein, die Gesamtheit der diskreten dynamischen Systeme ist reichhaltiger als die der kontinuierlichen.

Mit der Definition 4.12 ergibt Satz 4.11 sofort den

Satz 4.13 *Ist $\mathcal{F} = \{\varphi_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ der Fluß eines kompletten Vektorfeldes $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, dann ist $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$ ein kontinuierliches dynamisches System. ■*

Letztendlich stammt aus diesem Satz die nicht ganz zutreffende weitverbreitete identifizierende Sprechweise „Die DGl $\dot{x} = f(x)$ ist ein dynamisches System“ (vgl. dazu auch Satz 4.16).

Wir können eine autonome DGl nunmehr auch so verstehen, daß ihr Vektorfeld $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, den Homomorphismus h bestimmt, der die Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in die Gruppe $\text{Diff}^k(\mathcal{D})$ - echter Teil der Halbgruppe $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ - abbildet. Eigenschaften von f reflektieren sich in range $h = \mathcal{F}$ - echte Untergruppe von $\text{Diff}^k(\mathcal{D})$. Paradigma: das lineare Vektorfeld, $f(x) = Ax$, erzeugt die Lösungen $\varphi_t(x) = \Phi(t, 0)x$ (Φ : Übergangsmatrix), \mathcal{F} ist also eine Gruppe linearer Abbildungen; ist A schiefssymmetrisch, dann ist \mathcal{F} eine 1-parametrische Drehgruppe. (Vgl. Kapitel 3.3, in der dort benutzten Schreibweise ist $\varphi_t = \mathbb{L}_{t,0}$.)

Im Zusammenhang mit einem allgemeinen dynamischen System führen wir einige Begriffe ein, die uns von den DGLn nicht fremd sind.

Definition 4.14 *Sei (M, \mathcal{F}) , $\mathcal{F} = \{\varphi_g \mid g \in \mathcal{G}\} \subset \mathcal{A}(M)$, ein dynamisches System. Dann heißen M : **Phasenraum**, $\mathcal{G} \times M$: **erweiterter Phasenraum**. Zu festem $x \in M$ heißt die Abbildung $\Phi_x(\cdot) | \mathcal{G} \rightarrow M : g \mapsto \Phi_x(g) := \varphi_g(x)$ **Bewegung** von x unter dem Fluß \mathcal{F} , ihr Wertevorrat $\text{range } \Phi_x = \Phi_x(\mathcal{G})$ ist der **Orbit** durch x . ($\Phi_x(\cdot)$ ist eine Parameterdarstellung des Orbits.) $\Phi_x(\mathcal{G})$ heißt **p-periodischer Orbit**, falls ein vom neutralen Element verschiedenes $p \in \mathcal{G}$ existiert, mit dem gilt: $\forall g \in \mathcal{G} \Phi_x(g+p) = \Phi_x(g)$. $\bar{x} \in M$ ist **Fixpunkt des Flusses**, falls $\forall g \in \mathcal{G} \varphi_g(\bar{x}) = \bar{x}$, d.h., $\Phi_{\bar{x}}(\mathcal{G}) = \{\bar{x}\}$; der Orbit durch \bar{x} ist eine einelementige Menge.*

Im Fall einer DGl ist das Zylindergebiet $\mathbb{R} \times \mathcal{D}$ der erweiterte Phasenraum, die Bewegung von x ist $t \mapsto \Phi_x(t) := \varphi_t(x)$, ein p -periodischer Orbit, $\Phi_x(t+p) = \Phi_x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, ist eine geschlossene Kurve im \mathbb{R}^n , die den Punkt x enthält, ein Fixpunkt \bar{x} entspricht einer konstanten Lösung der DGl, $\varphi(t, \bar{x}) = \bar{x}$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Die bekannte Tatsache, daß sich Phasenkurven autonomer DGLn nicht schneiden (siehe Satz 4.1 und Bemerkung), ist in dem folgenden allgemeineren Satz enthalten.

Satz 4.15 *Je zwei Orbits eines dynamischen Systems sind disjunkt oder identisch, d.h.,*

$$\forall x, y \in M \quad \Phi_x(\mathcal{G}) \cap \Phi_y(\mathcal{G}) = \emptyset \vee \Phi_x(\mathcal{G}) = \Phi_y(\mathcal{G}).$$

Beweis Angenommen, die beiden Orbits sind nicht disjunkt, dann gibt es ein $z \in M$ mit $z \in \Phi_x(\mathcal{G}) \wedge z \in \Phi_y(\mathcal{G})$. Da z in beiden Wertevorräten liegt, heißt das $\exists g_1 \in \mathcal{G} : z = \Phi_x(g_1) = \varphi_{g_1}(x)$, somit ist $x = \varphi_{-g_1}(z)$, und $\exists g_2 \in \mathcal{G} : z = \Phi_y(g_2) = \varphi_{g_2}(y)$. Damit folgt aber für beliebiges $g \in \mathcal{G}$: $\varphi_g(x) = (\varphi_g \circ \varphi_{-g_1})(z) = \varphi_{g-g_1}(z) = (\varphi_{g-g_1} \circ \varphi_{g_2})(y) = \varphi_{g-g_1+g_2}(y)$, also $\forall g \in \mathcal{G} \quad \Phi_x(g) = \Phi_y(g - g_1 + g_2)$, und für die Wertevorräte gilt $\Phi_x(\mathcal{G}) = \Phi_y(\mathcal{G})$, da mit g auch $g - g_1 + g_2$ die ganze Gruppe \mathcal{G} durchläuft. ■

Bemerkung Die im Satz formulierte *geometrische* Eigenschaft der Orbits hat ihren Ursprung in den *algebraischen* Eigenschaften des Flusses. Nur eine andere Fassung des Satzes 4.15 ist die Aussage:

*Die Menge aller Orbits eines dynamischen Systems bildet eine Zerlegung des Phasenraumes, das **Phasenportrait** $\mathcal{P}(M, \mathcal{F})$.* □

Im Fall eines kontinuierlichen dynamischen Systems, das von einer DGL erzeugt ist, sind die Orbits genau die Kurven, die auf das Vektorfeld passen. Es ist klar, daß der Begriff des Phasenportraits auch für nichtkomplette Vektorfelder sinnvoll ist (einziger Unterschied: nicht alle Orbits haben eine Parameterdarstellung $\Phi_x(\cdot)$ mit \mathbb{R} als Parameterintervall).

Wir überlegen uns im folgenden, daß umgekehrt jedes kontinuierliche dynamische System mit einem Phasenraum $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ unter einer zusätzlichen Glattheitsforderung ein komplettes Vektorfeld auf \mathcal{D} generiert.

Sei also ein Fluß $\mathcal{F} = \{\varphi_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \text{Diff}^k(\mathcal{D})$, $k \geq 1$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$, gegeben. Der Fluß soll in folgendem Sinn *glatt* sein: Mit beliebigem festen $x \in \mathcal{D}$ ist die Funktion $t \mapsto \varphi_t(x)$ (d.h., die Bewegung $\Phi_x(\cdot)$) bei $t = 0$ differenzierbar und die *dadurch definierte* Funktion $f(\cdot) : x \mapsto \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t(x)$ sei C^k ,

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \exists \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi_t(x) =: f(x) \quad \text{und} \quad f(\cdot) \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n). \tag{4.21}$$

$f(\cdot)$ ist ein durch den Fluß \mathcal{F} definiertes *Vektorfeld der Phasengeschwindigkeit*. Mit diesem Vektorfeld betrachten wir die DGL $\dot{x} = f(x)$. Ist $\psi(\cdot, \cdot)$ die allgemeine Lösung, dann ist $\psi(0, x) = x$, $\dot{\psi}(t, x) = f(\psi(t, x))$, $\dot{\psi}(0, x) = f(x)$. Ein Vergleich mit den obigen Eigenschaften von $\Phi_x(\cdot)$ ergibt mit dem Unitätssatz sofort $\psi(\cdot, x) = \Phi_x(\cdot)$, und da $\Phi_x(\cdot)$ auf ganz \mathbb{R} definiert ist, hat auch $\psi(\cdot, x)$ bei beliebigem $x \in \mathcal{D}$ das Maximalintervall $I(x) = \mathbb{R}$: das Vektorfeld f ist *komplett*, und für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathcal{D}$ ist $\psi_t(x) = \varphi_t(x)$.

Satz 4.16 *Ein kontinuierliches dynamisches System $(\mathcal{D}, \mathcal{F})$, $\mathcal{F} = \{\varphi_t \mid t \in \mathbb{R}\} \subset \text{Diff}^k(\mathcal{D})$, das im Sinne von (4.21) *glatt* ist, induziert auf \mathcal{D} ein komplettes C^k -Vektorfeld f . Der durch f erzeugte Fluß stimmt mit \mathcal{F} überein.* ■

4.6 Phasenportraits

In der Folge werden nur noch kontinuierliche dynamische Systeme bzw. durch glatte Vektorfelder erzeugte Flüsse betrachtet. Jede Bewegung $\Phi_x(\cdot)$ ist nach t differenzierbar. Ist die Ableitung $\dot{\Phi}_x$ identisch gleich Null, dann ist $\Phi_x(t) = x$ für alle $t \in \mathbb{R}$, der Orbit durch x ist $\Phi_x(\mathbb{R}) = \{x\}$, x ist ein Fixpunkt des Flusses. Ist $\Phi_x(\cdot)$ nicht konstant, dann ist der Orbit durch x Bild einer nichttrivialen differenzierbaren Kurve, für die $\dot{\Phi}_x(t) = f(\Phi_x(t))$, $t \in I(x)$, gilt. Der Orbit ist glatt (besitzt eine Tangente) in allen Punkten mit $f(\Phi_x(t)) \neq 0$.

Definition 4.17 Eine Nullstelle des Vektorfeldes $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, d.h., $\bar{x} \in \mathcal{D}$: $f(\bar{x}) = 0$, heißt **singulärer Punkt** von f . Der singuläre Punkt \bar{x} heißt **nichtentartet** (= **einfach**) bzw. **entartet** (= **nichteinfach**), falls die Jacobimatrix $D_x f(\bar{x})$ regulär bzw. singular ist.

Satz 4.18 (i) $\bar{x} \in \mathcal{D}$ ist Fixpunkt des Phasenflusses \mathcal{F} gdw. \bar{x} singulärer Punkt der Phasengeschwindigkeit f ist.

(ii) Einfache singuläre Punkte sind isoliert (häufen sich nicht in \mathcal{D}).

Beweis (i) Ist \bar{x} Fixpunkt, dann ist $\forall t \in \mathbb{R} \varphi_t(\bar{x}) = \Phi_{\bar{x}}(t) = \bar{x}$ und somit $\dot{\Phi}_{\bar{x}}(t) = f(\Phi_{\bar{x}}(t)) = f(\bar{x}) = 0$. Ist \bar{x} singulärer Punkt, $f(\bar{x}) = 0$, dann hat das Anfangswertproblem $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \bar{x}$, die einzige Lösung $\varphi(\cdot, \bar{x}) = \bar{x}$, also gilt $\forall t \in \mathbb{R} \Phi_{\bar{x}}(t) = \bar{x}$.

(ii) Sei $f(\bar{x}) = 0$, $D_x f(\bar{x})$ regulär. Dann besitzt die Gleichung $f(x) = y$ das Lösungselement $(\bar{x}, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ und ist in einer Umgebung $U(\bar{x}, 0)$ eindeutig nach x auflösbar. Zu $y = 0$ gehört also nur \bar{x} , d.h. \bar{x} ist einzige Nullstelle von f in $U(\bar{x}, 0) \cap (\mathbb{R}^n \times \{0\})$. ■

Bemerkung Entartete singuläre Punkte können sich häufen. Betrachte die Beispiele mit $n = 2$: $f(x) = (x^1 + x^2, (x^1)^2 - (x^2)^2)^T$; $f(x) = ((x^1)^2 + x^2, (x^1)^2 + (x^2)^2)^T$. □

Folgerung a) Fixpunkte (des Flusses) und singuläre Punkte (des Vektorfeldes) fallen zusammen.

b) Entlang eines nichttrivialen Orbits ist die Phasengeschwindigkeit verschieden von Null, jeder solcher Orbit ist glatt.

c) Es gibt drei topologisch verschiedene Typen von Orbits:

(i) Punkte ($\Phi_x(\cdot)$ konstant),

(ii) nichtgeschlossene glatte Jordanbögen ($\Phi_x(\cdot)$ nichtperiodisch),

(iii) geschlossene glatte Jordanbögen ($\Phi_x(\cdot)$ periodisch, nichtkonstant).

d) Ein singulärer Punkt \bar{x} ist niemals Element eines Orbits vom Typ (ii) oder (iii)! $\{\bar{x}\}$ kann Grenzmenge einer Lösung $\varphi(\cdot, x)$ sein (Fig. 4.5), dann ist wegen Satz 2.12 $\bar{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_p(t)$ oder $\bar{x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_q(t)$ ($\{\bar{x}\}$ ist ω - oder α -Grenzmenge). □

Nach den vorangegangenen Überlegungen ist klar, daß im Phasenportrait fast alle wesentlichen Informationen über die erzeugende DGl (und damit über das durch die DGl modellierte physikalische Hintergrundsystem) gespeichert sind. In den Punkten der glatten Orbits ist durch die Tangente die Richtung, bei gegebener Durchlaufung der Orbits (im Sinne wachsender Zeit t) auch die Orientierung der Phasengeschwindigkeit festgelegt, damit ist das Vektorfeld der Phasengeschwindigkeit bis auf seine Norm bekannt: $f(x) = \alpha(x)g(x)$, $\alpha(x) \geq 0$, $\alpha(x) = 0$ genau auf den einelementigen Orbits, $g(x)$ bekannt, wobei (z.B.) $\|g(x)\| = 1$.

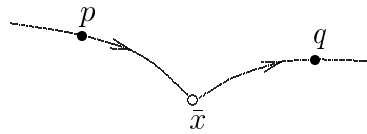


Fig.4.5

Definition 4.19 Sei $\{\varphi_t\}$ der (lokale) Fluß zum Vektorfeld $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$. Eine Menge $S \subset \mathcal{D}$ heißt **positiv (negativ) invariant bezüglich f** , falls

- (i) $\forall x \in S \ \mathbb{R}^+ \subset I(x)$ ($\mathbb{R}^- \subset I(x)$) und
- (ii) $\forall x \in S \ \forall t \in \mathbb{R}^+ (t \in \mathbb{R}^-) \ \varphi_t(x) \in S$.

S heißt **invariant**, falls S positiv und negativ invariant ist.

Bemerkung (a) Jeder Orbit $\Phi_x(\mathbb{R})$ ist eine invariante Menge ($y \in \Phi_x(\mathbb{R}) \Rightarrow y = \varphi_{t_1}(x) \Rightarrow \varphi_t(y) = \varphi_{t+t_1}(x) \in \Phi_x(\mathbb{R})$). Das Phasenportrait eines kompletten Vektorfeldes ist somit eine „Blätterung“ des Phasenraumes in invariante Mengen.

(b) Ist S eine invariante Menge für f , dann ist die Einschränkung $f|_S$ ein komplettes Vektorfeld auf S . Ist $n = 3$ und S ein glattes Flächenstück, dann muß offensichtlich f in jedem Punkt von S tangential zu S sein.

(c) Invariante Mengen können eine sehr komplizierte Struktur besitzen. Wichtige einfache Beispiele folgen im Kapitel 4.10.

(d) $S = \emptyset$ ist invariante Menge für jedes Vektorfeld. □

Wir zeigen im folgenden, daß in \mathcal{D} liegende beschränkte Grenzmengen von Lösungen invariante Mengen sind. Grenzmengen wurden in Kapitel 2 eingeführt, doch beginnen wir hier zunächst nochmals mit einer

Definition 4.20 $\varphi(\cdot, \xi)$ sei die Lösung des AWP $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = \xi$, mit $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$. Es sei $\mathbb{R}^+ \subset I(\xi)$ ($\mathbb{R}^- \subset I(\xi)$).

$x^* \in \mathbb{R}^n$ heißt **ω -Grenzpunkt (α -Grenzpunkt)** der Lösung, falls eine Folge (t_ν) existiert, so daß $x^* = \lim_{t_\nu \rightarrow \infty} \varphi(t_\nu, \xi)$ ($x^* = \lim_{t_\nu \rightarrow -\infty} \varphi(t_\nu, \xi)$). Die Menge aller x^* heißt **ω -Grenzmenge $\omega(\xi)$ (α -Grenzmenge $\alpha(\xi)$)**.

Bemerkung $\omega(\xi)$ existiert nicht, falls $I(\xi)$ nach oben beschränkt ist; $\omega(\xi)$ ist leer gdw. $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\varphi(t, \xi)\| = +\infty$ ist; $\omega(\xi)$ muß nicht in \mathcal{D} liegen! (Entsprechendes für $\alpha(\xi)$.) □

Beispiel 4.21 ($n = 1$), $\dot{x} = x(1 - x)$, $\mathcal{D} = (0, +\infty)$ (vgl. Beispiel 1.10).

$\alpha(\xi) : \{0\} \notin \mathcal{D}$ für $\xi \in (0, 1)$, $\{1\}$ für $\xi = 1$, nichtexistent für $\xi > 1$

$\omega(\xi) : \{1\}$ für jedes ξ . □

Lemma 4.22 Ist $\omega(\xi)$ eine nichtleere beschränkte Teilmenge von \mathcal{D} , so ist $\omega(\xi)$ eine invariante Menge.

Bemerkung Da jede Grenzmenge abgeschlossen ist, ist dann $\omega(\xi)$ kompakt. □

Beweis Sei $q \in \omega(\xi)$. Dann existiert eine Folge (t_ν) , $t_\nu < t_{\nu+1}$, $t_\nu \rightarrow +\infty$, mit $\varphi_{t_\nu}(\xi) \rightarrow q$, $\nu \rightarrow \infty$. Zu festem $i \in \mathbb{N}$ sei $t \in [-t_i, +\infty)$.

Dann ist (Lemma 4.2) $t \in I(\varphi_{t_i}(\xi)) = I(\xi) - t_i$ und damit $t \in I(\varphi_{t_\nu}(\xi))$ für jedes $\nu > i$.

Nun sei $s \in I(q)$. Dann gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so daß $s \in I(q) \cap [-t_i, +\infty)$, und für jedes $\nu > i$ ist $\varphi_{s+t_\nu}(\xi) = \varphi_s(\varphi_{t_\nu}(\xi))$. Da $\varphi_s(\cdot)$ stetig ist, ist

$$\varphi_s(q) = \varphi_s\left(\lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{t_\nu}(\xi)\right) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \varphi_{s+t_\nu}(\xi) \in \omega(\xi).$$

Das Kompaktum $\omega(\xi)$ hat einen positiven Abstand von $\partial\mathcal{D}$. Also kommt der Orbit durch q dem Rand von \mathcal{D} nicht beliebig nahe, somit ist nach Satz 2.12 $I(q) = \mathbb{R}$. ■

Bemerkung Ist $\omega(\xi)$ einelementig, $\omega(\xi) = \{\bar{x}\}$, so ist \bar{x} ein Fixpunkt des Flusses. Bei einer periodischen Lösung $\varphi(\cdot, \xi)$ sind $\alpha(\xi)$ und $\omega(\xi)$ mit dem Orbit $\Phi_\xi(\mathbb{R})$ identisch.

Bei $n = 1$ sind Grenzmengen stets einelementig. □

Ohne Beweis (s. dazu z.B. [1] oder [10]) geben wir noch den folgenden **Satz von Poincaré und Bendixson** an, der die Struktur von Grenzmengen im \mathbb{R}^2 beschreibt.

Satz 4.23 Sei $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, und das Vektorfeld $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^2)$ besitze nur endlich viele singuläre Punkte. Existiert zum Punkt $\xi \in \mathcal{D}$ die ω -Grenzmenge, ist $\emptyset \neq \omega(\xi) \subset \mathcal{D}$ und $\omega(\xi)$ beschränkt, dann liegt genau eine der folgenden Möglichkeiten vor:

- (i) $\omega(\xi)$ besteht aus einem Punkt (dieser ist Fixpunkt des Flusses),
- (ii) $\omega(\xi)$ besteht aus einem geschlossenen glatten Jordanbogen (dieser ist ein periodischer Orbit),
- (iii) $\omega(\xi)$ besteht aus endlich vielen Punkten (Fixpunkte des Flusses) und glatten Bögen (Orbits), die diese Punkte verbinden (und den Zusammenhang von $\omega(\xi)$ garantieren). ■

In vielen wichtigen Fällen von DGLn ist bekannt, daß der Phasenraum die disjunkte Vereinigung invarianter Mengen („Flächen“ fester oder verschiedener Dimension) ist (s. Kapitel 4.10), so daß, genaugenommen, das auf solche Flächen eingeschränkte Vektorfeld zu untersuchen ist.

Diese Tatsachen weisen darauf hin, daß es sowohl theoretisch wie aus Gründen der Anwendung erforderlich ist, DGLn bzw. Vektorfelder auf anderen Mengen als Gebieten des \mathbb{R}^n zu studieren (**DGLn auf Mannigfaltigkeiten**). Das würde den Rahmen dieses Hauptteiles des Skriptums sprengen.

4.7 Vergleich von Phasenportraits

Ist das Phasenportrait visuell gegeben (mit orientierten Orbits), dann läßt sich jede Bewegung $t \mapsto \Phi_x(t)$, d.h. jeder ablaufende Prozeß, qualitativ (bis auf die Norm der Phasengeschwindigkeit; über diese weiß man nur, daß sie klein ist in der Nähe von Fixpunkten) durch Verfolgung des entsprechenden Orbits erfassen und die Systemzukunft erkunden. Für letzteres sind oft Aussagen wie „das System geht gegen einen Gleichgewichtszustand“ oder „die Bewegung approximiert für große Zeiten einen periodischen Prozeß“ von Interesse und ausreichend. Dafür braucht das Phasenportrait nur bis auf homöomorphe (diffeomorphe) Verzerrungen bekannt zu sein. Es wäre nützlich zu wissen, wie ein Vektorfeld manipuliert (evtl.

vereinfacht) werden kann, um das Phasenportrait nur in diesem Rahmen zu verändern. Ein Vektorfeld f , das ein physikalisches System modelliert, ist immer mit ungenauen Parameterwerten und/oder Unsicherheiten seiner analytischen Struktur behaftet. Genaugenommen kann f nur dann als mathematisches Modell akzeptiert werden, wenn trotz der Unsicherheiten wesentlich *ein* Phasenportrait erzeugt wird, mit anderen Worten, wenn *Störungen* des Vektorfeldes, $f(\cdot) \rightarrow f(\cdot) + \varepsilon g(\cdot)$, höchstens zu homöomorphen Veränderungen des Phasenportraits führen, das Vektorfeld in diesem Sinne *strukturell stabil* ist. Diese Betrachtungen führen auf folgende Definitionen.

Definition 4.24 Die Flüsse $\{\varphi_t\}$ und $\{\psi_t\}$ heißen C^k -**konjugiert** ($k \geq 0$), wenn ein C^k -Diffeomorphismus $H \in \text{Diff}^k(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ existiert, für den das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{H} & \mathcal{D}' \\ \varphi_t \downarrow & & \downarrow \psi_t \\ \mathcal{D} & \xrightarrow{H} & \mathcal{D}' \end{array} \quad (4.22)$$

kommutiert, d.h., wenn

$$(H \circ \varphi_t)(x) = (\psi_t \circ H)(x) \quad (4.23)$$

für alle (t, x) , für die beide Seiten definiert sind.

- Bemerkung** (a) Unter C^0 -Diffeomorphismen sind Homöomorphismen zu verstehen.
 (b) C^k -Konjugiertheit ist eine Äquivalenzrelation (von Flüssen bzw. Vektorfeldern).
 (c) H überführt die Orbits von $\{\varphi_t\}$ in die Orbits von $\{\psi_t\}$ unter Erhaltung der t -Skalierung. (Beachte $H(x_1) = H(\varphi_{t_1}(x)) = \psi_{t_1}(H(x)) = \psi_{t_1}(y)$ - vgl. Figur 4.6.) \square

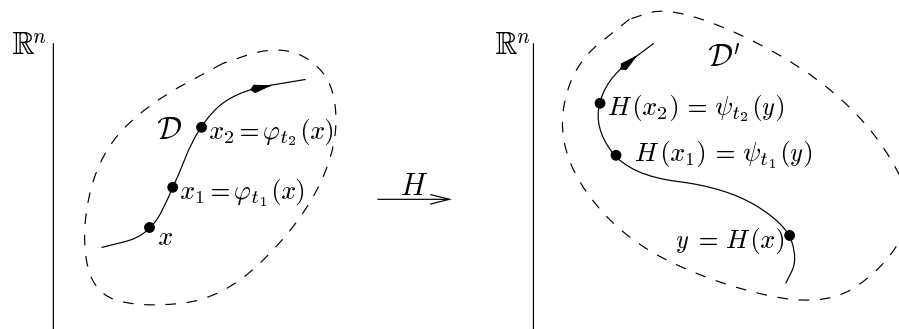


Fig. 4.6

Lemma 4.25 f und g seien glatte Vektorfelder auf \mathcal{D} bzw. \mathcal{D}' , die zugehörigen Flüsse $\{\varphi_t\}$ und $\{\psi_t\}$ seien C^k -konjugiert, $k \geq 1$. $H \in \text{Diff}^k(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ kommutiert mit den Flüssen gemäß Diagramm (4.22) gdw.

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad DH(x) \cdot f(x) = g(H(x)). \quad (4.24)$$

Beweis (i) Mit jedem festen $x \in \mathcal{D}$ gilt (4.23) für alle t aus einer Umgebung von Null. Differentiation nach t an der Stelle $t = 0$ ergibt (4.24).

(ii) Es gelte (4.24). $H \circ \varphi_t \circ H^{-1} =: \bar{\psi}_t$ definiert einen Fluß auf \mathcal{D}' (nachprüfen), das erzeugende Vektorfeld ist $\frac{d}{dt}|_{t=0} \bar{\psi}_t =: \bar{g}$, also $\bar{g}(y) = DH(H^{-1}(y)) \cdot f(H^{-1}(y)) = g(y)$. Damit ist $\bar{\psi}_t = \psi_t$, und es gilt (4.23). ■

Zur Veranschaulichung der beiden Vektorfelder denken wir uns \mathcal{D} und \mathcal{D}' in zwei verschiedenen Kopien des \mathbb{R}^n liegend. Der Punkt $x \in \mathcal{D}$ wird auf den Punkt $H(x) =: y \in \mathcal{D}'$ abgebildet. Der in x angeheftete Vektor $f(x)$ wird der linearen Transformation $f(x) \mapsto DH(x) \cdot f(x)$ unterworfen (Berechnung neuer Vektorkoordinaten: $f^i(x) \rightarrow \sum_{j=1}^n H_{,x^j}^i(x) f^j(x)$), der Bildvektor wird im Punkt $y \in \mathcal{D}'$ angetragen. Die so entstehenden Vektoren $g(y)$ bilden den range des Vektorfeldes g . Vgl. Figur 4.7. g ist das durch den Diffeomorphismus H von \mathcal{D} auf \mathcal{D}'

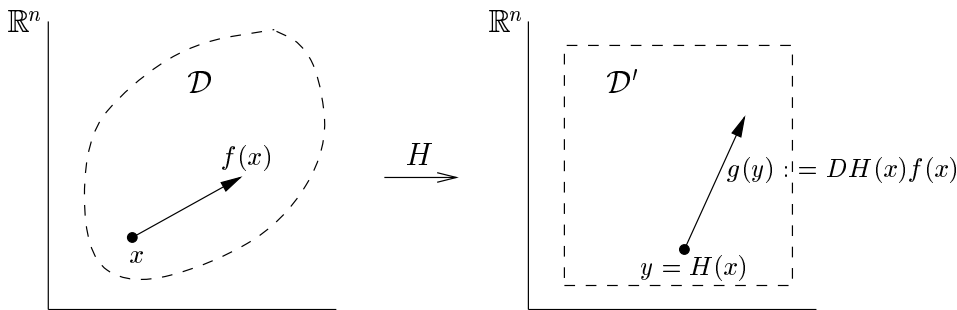


Fig. 4.7

überpflanzte Vektorfeld f : der **pushforward von f unter H** , Schreibweise

$$g = H_* f.$$

Umgekehrt ist $f : x \mapsto (DH(x))^{-1} g(H(x))$, also $f = (H^{-1})_* g$ der pushforward von g unter H^{-1} . Wir schreiben dafür

$$f = H^* g$$

und nennen f den **pullback von g unter H** .

Sprechweise Ist $H \in \text{Diff}^k(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ und kommutiert das Diagramm (4.22), dann heißen die Flüsse $\{\varphi_t\}$ und $\{\psi_t\}$ **H -konjugiert**. Ist $k \geq 1$ und $g = H_* f$, dann nennen wir auch die beiden Vektorfelder H -konjugiert.

Zu gegebenem Vektorfeld g auf \mathcal{D}' und gegebenem Diffeomorphismus $H \in \text{Diff}^k(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$, $k \geq 1$, ist $f := H^* g$ das einzige Vektorfeld auf \mathcal{D} , dessen Fluß zum Fluß von g H -konjugiert ist.

Beispiel 4.26 ($n = 2$)

$$\mathcal{D}' := \{(y^1, y^2) \mid 0 < y^1 < \pi/2, 0 < y^2\}, \quad \mathcal{D} := \{(x^1, x^2) \mid x^1 > 0, x^2 > 0\}.$$

$$g(y) := (1, 0)^T.$$

$\hat{H} \in C^\infty(\mathcal{D}', \mathcal{D}) : (y^1, y^2) \mapsto (x^1, x^2) := (y^2 \cos y^1, y^2 \sin y^1)$.

\hat{H} ist Diffeomorphismus mit $\hat{H}^{-1} =: H : (x^1, x^2) \mapsto (\arctan \frac{x^2}{x^1}, \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2})$.

$f := \hat{H}_*g$ bedeutet $f(\hat{H}(y)) = D\hat{H}(y) \cdot g(y)$, $f(x) = D\hat{H}(y) \cdot g(y)|_{y=H(x)}$. Vgl. Figur 4.8.

$D\hat{H}(y) = \begin{pmatrix} -y^2 \sin y^1 & \cos y^1 \\ y^2 \cos y^1 & \sin y^1 \end{pmatrix}$, somit $f(x) = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}$. Im Bildraum sind (y^2, y^1) als Polarkoordination deutbar. Die Orbits der konjugierten Flüsse sind Stücke von horizontalen Geraden in \mathcal{D}' bzw. konzentrischen Kreisen in \mathcal{D} . \square

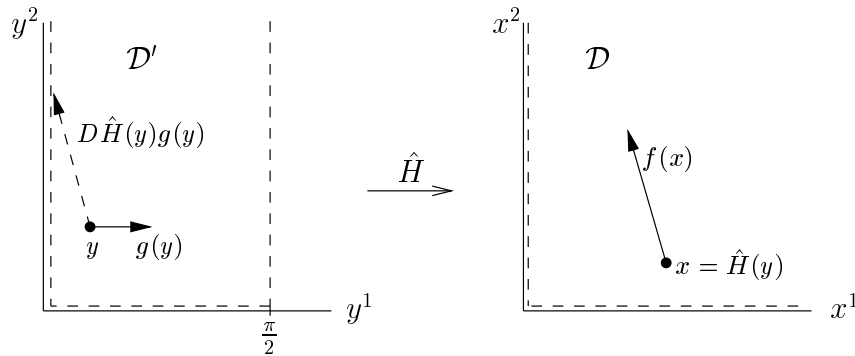


Fig. 4.8

Das im Beispiel beobachtbare Phänomen, daß ein Vektorfeld mittels eines Diffeomorphismus (hier \hat{H}^{-1}) auf ein konstantes Vektorfeld abgebildet wird, gilt in großer Allgemeinheit, nämlich für *jedes* Vektorfeld lokal bei *jedem* nichtsingulären Punkt. D.h., in der Umgebung eines Nicht-Fixpunktes ist jeder Fluß C^1 -konjugiert zum Fluß eines konstanten Vektorfeldes.

Satz 4.27 (über die Existenz einer flow box) Sei $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $f(\xi) \neq 0$. Dann gibt es eine Umgebung $U \subset \mathcal{D}$ des Punktes ξ und einen Diffeomorphismus H von U auf $V \subset \mathbb{R}^n$, so daß $\forall y \in V \quad g(y) := (H_*f)(y) = (1, 0, \dots, 0)^T$.

Beweis O.B.d.A. können wir $f^1(\xi) \neq 0$ annehmen. Wir konstruieren zunächst mit Hilfe der Elemente $\varphi_t(\cdot) = \varphi(t, \cdot)$ des Flusses von f folgende Abbildung

$$\hat{H} : y = (y^1, \dots, y^n) \mapsto x = \hat{H}(y) := \varphi(y^1, (\xi^1, \xi^2 + y^2, \dots, \xi^n + y^n)),$$

deren Domain eine Umgebung von $y = 0$ ist. Es ist $\hat{H}(0) = \xi$. Koordinatenweise ist $x^i = \varphi^i(y^1, \xi^j + \sum_{\alpha=2}^n \delta_\alpha^j y^\alpha)$. Damit berechnet sich

$$D\hat{H}(0) = (f^i(\xi), \delta_\alpha^i)_{i=1, \dots, n; \alpha=2, \dots, n}$$

als nichtsinguläre Matrix. Folglich existiert eine Umgebung $V(0) \subset \text{dom}\hat{H}$, so daß (eingeschränkt auf V)

$$\hat{H} \in \text{Diff}^1(V(0), U(\xi)), \quad \text{mit } U(\xi) = \hat{H}(V(0)) \subset \mathcal{D}.$$

Wir fixieren einen beliebigen Punkt $y_o = (0, y_o^2, \dots, y_o^n) \in V$. Dann gibt es ein (maximales) offenes Intervall I_o mit $0 \in I_o$, so daß $\forall t \in I_o$ $y_t := (t, y_o^2, \dots, y_o^n) \in V$. Mit $x_o := (\xi^1, \xi^2 + y_o^2, \dots, \xi^n + y_o^n)$ ist $\hat{H}(y_t) = \varphi(t, x_o)$. Somit bildet \hat{H} die Geradenstücke $\{y_t | t \in \mathbb{R}\} \cap V(0)$ auf die Orbitstücke $\Phi_{x_o}(I_o) \subset \mathcal{D}$ ab. Vgl. Figur 4.9. Die Geradenstücke mit dieser Parametrisierung sind Stücke von Orbits zum Vektorfeld $g : g(y) = (1, 0, \dots, 0)^T$; ist $\{\psi_t\}$ dessen Fluß, so bedeutet die obige diffeomorphe Zuordnung der Orbits nichts anderes als die C^1 -Konjugiertheit der (auf V bzw. U eingeschränkten) Flüsse $\{\psi_t\}$ und $\{\varphi_t\} : \hat{H} \circ \psi_t = \varphi_t \circ \hat{H}$ auf V . Nach Lemma 4.25 ist $f = \hat{H}_* g$ und, mit $H := \hat{H}^{-1}$, somit $H_* f = g$ auf V . ■

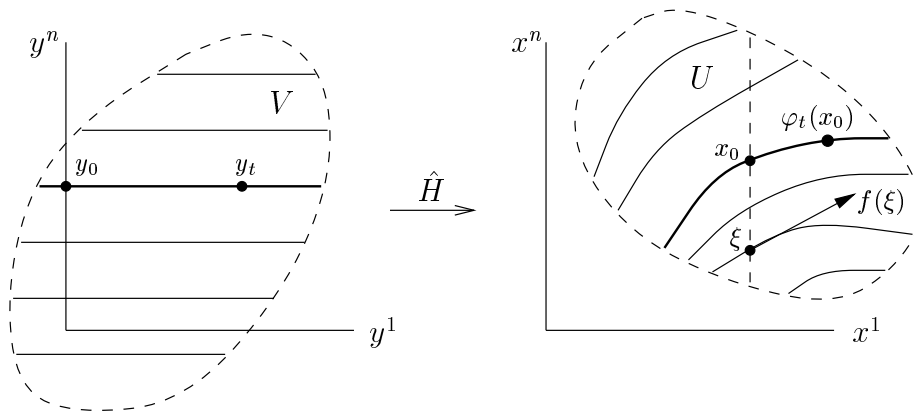


Fig. 4.9

Bemerkung (a) Der Diffeomorphismus H bildet (lokal) die Orbits des Flusses zum Vektorfeld f auf die Flußlinien einer Parallelströmung mit der konstanten Geschwindigkeit $g(y) = (1, 0, \dots, 0)^T$ ab. H wird eine **flow box** genannt. Beispiel 4.26 ist eine konkrete flow box. Deutet man $y = H(x)$ nicht als Abbildung, sondern als Koordinatentransformation, dann gibt Satz 4.27 die Existenz lokaler krummliniger Koordinaten y , deren y^1 -Linien gerade die Orbits von f sind.

(b) Die Existenz einer flow box wurde konstruktiv bewiesen. Die flow box ist ohne Nutzen für die praktische Integration einer DGI, da der Diffeomorphismus H ja gerade mit Hilfe der allgemeinen Lösung der DGI konstruiert wurde. Ihre Bedeutung kommt aus der Strukturaussage: in einer Umgebung eines nichtsingulären Punktes ist das Phasenportrait eines C^1 -Vektorfeldes diffeomorphes Bild einer Schar paralleler Geraden. Die Ausdehnung dieser Umgebung $U = \text{dom}H$ wird offensichtlich wesentlich durch den nächstgelegenen Fixpunkt restringiert: in U kann kein Fixpunkt (eielementiger Orbit!) liegen, da in $V = H(U)$ kein solcher vorhanden ist.

(c) Eine unmittelbare Konsequenz des Satzes ist die folgende. f und f' seien glatte Vektorfelder auf \mathcal{D} bzw. \mathcal{D}' (Gebiete des \mathbb{R}^n), ξ und ξ' seien zugehörige nichtsinguläre Punkte. Dann gibt es Umgebungen $U(\xi)$ und $U'(\xi')$, so daß die auf U bzw. U' eingeschränkten Flüsse von f bzw. f' C^1 -konjugiert sind. □

Aus alledem folgt, daß alle Besonderheiten, in denen sich Vektorfelder bzw. Flüsse lokal wesentlich unterscheiden können, in der Umgebung von *singulären* Punkten zu suchen sind.

Beispiel 4.28 Zwei Vektorfelder auf \mathbb{R}^2 : $f(x) = (-x^2, x^1)^T$, $g(x) = (x^1, x^2)^T$. Die beiden Phasenportraits bestehen aus dem Ursprung $(0, 0)$ als Fixpunkt und dazu konzentrischen Kreisen bzw. von $(0, 0)$ ausgehenden Halbgeraden. Die beiden Flüsse sind lokal bei $x = (0, 0)$ nicht C^0 -konjugiert, denn es gibt keinen Homöomorphismus, der geschlossene Kurven (Kreise) auf nichtgeschlossene Kurven (Geradenstücke) abbildet. \square

Unter weiteren Voraussetzungen über das Vektorfeld in einem singulären Punkt sind weitergehende Aussagen über C^0 -Konjugiertheit möglich.

Definition 4.29 *Es sei $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$ und $f(\xi_o) = 0$. Besitzt jeder Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ der Linearisierung $Df(\xi_o)$ einen von Null verschiedenen Realteil, dann heißt ξ_o ein **hyperbolischer Fixpunkt** des Flusses von f .*

Hyperbolische Fixpunkte sind stets einfach und isoliert (s. Definition 4.17 und Satz 4.18.)

Satz 4.30 (Satz von Hartman und Grobman) ξ_o sei hyperbolischer Fixpunkt des Flusses $\{\varphi_t\}$ zum Vektorfeld $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$. Dann sind die Flüsse von f und des linearisierten Vektorfeldes $x \mapsto Df(\xi_o)x$ lokal bei ξ_o bzw. 0 C^0 -konjugiert.

Beweis Vgl. [1] oder [7]. ■

Der Fluß des linearen Vektorfeldes $x \mapsto Df(\xi_o)x$ wird durch die Übergangsmatrix $\Phi(t, 0) = e^{Df(\xi_o)t} = (D_x \varphi_t)(\xi_o)$ gegeben (vgl. Kapitel 4.3). Dann besagt die Konklusion des Satzes 4.30: es gibt Umgebungen U von ξ_o und V von 0 und einen Homöomorphismus $H : U \rightarrow V$, so daß

$$(H \circ \varphi_t)(x) = e^{Df(\xi_o)t} H(x)$$

für alle die (t, x) , für die beide Seiten definiert sind. In einer Umgebung eines hyperbolischen Fixpunktes gibt somit das Phasenportrait der linearisierten DGL das Phasenportrait der nichtlinearen DGL bis auf Homöomorphie richtig wieder.

Die im Satz gefolgerte C^0 -Konjugiertheit ist im allgemeinen selbst dann nur lokal, wenn ξ_o der einzige Fixpunkt von $\{\varphi_t\}$ ist, das zeigt

Beispiel 4.31 ($n = 2$).

$$f(x, y) := (-y + x(1 - x^2 - y^2), x + y(1 - x^2 - y^2))^T, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Einziges Fixpunkt ist $\xi_o = (0, 0)$. Der Einheitskreis ist periodischer Orbit (denn $(\cos t, \sin t)$ ist Lösung der DGL $(\dot{x}, \dot{y})^T = f(x, y)$). Die Linearisierung bei ξ_o ist

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Df(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte sind $1 + i$, $1 - i$: ξ_o ist hyperbolisch, keine der Lösungen der linearisierten DGL ist periodisch. Die gleiche Argumentation wie in Beispiel 4.28 ergibt, daß die Umgebung $U(\xi_o)$ den Einheitskreis nicht enthalten kann. \square

Das folgende Beispiel zeigt, daß bei nichthyperbolischem Fixpunkt die Linearisierung *im allgemeinen kein* lokal homöomorphes Bild des Phasenportraits liefert (vgl. aber das Beispiel der Pendelschwingungen in Kapitel 4.10).

Beispiel 4.32 ($n = 2$).

$$f(x, y) := (y - x(x^2 + y^2), -x - y(x^2 + y^2))^T, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Einzigster Fixpunkt ist $\xi_o = (0, 0)$. Die Linearisierung bei ξ_o ist

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = Df(0, 0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Eigenwerte sind i und $-i$: ξ_o ist nicht hyperbolisch, außer dem Fixpunkt sind die Orbits der Linearisierung konzentrische Kreise. Der Ansatz $x(t) = r(t) \cos \psi(t)$, $y(t) = r(t) \sin \psi(t)$ überführt die DGl $(\dot{x}, \dot{y})^T = f(x, y)$ in $\dot{r} = -r^3$, $\dot{\psi} = -1$ (vgl. Beispiel 2.14): außer dem Fixpunkt sind die Orbits Spiralen. Somit können die Flüsse von f und $Df(\xi_o)$ auf keiner Umgebung von ξ_o C^o -konjugiert sein. \square

Die Sätze 4.27 und 4.30 geben Teilantworten auf die folgende

Frage Sei $f \in C^k(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, $\xi \in \mathcal{D}$, und $j_\xi^p f$, $p \in \{0, \dots, k-1\}$, das p te Taylorpolynom von f an der Entwicklungsstelle ξ ($j_\xi^0 f(x) = f(\xi)$, $j_\xi^1 f(x) = f(\xi) + \frac{1}{1!} Df(\xi)(x - \xi)$ usw.), so daß $f(x) = j_\xi^p f(x) + o(\|x - \xi\|^{p+1})$; durch welches Taylorpolynom kleinster Ordnung p ist lokal bei ξ der Fluß von f qualitativ (d.h. bis auf C^o -Konjugiertheit) festgelegt?

Antworten:

1. Falls $f(\xi) \neq 0$: $p = 0$ (Flow box).
2. Falls $f(\xi) = 0$ und ξ hyperbolisch: $p = 1$ (Hartman-Grobman).

$f(\xi) = 0$ und ξ nichthyperbolisch erfordert tiefere Untersuchungen.

Abschließend folgen noch zwei Sätze über die Konjugiertheit linearer Vektorfelder.

Satz 4.33 Seien $f : x \mapsto Ax$ und $g : x \mapsto Bx$ zwei lineare Vektorfelder auf \mathbb{R}^n .

(i) Die Flüsse von f und g sind genau dann lokal bei $x = 0$ C^1 -konjugiert, wenn sie linear konjugiert sind, d.h., wenn der konjugierende Diffeomorphismus ein linearer Isomorphismus des \mathbb{R}^n ist.

(ii) Lineare Konjugiertheit liegt genau dann vor, wenn A und B ähnliche Matrizen sind.

Beweis (i) Mit $H \in \text{Diff}^1(U(0), V(0))$ gelte $(H \circ e^{At})(x) = (e^{Bt} \circ H)(x)$. Ableitung nach x an der Stelle $x = 0$ ergibt $DH(0)e^{At} = e^{Bt}DH(0)$, d.h., mit $C := DH(0)$ konjugiert $x \mapsto Cx$ die Flüsse.

(ii) $Ce^{At} = e^{Bt}C \Leftrightarrow e^{At} = C^{-1}e^{Bt}C = e^{C^{-1}BCt} \Leftrightarrow A = C^{-1}BC$, vgl. Lemma 3.26. Der Rest ist lineare Algebra. \blacksquare

Satz 4.34 Seien $f : x \mapsto Ax$ und $g : x \mapsto Bx$ zwei lineare Vektorfelder auf \mathbb{R}^n , und $\xi_o = 0$ sei hyperbolischer Fixpunkt für beide Flüsse. Die Flüsse von f und g sind genau dann global C^o -konjugiert, wenn die Anzahl der Eigenwerte mit negativem Realteil für beide Matrizen A und B dieselbe ist.

Beweis [2] \blacksquare

4.8 Das Phasenportrait der ebenen linearen DGL

Autonome lineare (homogene) DGLn sind nach Kapitel 3.4 mittels linearer Algebra explizit lösbar, bestimmendes Element für die Lösungen ist das Spektrum der Koeffizientenmatrix. Die niedrige Dimension $n = 2$ ermöglicht wegen der wenigen Eigenwertkonfigurationen einen Überblick über alle möglichen Phasenportraits (in \mathbb{R}^2) und eine erschöpfende Klassifikation der Fixpunkte.

Mit $x \in \mathbb{R}^2$ untersuchen wir $\dot{x} = Ax$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Die Eigenwertgleichung ist $0 = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - s\lambda + \Delta$ mit $s = a + d = \text{tr}A$, $\Delta = \det A$, demgemäß sind die Eigenwerte $\lambda = \frac{1}{2}s \pm \sqrt{\frac{1}{4}s^2 - \Delta}$.

Bemerkung In der folgenden Klassifikation werden Koeffizientenmatrizen A verwendet, die *typisch* für die jeweilige Eigenwertkonstellation sind. Jede DGL $\dot{y} = By$, $y \in \mathbb{R}^2$, mit der gleichen Eigenwertkonstellation läßt sich durch eine reguläre Transformation $y = Qx$ in die Form $\dot{x} = Ax$ überführen. Demgemäß folgen die Phasenportraits der allgemeinen Fälle durch eine lineare Transformation des \mathbb{R}^2 aus den speziellen Portraits in den folgenden Figuren. Vergleiche dazu im Kapitel 4.7. Die durch die folgende Einteilung entstehenden Klassen sind verschieden von den Äquivalenzklassen sowohl der C^0 - als auch der C^1 -Konjugation (vgl. Definition 4.24 und die daran anschließende Bemerkung).

Die im folgenden verwendeten Attribute *stabil* und *instabil* sind ein Vorgriff auf Kapitel 4.9. \square

(1) $\lambda = 0$ ist kein Eigenwert von A , d.h., $\det A = \Delta \neq 0$.

Aus $Ax = 0$ folgt: $\bar{x} = 0$ ist einziger Fixpunkt, er ist nichtentartet.

(1.1) Sämtliche Eigenwerte sind reell: $s^2 \geq 4\Delta$.

(1.1.1) Zwei verschiedene, einfache Eigenwerte, $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$: $s^2 > 4\Delta$.

Standardtyp der Matrix: $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; Lösung der DGL: $\varphi(t, \xi) = (\xi^1 e^{\lambda_1 t}, \xi^2 e^{\lambda_2 t})^T$.

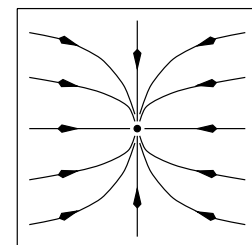
(1.1.1.1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$: $\lambda_1 = \gamma \lambda_2$, $\gamma > 1$: $s < 0$, $\Delta > 0$

$\xi^1 = 0$: Orbit ist positive oder negative x^2 -Halbachse, zum Ursprung hin orientiert.

$\xi^2 = 0$: Orbit ist positive oder negative x^1 -Halbachse, zum Ursprung hin orientiert.

$\xi^2 \neq 0$: $\varphi^2(\cdot, \xi)$ ist vorzeichenfest! Elimination von t ergibt die parameterfreie Darstellung des Orbits: $x^1 = \xi^1(x^2/\xi^2)^\gamma$, $\text{sgn}x^2 = \text{sgn}\xi^2$.

Orbit ist nach links oder rechts geöffnete Halbparabel, Orientierung paßt sich stetig an die der speziellen Orbits an.



stabiler uneigentlicher Knoten

(1.1.1.2) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$: $\lambda_2 = \gamma \lambda_1$, $\gamma > 1$: $s > 0$, $\Delta > 0$.

Analog zum Fall (1.1.1.1) mit vertauschten x^1, x^2 und geänderter Orientierung: instabiler uneigentlicher Knoten.

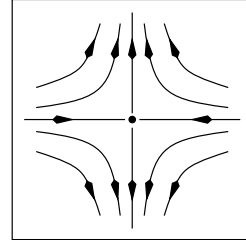
(1.1.1.3) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$: $\lambda_1 = -\gamma\lambda_2$, $\gamma > 0$. : $\Delta < 0$.

$\xi^1 = 0$: Orbit ist positive oder negative x^2 -Halbachse, vom Ursprung weg orientiert.

$\xi^2 = 0$: Orbit ist positive oder negative x^1 -Halbachse, zum Ursprung hin orientiert.

$\xi^1 \xi^2 \neq 0$: $\varphi^i(\cdot, \xi)$, $i = 1, 2$, sind vorzeichenfest! Parameterfreie Darstellung des Orbits:

$$x^1/\xi^1 = (x^2/\xi^2)^{-\gamma} : \text{Hyperbelast.}$$



Sattel

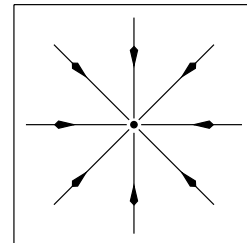
(1.1.2) Ein Eigenwert $\lambda \neq 0$ der algebraischen Vielfachheit 2: $s^2 = 4\Delta$.

(1.1.2.1) λ hat die geometrische Vielfachheit 2.

$$\text{Standardtyp } A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

$$\text{Lösung der DGl: } \varphi(t, \xi) = (\xi^1, \xi^2)^T e^{\lambda t}.$$

Orbit ist Halbgerade, Orientierung zum Ursprung hin ($\lambda < 0$, stabil) bzw. vom Ursprung weg ($\lambda > 0$, instabil).



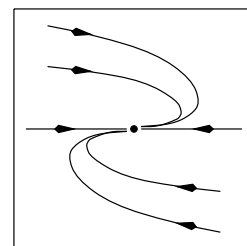
stabiler
eigentlicher Knoten

(1.1.2.2) λ hat die geometrische Vielfachheit 1.

$$\text{Standardtyp } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

$$\text{Lösung der DGl: } \varphi(t, \xi) = (\xi^1 + t\xi^2, \xi^2)^T e^{\lambda t}.$$

Orientierung der Orbits zum Ursprung hin ($\lambda < 0$, stabil) bzw. vom Ursprung weg ($\lambda > 0$, instabil).



stabiler
eigentlicher Knoten

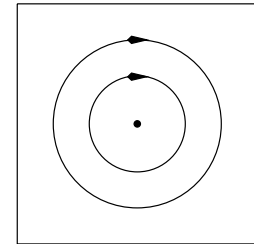
(1.2) Nichtreelle Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \rho \pm i\sigma$, $\sigma \neq 0$: $s^2 < 4\Delta$.

$$\text{Standardtyp } A = \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ -\sigma & \rho \end{pmatrix}; \text{ Lösung der DGl: } \varphi(t, \xi) = e^{\rho t} \begin{pmatrix} \xi^1 \cos \sigma t + \xi^2 \sin \sigma t \\ -\xi^1 \sin \sigma t + \xi^2 \cos \sigma t \end{pmatrix}.$$

Längs des Orbits durch ξ gilt $\|x(t)\|^2 = \|\varphi(t, \xi)\|^2 = e^{2\rho t} \|\xi\|^2$.

(1.2.1) $\varrho = 0$:

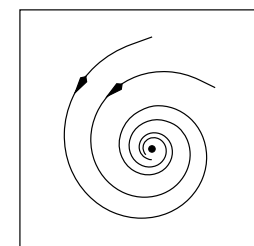
Die Orbits sind Kreise; der Ursprung wird im Uhrzeigersinn/im Gegenzeigersinn umlaufen, falls $\sigma > 0/\sigma < 0$.



(stabiler) Wirbel

(1.2.2) $\varrho \neq 0$:

Die Orbits sind Spiralen der Ursprung wird im Uhrzeigersinn/im Gegenzeigersinn umlaufen, falls $\sigma > 0/\sigma < 0$ ($\varrho > 0$: instabil, $\varrho < 0$: stabil).



stabiler Strudel

(2) 0 ist Eigenwert von A : $\det A = \Delta = 0$.

(2.1) 0 ist einfacher Eigenwert von A : $s \neq 0$.

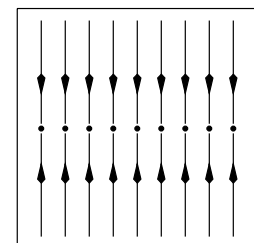
Aus $Ax = 0$ folgen Fixpunkte, die eine ganze Gerade ausfüllen; alle diese Fixpunkte sind entartet - insbesondere der Fixpunkt $x = 0$.

Standardtyp der Matrix: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$

Lösung der DGI: $\varphi(t, \xi) = (\xi^1, \xi^2 e^{\lambda t})$.

$\xi^2 = 0$: Fixpunkt $(\xi^1, 0)$.

$\xi^2 \neq 0$: Orbit ist vertikale Halbgerade, Orientierung zur x^1 -Achse hin ($\lambda < 0$) oder von dieser weg ($\lambda > 0$),

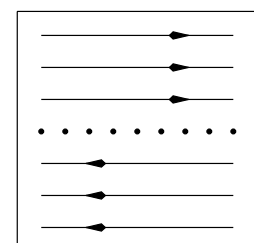


(2.2) 0 ist (algebraisch) zweifacher Eigenwert von A : $s = 0$.

(2.2.1) 0 ist geometrisch einfacher Eigenwert.

Standardtyp der Matrix: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

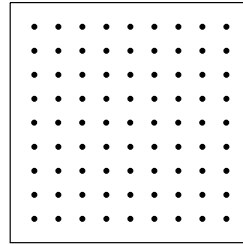
Lösung der DGI: $\varphi(t, \xi) = (\xi^1 + t\xi^2, \xi^2)$.



(2.2.2) 0 ist geometrisch zweifacher Eigenwert.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jeder Punkt des \mathbb{R}^2 ist Fixpunkt.



Die durchgeführte Klassifikation der ebenen Phasenportraits läßt sich in dem auf Seite 81 folgenden Diagramm zusammenfassen. Jede ebene lineare DGl ist durch die vier Zahlen a, b, c, d (Parameter) charakterisiert. Durch Berechnung von $s = \text{tr}A$ und $\Delta = \det A$ kann daraus für jede ebene DGl $\dot{x} = Ax$ der Typ des Phasenportraits entnommen werden (nur zur Unterscheidung der Typen auf der Parabel $s^2 - 4\Delta = 0$ sind zusätzliche Überlegungen zur Dimension des Eigenraumes erforderlich).

Die Struktur der im Diagramm fett eingerahmten Phasenportraits und damit der Typ des Fixpunktes bleibt unter einer beliebigen, hinreichend kleinen Änderung der Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, d.h., bei einer *Störung* des linearen Vektorfeldes $x \mapsto Ax$, erhalten. In den restlichen Fällen genügt eine beliebig kleine, passend gewählte Änderung von A zum Wechsel des Typs (z.B. eigentlicher Knoten \rightarrow Strudel, falls $s^2 - 4\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc)$ von Null zu einem positiven Wert übergeht).

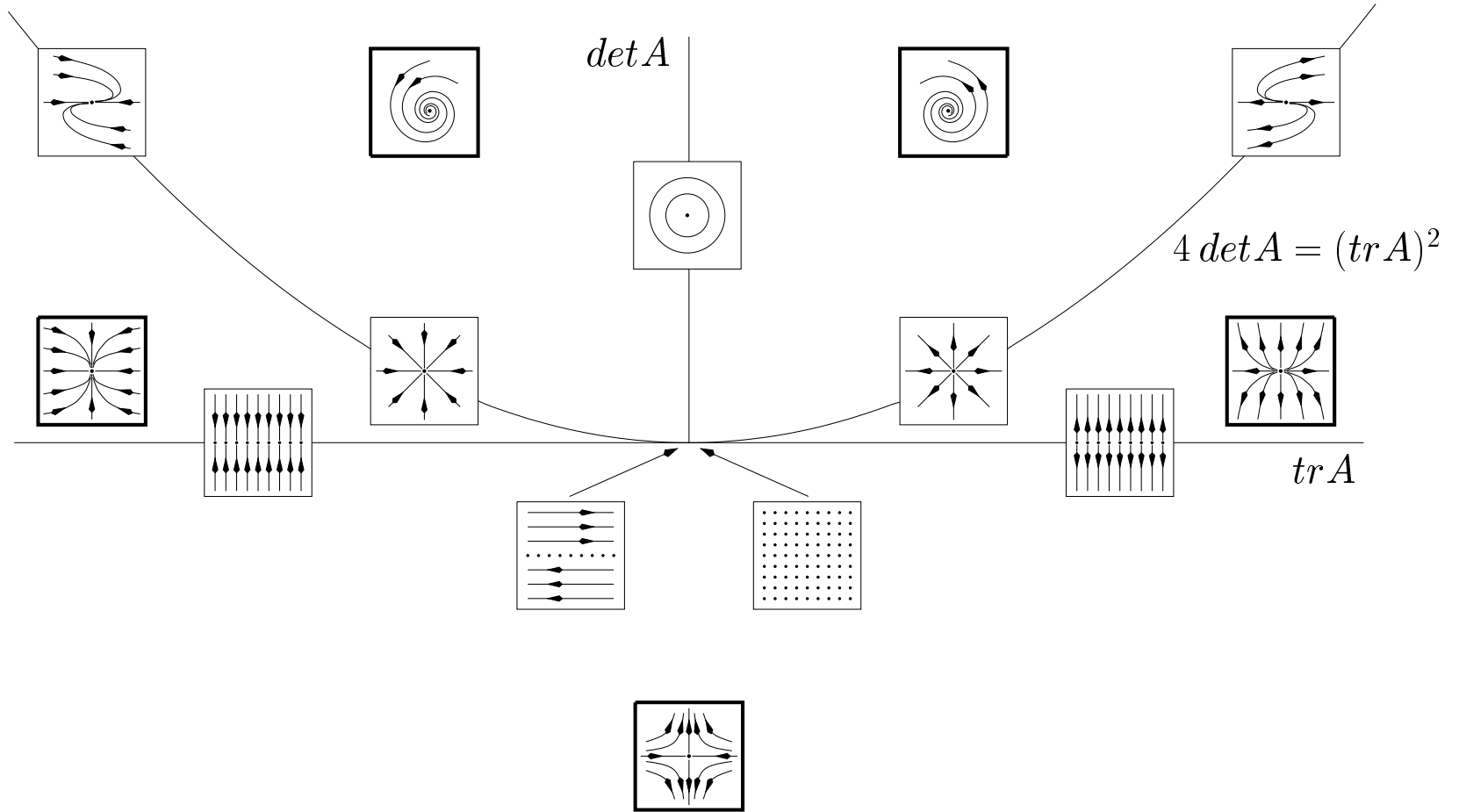


Diagramm zur Beschreibung des Fixpunkttyps für $\dot{x} = Ax$

Bemerkung Die Klassen von 2-dimensionalen linearen Vektorfeldern, die durch die vorgenommene Einteilung entstehen (jede Klasse ist durch ein Quadrat im Diagramm auf Seite 81 repräsentiert), *umfassen* die Äquivalenzklassen der C^1 -Konjugation: Die C^1 -konjugierten linearen Vektorfeldern zugeordneten Koeffizientenmatrizen sind nach Satz 4.33 ähnlich - während hier lediglich Realität/Nichtrealität von Eigenwerten und im Fall reeller Eigenwerte Vorzeichen und Vielfachheiten als Unterscheidungsmerkmale dienen. Diese Klassen wiederum sind in entsprechenden Klassen der C^o -Konjugiertheit enthalten - denn für C^o -Konjugiertheit linearer Vektorfelder mit hyperbolischen Fixpunkten ist nur die Anzahl der Eigenwerte, deren Realteile gleiches Vorzeichen haben, entscheidend, vgl. Satz 4.34. So sind alle Vektorfelder zu den Phasenportraits im offenen 1. Quadranten im Diagramm auf Seite 81 C^o -konjugiert (analog im 2. Quadranten). Trotzdem ist es sowohl aus Sicht der Anwendungen als auch unter theoretischem Gesichtspunkt für viele Betrachtungen sinnvoll, Knoten und Strudel - oder allgemeiner Fixpunkte mit reellen und nichtreellen Eigenwerten zu unterscheiden. \square

Beispiel 4.35 (C^o -Konjugiertheit der Phasenportraits vom Typ instabiler Knoten und instabiler Strudel)

Wir betrachten die folgenden ebenen linearen DGLn.

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} \varrho & \sigma \\ -\sigma & \varrho \end{pmatrix}, \quad \varrho > 0, \quad \sigma \neq 0,$$

$$\dot{y} = By, \quad B = \begin{pmatrix} \varkappa & 0 \\ 0 & \varkappa \end{pmatrix}, \quad \varkappa > 0.$$

(Typen (1.2.2) und (1.1.2.1) der vorangegangenen Klassifizierung.) Die Matrizen A, B haben beziehentlich die Eigenwerte $\varrho \pm i\sigma$ und \varkappa (zweifach). Die Flüsse der Vektorfelder sind φ_t bzw. ψ_t mit

$$\varphi_t(x) = e^{qt} \begin{pmatrix} \cos \sigma t & \sin \sigma t \\ -\sin \sigma t & \cos \sigma t \end{pmatrix} x \quad \text{und} \quad \psi_t(y) = e^{\varkappa t} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Wir betrachten nun die Abbildung

$$H: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$H(y) := \begin{cases} \|y\|^{\left(\frac{\varrho}{\varkappa}-1\right)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sigma}{\varkappa} \ln \|y\|\right) & \sin\left(\frac{\sigma}{\varkappa} \ln \|y\|\right) \\ -\sin\left(\frac{\sigma}{\varkappa} \ln \|y\|\right) & \cos\left(\frac{\sigma}{\varkappa} \ln \|y\|\right) \end{pmatrix} y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0. \end{cases}$$

Dabei sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm des \mathbb{R}^2 .

Es ist $\|H(y)\| = \|y\|^{\varrho/\varkappa}$, so daß wegen $\varrho/\varkappa > 0$ die Abbildung stetig ist.

Nun ist leicht zu sehen, daß H invertierbar ist und

$$H^{-1}(x) = \begin{cases} \|x\|^{\left(\frac{\varkappa}{\varrho}-1\right)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\sigma}{\varrho} \ln \|x\|\right) & -\sin\left(\frac{\sigma}{\varrho} \ln \|x\|\right) \\ \sin\left(\frac{\sigma}{\varrho} \ln \|x\|\right) & \cos\left(\frac{\sigma}{\varrho} \ln \|x\|\right) \end{pmatrix} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Wegen $\|H^{-1}(x)\| = \|x\|^{\frac{\varkappa}{\varrho}}$, $\frac{\varkappa}{\varrho} > 0$, ist auch H^{-1} stetig, H also ein Homöomorphismus.

Schließlich ergibt sich durch einfache Rechnung $\forall y \quad (H \circ \psi_t)(y) = (\varphi_t \circ H)(y)$.

$\{\varphi_t\}$ und $\{\psi_t\}$ sind also global C^o -konjugiert. \square

4.9 Ljapunov-Stabilität

Nehmen wir an, die Lösung $\varphi(\cdot, \xi_o)$ der DGl $\dot{x} = f(x)$ beschreibt einen Prozeß in einem technischen Gerät, der für $t > 0$ der gewünschten Funktion des Gerätes entspricht. Vorausgesetzt, daß $f(\cdot)$ ein hinreichend genaues mathematisches Modell des Gerätes darstellt, wird also die exakte Funktion des Gerätes dadurch gewährleistet, daß zur Zeit $t = 0$ die Parameterwerte ξ_o (Anfangswerte von Phasenkoordinaten und physikalische Parameter, vgl. Abschnitt 4.4) *genau* eingestellt sind. Das ist zufolge der Meßungenauigkeiten praktisch niemals möglich. Also läuft fatalerweise ein Prozeß $t \mapsto \varphi(t, \xi)$ mit *irgendeinem* zu ξ_o benachbarten ξ ab. Diese Tatsache ist akzeptabel, solange für *alle* $t > 0$ die Prozeßphasen $\varphi(t, \xi)$ und $\varphi(t, \xi_o)$ hinreichend benachbart sind (so daß die Funktion des Gerätes praktisch nicht beeinträchtigt wird) oder mit wachsendem t sich sogar annähern. Eine solche Eigenschaft der Lösungen $\varphi(\cdot, \xi)$, $\|\xi - \xi_o\| < r$, ist mehr als die Stetigkeit von $\varphi(\cdot, \cdot)$! Denn aus der Stetigkeit folgt nur

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall T > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon, T) > 0 \quad \forall (t, \xi) \in [0, T] \times K(\xi_o, \delta) \quad \|\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \xi_o)\| < \varepsilon,$$

d.h., daß die Werte der Lösungen $\varphi(\cdot, \xi)$ und $\varphi(\cdot, \xi_o)$ auf dem beschränkten Zeitintervall $[0, T]$ *beliebig* benachbart sind, sobald nur die Anfangswerte *hinreichend* wenig voneinander abweichen - trotzdem können für $t > T$ die Funktionswerte zeitweilig oder für immer einen endlichen Abstand überschreiten (um danach beliebig weit auseinanderzugehen oder sich wieder beliebig anzunähern). Das zeigt schon das einfache

Beispiel 4.36 ($n = 1$).

$\dot{x} = \alpha x$, $\varphi(t, \xi) = \xi \exp(\alpha t)$. Ist $\alpha > 0$, dann wächst der Abstand $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t, \xi_o)| = |\xi - \xi_o| \exp(\alpha t)$ mit t unbeschränkt, ist aber kleiner als ε für alle $t \in [0, T]$ falls $|\xi - \xi_o| < \varepsilon e^{-\alpha T} =: \delta$. \square

Wir beschränken die folgenden Betrachtungen auf konstante Lösungen (Gleichgewichtslagen) und klassifizieren ihr Verhalten bei einer Störung des Anfangswertes durch die nächste Definition. Dabei ist wieder $\varphi(\cdot, \cdot)$ die allgemeine Lösung der DGl $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^n)$, $I(\xi)$ ist das Maximalintervall der speziellen Lösung $\varphi(\cdot, \xi)$, und es sei $\varphi(t, \xi_o) = \xi_o$, $t \in \mathbb{R}$ (d.h. $f(\xi_o) = 0$).

Definition 4.37 Die Gleichgewichtslage ξ_o heißt **stabil** (im Sinne von Ljapunov), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \xi \in K(\xi_o, \delta) : I(\xi) \supset \mathbb{R}^+ \wedge \forall t > 0 \|\varphi(t, \xi) - \xi_o\| < \varepsilon; \tag{4.25}$$

attraktiv, falls

$$\exists \delta > 0 \quad \forall \xi \in K(\xi_o, \delta) : I(\xi) \supset \mathbb{R}^+ \wedge \exists \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(t, \xi) - \xi_o\| = 0; \tag{4.26}$$

asymptotisch stabil, falls sie stabil und attraktiv ist; **instabil**, falls sie nicht stabil ist.

Bemerkung

- a) Die Forderung nach oben unbeschränkter Intervalle $I(\xi)$ für alle zu ξ_o δ -benachbarten Anfangspunkte ξ ist notwendig. Denn wäre etwa $\|\xi_1 - \xi_o\| < \delta$ und $I(\xi_1) = (\alpha(\xi_1), \beta(\xi_1))$ mit $\beta(\xi_1) < +\infty$, dann würde $\varphi(t, \xi_1)$ mit $t \rightarrow \beta(\xi_1) - 0$ dem Rand $\partial \mathcal{D}$ beliebig nahekommen oder in der Norm beliebig wachsen (Satz 2.12), während ξ_o einen positiven Abstand von $\partial \mathcal{D}$ und eine endliche Norm besitzt; $\varphi(t, \xi_1)$ kann dann nicht ε -benachbart zu ξ_o sein.

- b) Analoge Definitionen lassen sich für Gleichgewichtslagen heteronomer Dgln, $f(t, \xi_o) = 0$, geben.
- c) Eine attraktive Gleichgewichtslage ist isoliert.
- d) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $\xi_o = 0$ angenommen werden. □

Stabilität bedeutet, daß *jeder* positive Halborbit $\Phi_\xi(\mathbb{R}^+)$ ganz in der ε -Umgebung von ξ_o liegt, wenn nur sein Anfangspunkt ξ hinreichend nahe bei ξ_o liegt. Attraktivität von ξ_o heißt, daß alle Phasenpunkte aus einer δ -Umgebung durch ξ_o angezogen und für $t \rightarrow \infty$ längs ihrer Orbits „eingesaugt“ werden. Geschieht dies ohne eine Exkursion ins Äußere einer Kugel $K(\xi_o, \varepsilon_o)$ mit festem Radius $\varepsilon_o > 0$, dann liegt asymptotische Stabilität vor. Die Menge $\{\xi \in \mathcal{D} \mid \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, \xi) = \xi_o\}$ aller Phasenpunkte, die von ξ_o angezogen werden, heißt **Einzugsgebiet** oder **Bassin** des Attraktors ξ_o . Ist ξ_o stabil mit ganz \mathcal{D} als Bassin, dann heißt ξ_o **global asymptotisch stabil**.

Bemerkung Wie das folgende Beispiel zeigt, gibt es Fixpunkte, die zwar attraktiv, aber nicht stabil sind.

Es sei in \mathbb{R}^2

$$f(x, y) := \left(\frac{x^2(y-x) + y^5}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)}, \frac{y^2(y-2x)}{(x^2 + y^2)(1 + (x^2 + y^2)^2)} \right)^T, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

und $f(0, 0) := (0, 0)^T$.

f ist lokal Lipschitz-stetig, $(x, y) = (0, 0)$ ist die einzige Gleichgewichtslage der Differentialgleichung $(\dot{x}, \dot{y})^T = f(x, y)$. Das Vektorfeld (und damit das Phasenportrait) ist symmetrisch zum Ursprung.

Das in Figur 4.10 skizzierte Phasenportrait zeigt

- (i) Der Fixpunkt ist attraktiv.
- (ii) Es gibt Punkte $(x_o, y_o) \neq (0, 0)$ mit den Grenzmengen $\alpha(x_o, y_o) = \omega(x_o, y_o) = \{(0, 0)\}$ - vgl. Definition 4.20. Die Phasenkurve durch einen solchen Punkt heißt **Homokline**. Damit ist klar, daß $(0, 0)$ nicht stabil ist - wähle ε aus Definition 4.37 kleiner als $\|(x_o, y_o)\|$. Für Details verweisen wir auf [3]. □

Für eine lineare DGL $\dot{x} = Ax$ ist $\xi_o = 0$ stets Gleichgewichtslage. Es ist $\varphi(t, \xi) = \Phi(t, 0)\xi$, und die analytische Struktur der Elemente der Übergangsmatrix $\Phi(\cdot, 0)$ ist bekannt (Satz 3.20).

Daraus folgt sofort

Satz 4.38 Die Gleichgewichtslage $\xi_o = 0$ für die DGL $\dot{x} = Ax$ ist stabil genau dann, wenn alle Eigenwerte von A einen nichtpositiven Realteil haben und alle Eigenwerte mit Realteil Null halbeinfach sind; $\xi_o = 0$ ist genau dann asymptotisch stabil, wenn alle Eigenwerte von A negativen Realteil besitzen. ■

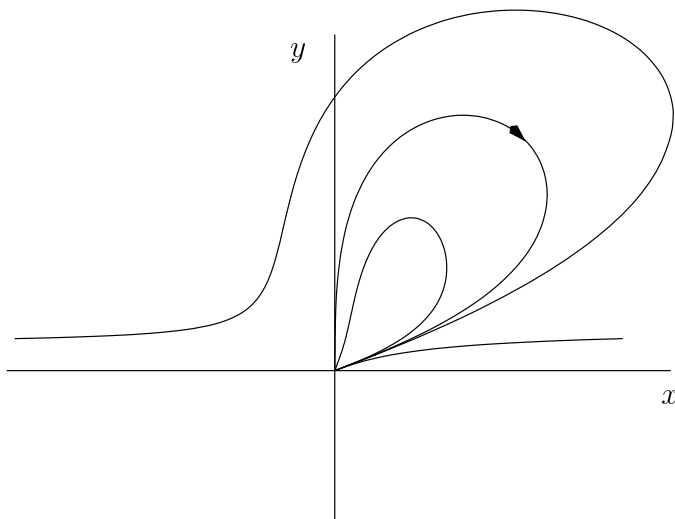


Fig.4.10

Für $n = 2$ vergleiche man nochmals mit den in Abschnitt 4.8 durchgearbeiteten Fällen.

Im Fall einer nichtlinearen DGL $\dot{x} = f(x)$ mit $f(\xi_o) = 0$ sind die Lösungen $\varphi(\cdot, \xi)$, $\|\xi - \xi_o\| < \delta$, im allgemeinen nicht bekannt, Stabilitätseigenschaften von ξ_o lassen sich nicht unmittelbar mit Hilfe der Definition 4.37 erkunden. Es werden Kriterien benötigt, die diese Erkundung ohne Kenntnis von Lösungen nur mittels des Vektorfeldes $f(\cdot)$ ermöglichen.

4.9.1 Theorie der ersten Näherung

Über die Stabilität einer Gleichgewichtslage ξ_o einer nichtlinearen DGL $\dot{x} = f(x)$, $f(\xi_o) = 0$, lassen sich dank des Satzes von Hartman-Grobman einige Aussagen mit Hilfe der Linearisierung von f bei ξ_o gewinnen.

Satz 4.39 ξ_o sei eine Gleichgewichtslage der DGL $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathcal{D}$. Es sei $A := D_x f(\xi_o)$.

- (i) Haben alle Eigenwerte von A negativen Realteil, dann ist ξ_o asymptotisch stabil.
- (ii) Hat (mindestens) ein Eigenwert von A positiven Realteil, dann ist ξ_o instabil.

Beweis (i) Wegen der nichtverschwindenden Realteile der Eigenwerte ist ξ_o hyperbolischer Fixpunkt von $\dot{x} = f(x)$, die Aussage folgt mit dem Satz von Hartman-Grobman aus Satz 4.38.

(ii) Die Aussage folgt analog, falls keiner der Eigenwerte rein imaginär ist. Den Beweis im allgemeinen Fall (wenigstens ein Eigenwert mit Realteil Null) verschieben wir in das Kapitel über stabile und instabile Mannigfaltigkeiten. ■

Bemerkung Die Linearisierung der DGL $\dot{x} = f(x)$ in der Gleichgewichtslage ξ_o (längs der konstanten Lösung $\varphi(\cdot, \xi_o)$) beschreibt das Vektorfeld f bis auf Terme höherer Ordnung,

$$f(x) = D_x f(\xi_o)(x - \xi_o) + g(x), \quad g(x) = o(\|x - \xi_o\|)_{x \rightarrow \xi_o}.$$

Unter den im obigen Satz postulierten Eigenschaften (des Spektrums) der Matrix $D_x f(\xi_o)$ genügt die Linearisierung der DGL zur exakten Beschreibung der Stabilitätseigenschaften von ξ_o . Im verbleibenden Fall - kein Eigenwert mit positivem Realteil und mindestens einer rein imaginär - übertragen sich Stabilitätsaussagen *nicht* von der Linearisierung auf die nichtlineare DGL (vgl. folgende Beispiele), es sind höhere Glieder der Taylorapproximation von f (welche?) erforderlich. \square

Beispiel 4.40 ($n = 2$).

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = -\sin x^1 - k_1 x^2 - k_3 (x^2)^3, \quad (k_1, k_3 \in \mathbb{R}).$$

(Diese DGL läßt sich als Bewegungsgleichung eines Pendels mit Dämpfung auffassen, x^1 : Auslenkungswinkel, x^2 : Winkelgeschwindigkeit.)

Vektorfeld und Linearisierung:

$$f(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} x^2 \\ -\sin x^1 - k_1 x^2 - k_3 (x^2)^3 \end{pmatrix}, \quad D_x f(x^1, x^2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x^1 & -k_1 - 3k_3 (x^2)^2 \end{pmatrix}.$$

Wir untersuchen zwei Fixpunkte.

Gleichgewichtslage $(0, 0)$:

$$\text{Linearisierung: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k_1 \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte: } \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}k_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}k_1^2 - 1}$$

Stabilität nach Satz 4.39 : $k_1 < 0$: instabil

$k_1 = 0$: keine Aussage

$k_1 > 0$: asymptotisch stabil.

Gleichgewichtslage $(\pi, 0)$:

$$\text{Linearisierung: } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k_1 \end{pmatrix}, \quad \text{Eigenwerte: } \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}k_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4}k_1^2 + 1}$$

Stabilität nach Satz 4.39 : für alle $k_1 \in \mathbb{R}$ instabil.

Die gewonnenen Stabilitätsaussagen gelten unabhängig von k_3 .

Im Fall $k_1 = 0$ wird die Stabilität von $(0, 0)$ durch k_3 regiert. Die folgenden Figuren zeigen diese Sachverhalte anhand zweier (numerisch gewonnener) Phasenportraits: $k_3 = 0.1$ - die Gleichgewichtslage $(0, 0)$ ist asymptotisch stabil - vgl. Figur 4.11; $k_3 = 0$ - die Gleichgewichtslage ist stabil aber nicht asymptotisch stabil - vgl. Figur 4.12. \square

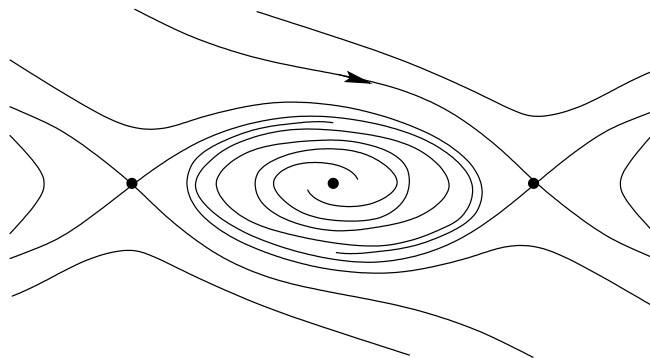


Fig. 4.11

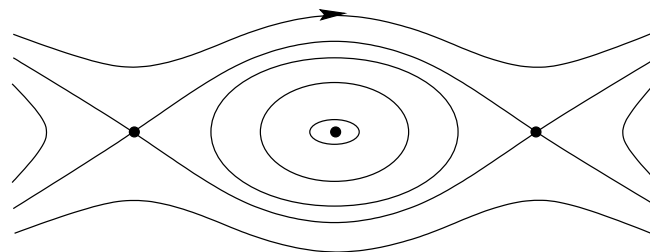


Fig. 4.12

4.9.2 Ljapunovs direkte Methode

Mit der in diesem Abschnitt beschriebenen Methode werden die in der Nähe des Fixpunktes ξ_0 beginnenden positiven Halbbits nicht durch Vergleich mit den Orbits des linearisierten Vektorfeldes untersucht, sondern durch Betrachtung des Wachstumsverhaltens bestimmter (passend zu findender) reellwertiger Funktionen längs der Orbits des gegebenen Vektorfeldes.

Sei $V \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ gegeben. Längs der Lösung $\varphi(\cdot, \xi)$ der DGl $\dot{x} = f(x)$ setzen wir $V(\varphi(t, \xi)) =: v(t, \xi)$. Dann ist

$$D_t v(t, \xi) = D_x V(\varphi(t, \xi)) \dot{\varphi}(t, \xi),$$

und

$$D_t v(0, \xi) = D_x V(\xi) f(\xi) = \sum_{i=1}^n f^i(\xi) D_{x^i} V(\xi)$$

ist gerade die *Richtungsableitung* der Funktion V im Punkt ξ in Richtung des Vektors $f(\xi)$. Die dadurch auf \mathcal{D} gegebene Funktion

$$L_f V := D_x V \cdot f = \sum_{i=1}^n f^i D_{x^i} V \quad (4.27)$$

heißt die **Lie-Ableitung von V längs des Vektorfeldes f** .

Es ist

$$D_t v(t, \xi) = L_f V(\varphi(t, \xi)). \quad (4.28)$$

Hat V im Punkt ξ_o ein Minimum und ist in jedem Punkt $\xi \neq \xi_o$ die Lie-Ableitung $L_f V$ negativ, dann heißt das, daß V längs jeder Lösung der DGI eine fallende Funktion ist, und das läßt erwarten, daß jeder Orbit in ξ_o mündet, ξ_o somit attraktiv ist. Zur Formulierung der Sachverhalte werden einige Begriffe benötigt.

Definition 4.41 *Es sei G ein Gebiet des \mathbb{R}^n , $0 \in G$. Eine Funktion $V \in C^0(G, \mathbb{R})$ heißt (lokal bei 0)*

positiv semidefinit, falls $V(0) = 0 \wedge \exists \delta > 0 \forall x \in K(0, \delta) V(x) \geq 0$;

positiv definit, falls $V(0) = 0 \wedge \exists \delta > 0 \forall x \in K(0, \delta) \setminus \{0\} V(x) > 0$;

negativ (semi-)definit, falls $-V$ positiv (semi-)definit;

indefinit, falls $\forall \delta > 0 \exists x, x' \in K(0, \delta) \setminus \{0\} : V(x) > 0, V(x') < 0$.

V heißt **positiv definit auf G** , falls $V(0) = 0 \wedge \forall x \in G \setminus \{0\} V(x) > 0$.

Beispiel 4.42 ($n = 3$)

$$\begin{aligned} V(x, y, z) &:= x^2 + y^2 + z^2 && : V \text{ positiv definit auf } G = \mathbb{R}^3. \\ V(x, y, z) &:= \sin(x^2 + y^2 + z^2) && : V \text{ positiv definit auf } G = K(0, \sqrt{\pi}). \\ V(x, y, z) &:= x^2 y^2 + z^4 && : V \text{ positiv semidefinit auf } G = \mathbb{R}^3. \\ V(x, y, z) &:= xyz && : V \text{ indefinit} \end{aligned}$$

□

Definition 4.43 *Sei I ein Intervall der Form $[0, r_1]$ oder $[0, +\infty)$. Eine **Funktion** $\varkappa \in C^0(I, \mathbb{R})$ heißt **von der Klasse \mathcal{K}** , falls $\varkappa(0) = 0$ ist und \varkappa streng monoton wächst.*

Bemerkung

(a) Im folgenden treten Funktionen der Klasse \mathcal{K} nur als untere bzw. obere Schranken in Ungleichungen auf und können somit durch *glatte* Funktionen der Klasse \mathcal{K} minorisiert bzw. majorisiert werden. O.B.d.A. darf also stets $\varkappa \in C^1(I, \mathbb{R})$ angenommen werden.

(b) Mit \varkappa gehört auch die Inverse, \varkappa^{-1} , zur Klasse \mathcal{K} . Mit \varkappa_1 und \varkappa_2 gehört auch $\varkappa_1^{-1} \circ \varkappa_2$ zur Klasse \mathcal{K} .

□

Lemma 4.44 *$V \in C^0(G, \mathbb{R})$ ist positiv definit gdw. es zwei Funktionen \varkappa_1, \varkappa_2 der Klasse \mathcal{K} und ein $\delta > 0$ gibt, so daß*

$$\forall x \in K(0, \delta) \quad \varkappa_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \varkappa_2(\|x\|). \quad (4.29)$$

Beweis (\Leftarrow): Die Existenz von δ , \varkappa_1 und \varkappa_2 impliziert die positive Definitheit von V .

(\Rightarrow): Sei $V(x) > 0$, falls $0 < \|x\| < \delta$. Mit $0 < r_1 \leq r \leq r_2 < \delta$ gilt für jedes x der Sphäre $S(0, r)$

$$0 < V(x) \leq \max\{V(y) \mid y \in S(0, r)\} \leq \max\{V(y) \mid y \in K^*(0, r)\} =: M(r),$$

$$V(x) \geq \min\{V(y) \mid y \in S(0, r)\} \geq \min\{V(y) \mid r \leq \|y\| \leq r_2\} =: m(r) > 0.$$

Mit $m(0) := M(0) := 0$ sind $m(\cdot)$ und $M(\cdot)$ auf $[0, \delta)$ monoton wachsend und, zufolge der Stetigkeit von V , stetig. (Wegen der Monotonie kann z.B. $M(\cdot)$ nur Sprünge als Unstetigkeiten besitzen; ein Sprung ist ausgeschlossen, da V auf dem Kompaktum $K^*(0, r)$ sein Maximum annimmt und auf $K^*(0, r_2)$ die Zwischenwerteigenschaft besitzt.)

Damit gilt für $\|x\| = r \in [0, r_2] \subset [0, \delta)$

$$\frac{\delta}{2\delta - r} m(r) =: \varkappa_1(r) \leq V(x) \leq \varkappa_2(r) := \left(1 + \frac{r}{\delta}\right) M(r),$$

die (speziell gewählten) \varkappa_1, \varkappa_2 sind *streng* monoton und somit von der Klasse \mathcal{K} . ■

In den folgenden Sätzen bedeutet V stets eine reellwertige Funktion, die auf einer Umgebung von $\xi_o = 0$ erklärt und dort mindestens von der Klasse C^1 ist, Lie-Ableitung ist immer bezüglich des Vektorfeldes f .

Satz 4.45 *Gibt es eine positiv definite Funktion V mit negativ semidefiniter Lie-Ableitung, dann ist $\xi_o = 0$ stabil.*

Beweis Wegen $L_f V(x) \leq 0$ für alle $x \in K(0, \delta)$ ist $v(\cdot) := V \circ \varphi(\cdot, \xi)$ monoton fallend, wenn nur $\|\xi\| < \delta$ ist. Daraus folgt für alle positiven $t \in I(\xi)$

$$\varkappa_1(\|\varphi(t, \xi)\|) \leq v(t) = V(\varphi(t, \xi)) \leq V(\xi) \leq \varkappa_2(\|\xi\|),$$

somit $\|\varphi(t, \xi)\| \leq (\varkappa_1^{-1} \circ \varkappa_2)(\|\xi\|) =: \varkappa(\|\xi\|)$. \varkappa ist von der Klasse \mathcal{K} . Folglich ist (i) $\varphi(\cdot, \xi)$ auf $I(\xi) \cap \mathbb{R}^+$ beschränkt, (ii) $\|\varphi(t, \xi)\| < \varepsilon$ mit beliebigem $\varepsilon > 0$, wenn nur $\|\xi\| < \delta_\varepsilon := \varkappa^{-1}(\varepsilon)$ ist. Nach (ii) kommt der positive Halborbit durch ξ dem Rand von \mathcal{D} nicht beliebig nahe, dann ergibt Satz 2.12 $\mathbb{R}^+ \subset I(\xi)$, zusammen mit (ii) ist das die Stabilität von $\xi_o = 0$. ■

Satz 4.46 *Gibt es eine positiv definite Funktion V mit negativ definiter Lie-Ableitung, dann ist $\xi_o = 0$ asymptotisch stabil.*

Beweis Satz 4.45 garantiert die Stabilität von $\xi_o = 0$, zu zeigen bleibt die Attraktivität. Mit beliebigem festen, hinreichend kleinem ξ setzen wir $V(\varphi(t, \xi)) =: v(t)$. Aus (4.29) folgt dann $\varkappa_2^{-1}(v(t)) \leq \|\varphi(t, \xi)\| \leq \varkappa_1^{-1}(v(t))$. Wegen der negativen Definitheit ist $L_f V(x) \leq -\varkappa(\|x\|)$ mit einer Funktion \varkappa der Klasse \mathcal{K} . Somit gilt für alle $t > 0$

$$L_f V(\varphi(t, \xi)) = \dot{v}(t) \leq -(\varkappa \circ \varkappa_2^{-1})(v(t)) =: -h(v(t)), \tag{4.30}$$

h ist nach Konstruktion von der Klasse \mathcal{K} .

Parallel zu der Differential-Ungleichung (4.30) betrachten wir das Anfangswertproblem

$$\dot{w} = -h(w), \quad w(0) = w_o := v(0) = V(\xi) > 0.$$

Dessen Lösung ist wegen $h > 0$ streng monoton fallend und hat $\{0\}$ als ω -Grenzmenge (vgl. Folgerung auf Seite 68). Also ist $\mathbb{R}^+ \subset I(w_o)$ und $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(t) = 0$.

Die Lösung des Anfangswertproblems ist durch $-t = H(w) := \int_{w_o}^w \frac{ds}{h(s)}$ gegeben; aus (4.30) folgt nach Division mit $h(v(t))$ und Integration

$$H(v(t)) \leq -t = H(w(t)).$$

$H(\cdot)$ ist streng monoton wachsend, also folgt aus der letzten Ungleichung $v(t) \leq w(t)$ und daraus $\|\varphi(t, \xi)\| \leq \alpha_1^{-1}(w(t)) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$: $\xi_o = 0$ ist asymptotisch stabil. ■

Der folgende Satz (Spezialisierung eines *Satzes von LaSalle*) gibt eine Möglichkeit, trotz nur semidefiniter Lie-Ableitung doch auf asymptotische Stabilität zu schließen.

Satz 4.47 *Auf einer Umgebung $\mathcal{D}_o \subset \mathcal{D}$ von $\xi_o = 0$ sei V eine positiv definite Funktion mit negativ semidefiniter Lie-Ableitung. Sei $N := \{x \in \mathcal{D}_o \mid L_f V(x) = 0\}$.*

Falls außer $\{0\}$ kein weiterer positiver Halborbit in N liegt, dann ist $\xi_o = 0$ asymptotisch stabil.

Beweis Nach Satz 4.45 ist $\xi_o = 0$ stabil, zu zeigen bleibt die Attraktivität. Wegen (i) im Beweis von Satz 4.45 ist die ω -Grenzmenge der Lösung $\varphi(\cdot, \xi)$ nach Satz 2.11 nichtleer und kompakt und liegt wegen (ii) sicher in \mathcal{D} . Zuzufolge der Monotonie und Beschränktheit von $v(\cdot) = V \circ \varphi(\cdot, \xi)$ existiert $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) =: v_\infty(\xi)$. Da V stetig ist, ist $V(x) = v_\infty(\xi)$ für jeden Grenzpunkt $x = \lim_{t_\nu \rightarrow \infty} \varphi(t_\nu, \xi)$: V ist auf $\omega(\xi)$ konstant. Mit $x \in \omega(\xi)$ ist nach Lemma 4.22 der Halborbit $\Phi_x(\mathbb{R}^+) \subset \omega(\xi)$. Somit ist V längs dieses Halborbites konstant, somit $L_f V(x) = 0$ für jedes $x \in \omega(\xi)$. Also ist $\omega(\xi) \subset N$, und falls $\{0\}$ der einzige Halborbit in N ist, dann ist $\omega(\xi) = \{0\}$, d.h., $\xi_o = 0$ ist attraktiv. ■

Es folgen noch zwei hinreichende Bedingungen für Nichtstabilität.

Satz 4.48 *Gibt es eine Funktion V , die bei $\xi_o = 0$ verschwindet, nicht positiv semidefinit ist und deren Lie-Ableitung negativ semidefinit ist, dann ist $\xi_o = 0$ nicht asymptotisch stabil.*

Beweis V nicht positiv semidefinit impliziert $\forall \delta > 0 \exists \xi \in K(0, \delta) : V(\xi) =: -\varepsilon < 0$. Da $V \circ \varphi(\cdot, \xi)$ nicht wächst, ist $\forall t \in I(\xi) \cap \mathbb{R}^+ \quad V(\varphi(t, \xi)) \leq -\varepsilon$.

Wegen der Stetigkeit und $V(0) = 0$ gibt es zu diesem ε ein $\delta_\xi > 0$, so daß $\|x\| < \delta_\xi \Rightarrow |V(x)| < \varepsilon$. Also ist $\forall t \in I(\xi) \cap \mathbb{R}^+ \quad \|\varphi(t, \xi)\| > \delta_\xi$: in jeder δ -Umgebung von $\xi_o = 0$ gibt es einen Punkt ξ , der von ξ_o nicht angezogen wird, $\xi_o = 0$ ist nicht attraktiv. ■

Satz 4.49 *Gibt es eine Funktion V , die bei $\xi_o = 0$ verschwindet, nicht positiv definit ist und deren Lie-Ableitung negativ definit ist, dann ist $\xi_o = 0$ nicht stabil.*

Beweis V nicht positiv definit impliziert $\forall \delta > 0 \exists \xi \in K(0, \delta) : V(\xi) \leq 0$.

Ist δ hinreichend klein (so daß $L_f V(x) < 0$ mit $0 < \|x\| < \delta$), dann fällt V längs des Orbits durch ξ streng monoton, also $\exists x_1 (= \varphi(t_1, \xi), t_1 > 0)$ mit $\|x_1\| < \delta$ und $V(x_1) < 0$: V ist nicht positiv semidefinit.

Es sei $L_f V(x) < 0$, falls $0 < \|x\| \leq \varepsilon_1$. Angenommen, $\xi_o = 0$ ist stabil, dann gibt es zu ε_1 ein $\delta_1 > 0$, so daß $\|\xi\| < \delta_1 \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \|\varphi(t, \xi)\| < \varepsilon_1$. Nach der letzten Bemerkung im Beweis von Satz 4.48 läßt sich ξ so wählen, daß $\forall t \geq 0 \quad \|\varphi(t, \xi)\| > \delta_\xi > 0$ ist. Dann ist $L_f V(\varphi(t, \xi)) \leq \max\{L_f V(y) \mid \delta_\xi \leq \|y\| \leq \varepsilon_1\} < 0$, wonach $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(\varphi(t, \xi)) = -\infty$ folgt: Widerspruch zur Stetigkeit von V . ■

Bemerkung (a) Die im Kontext der Stabilitätsuntersuchungen verwendeten Funktionen V heißen **Ljapunovfunktionen** zum Vektorfeld f .

(b) Die Anwendung der oben formulierten Stabilitätssätze (hinreichende Bedingungen für Stabilität/Nichtstabilität) auf ein konkretes Problem erfordert das Finden einer passenden Ljapunovfunktion.

Dafür gibt es kein allgemeines Rezept.

Auf einer Umgebung von $\xi_o = 0$ kann eine positiv definite Funktion V als eine verallgemeinerte Norm (ohne Homogenitätseigenschaft und Dreiecksungleichung) aufgefaßt werden. $L_f V(x)$ beschreibt dann das Änderungsverhalten dieses „Abstandes“ des Punktes x von 0 längs des durch x gehenden Orbits. $L_f V(x) < 0$ bedeutet abnehmenden Abstand und führt letzten Endes zur asymptotischen Stabilität. Es ist offensichtlich, daß die Brauchbarkeit einer Ljapunovfunktion - d.h. die Definitheit ihrer Lie-Ableitung - wesentlich durch die Gestalt der „ V -Sphären“ $\{x|V(x) = const\}$ im Vergleich zu den Orbits (die man nicht kennt!) bestimmt wird. Sind, bei $n = 2$, die Orbits z.B. sehr flachgedrückte Spiralen, dann wird ein V mit konzentrischen Kreisen als Niveaumengen - euklidische Standardnorm - unangepaßt sein, da jeder Kreis von einem Orbit (mehrfach) nach außen und nach innen durchsetzt wird, $L_f V$ also indefinit ist.

(c) Das systematische Probieren zum Finden einer Ljapunovfunktion sollte immerhin positiv definite quadratische Formen $V(x) = x^T P x$ (Quadrat einer euklidischen Norm) mit einschließen. Bei DGLn, die Systeme mit einer *inneren Energie* (vgl. Kapitel 4.10) beschreiben, sollte diese innere Energie als Kandidat für eine Ljapunovfunktion dienen. \square

Beispiel 4.50 ($n = 2$).

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = -\sin x^1 - k_3(x^2)^3, \quad k_3 \in \mathbb{R}.$$

(Vgl. Beispiel 4.40, mittels Linearisierung ist keine Stabilitätsaussage für den Fixpunkt $(0, 0)$ erzielbar.)

Mit $k_3 = 0$ beschreibt die DGL die Bewegung eines mathematischen Pendels (x^1 : Auslenkungswinkel, x^2 : Winkelgeschwindigkeit). Die innere Energie (kinetische + potentielle Energie) ist $E(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^2)^2 - \cos x^1 + const$. Kandidat für eine Ljapunovfunktion:

$$V(x^1, x^2) := \frac{1}{2}(x^2)^2 - \cos x^1 + 1$$

(positiv definit auf $\mathcal{D}_o := (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$).

$$L_f V(x^1, x^2) = x^2 \cdot \sin x^1 + (-\sin x^1 - k_3(x^2)^3) \cdot x^2 = -k_3(x^2)^4,$$

d.h. $L_f V$ ist negativ semidefinit, falls $k_3 \geq 0$. Nach Satz 4.45 ist dann $(0, 0)$ gewiß stabil. Mit Satz 4.47 folgt sogar die asymptotische Stabilität: $N := \{x \in \mathcal{D}_o | L_f V(x) = 0\} = \{(x^1, 0) | x^1 \in (-\pi, \pi)\}$, für einen in N liegenden Halborbit ist also $\varphi^2(t, \xi) = 0$, $t \geq 0$, gemäß DGL dann aber auch $\varphi^1(t, \xi) = 0 : \{(0, 0)\}$ ist einziger Halborbit in N .

Ist $k_3 < 0$, ergibt Satz 4.48 mit der Ljapunovfunktion $-V$, daß $(0, 0)$ nicht asymptotisch stabil ist. Die verbleibende Alternative stabil oder instabil läßt sich mit dieser Ljapunovfunktion nicht entscheiden. \square

4.10 Erste Integrale

Der in diesem Kapitel einzuführende Begriff des ersten Integrals einer DGI dient der qualitativen Analyse von Phasenportraits, der Reduktion der Ordnung (Dimension des Phasenraumes) von DGI'n und gestattet die Definition der überaus wichtigen *konservativen Systeme*. Darüber hinaus besteht ein Zusammenhang mit dem Begriff Ljapunovfunktion. Wir beginnen mit zwei einfachen Beispielen.

Beispiel 4.51 ($n = 2$).

$$\dot{x} = y^2 \quad , \quad \dot{y} = xy \quad , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \quad (4.31)$$

Bemerkung: Das Vektorfeld ist von der Form $f(x, y) = y f_o(x, y)$ mit $f_o(x, y) = (y, x)^T$. Die Phasenportraits von f und f_o stimmen in der oberen und unteren offenen Halbebene (bis auf die Durchlaufung der Orbits) überein, das lineare Feld f_o läßt sich leicht untersuchen. Wir verfolgen diesen Gedanken nicht weiter.

Es sei $(x(\cdot), y(\cdot))$ irgendeine Lösung der DGI (4.31); der Anfangswert bei $t = 0$ sei (ξ, η) . Dann gilt (a) $\dot{x}(t) = y^2(t)$ und (b) $\dot{y}(t) = x(t)y(t)$ für alle $t \in I(\xi, \eta)$. Daraus folgt $x(t)\dot{x}(t) - y(t)\dot{y}(t) = 0$, $t \in I(\xi, \eta)$, und mittels Quadratur $x^2(t) - y^2(t) = \text{const}$, $t \in I(\xi, \eta)$. Mit $t = 0$ ergibt sich der Wert der Konstanten als $\xi^2 - \eta^2$.

Dieser Sachverhalt läßt sich so formulieren: Die Funktion

$$F|\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : F(x, y) := x^2 - y^2$$

hat in den Punkten $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$, wobei $(x(\cdot), y(\cdot))$ Lösung der DGI (4.31) ist, Funktionswerte, die von t nicht abhängen, d.h., F ist auf den Orbits konstant, und das wiederum heißt, daß jeder Orbit Teilmenge einer Niveaumenge von F ist. Die Niveaumengen (Höhenlinien) von F sind Hyperbeln und ihre Asymptoten, damit ist das Phasenportrait beinahe bekannt, wir benötigen noch die Fixpunkte und die Orientierung der anderen Orbits. Diese folgen aus der DGI: Fixpunkte sind $(x_o, 0)$, $x_o \in \mathbb{R}$, und $x(\cdot)$ ist wachsend ($\dot{x}(t) > 0$), wo $y(t) \neq 0$.

Jede Niveaumenge von F ist eine Vereinigung von (endlich vielen) Orbits und damit eine bezüglich des Vektorfeldes f invariante Menge S . Die Bewegungen in S sind durch das Vektorfeld $f|_S$ bestimmt. Ihre quantitative Beschreibung kann prinzipiell dadurch erfolgen, daß für S eine Parameterdarstellung angegeben und eine DGI für die Parameter (als Funktionen von t) gewonnen wird (freilich geht das in der Regel nur lokal und infolge der Kompliziertheit invarianter Mengen praktisch häufig gar nicht).

Im Beispiel sind die invarianten Mengen

$$S_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

$\{S_c \mid c \in \mathbb{R}\}$ ist eine Blätterung des \mathbb{R}^2 . Mögliche Parameterdarstellungen sind die folgenden.

(i) $c > 0$: $x = A \cosh u$, $y = A \sinh u$, $u \in \mathbb{R}$, mit $A^2 = c$.

Die DGI (4.31) ist auf S_c genau dann erfüllt, wenn $t \mapsto u(t)$ der DGI $\dot{u} = A \sinh u$ genügt. Die Lösung zum Anfangswert u_o ist

$$u(t) = 2 \operatorname{artanh} \left(\tanh \frac{u_o}{2} \cdot \exp(At) \right), t \in I(u_o).$$

$(A \cosh u(\cdot), A \sinh u(\cdot))$ ist dann die Lösung der Ausgangs-DGI (4.31) zum Anfangswert

(x_o, y_o) , $x_o = A \cosh u_o$, $y_o = A \sinh u_o$, also $u_o = \operatorname{artanh} \frac{y_o}{x_o}$, $|A| = \sqrt{x_o^2 - y_o^2}$, $\operatorname{sgn} A = \operatorname{sgn} x_o$.

(ii) $c = 0$: $x = Ae^u$, $y = Ae^u$ (bzw. $y = -Ae^u$), $u \in \mathbb{R}$, $A \neq 0$ fix.

(Jede dieser Parameterdarstellungen erfaßt eine der vier Halbgeraden, aus denen sich S_o zusammensetzt.) Die auf (einen Teil von) S_o reduzierte DGL ist

$$\dot{u} = Ae^u.$$

(iii) $c < 0$: $x = A \sinh u$, $y = A \cosh u$, $u \in \mathbb{R}$, mit $A^2 = -c$.

Die reduzierte DGL ist

$$\dot{u} = A \cosh u.$$

□

Beispiel 4.52 ($n = 3$).

$$\dot{x}^1 = x^2 x^3, \quad \dot{x}^2 = -x^3 x^1, \quad \dot{x}^3 = x^1 x^2, \quad x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3. \quad (4.32)$$

Ist $x(\cdot)$ irgendeine Lösung und I ihr Maximalintervall, dann folgt aus den ersten beiden DGLn $x^1(t)\dot{x}^1(t) + x^2(t)\dot{x}^2(t) = 0$ für alle $t \in I$. Eine Quadratur ergibt $(x^1(t))^2 + (x^2(t))^2 = \operatorname{const}$, und das bedeutet, daß die Funktion

$$F|\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : F(x) := (x^1)^2 + (x^2)^2$$

auf jedem Orbit konstant ist, d.h., daß jeder Orbit Teilmenge einer Niveaumenge

$$S_c := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x^1)^2 + (x^2)^2 = c\}$$

ist. Mit $c = A^2 > 0$ ist S_c eine Kreiszyylinderfläche. Eine lokale Parameterdarstellung (für S_c , geschlitzt längs einer Mantellinie) ist

$$x^1 = A \cos u, \quad x^2 = A \sin u, \quad x^3 = v, \quad (u, v) \in (-\pi, \pi) \times \mathbb{R},$$

sie überführt die DGL (4.32) in die reduzierte, 2–dimensionale DGL

$$\dot{u} = -v, \quad \dot{v} = \frac{1}{2}A^2 \sin 2u, \quad (4.33)$$

die (mit $z := 2u$) einer *Pendelgleichung* (s. Beispiel 4.65)

$$\ddot{z} = -A^2 \sin z$$

äquivalent ist. (4.33) beschreibt die Bewegungen in S_c , d.h., jede Bewegung mit Anfangswert (ξ^1, ξ^2, ξ^3) , wenn nur $A^2 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 > 0$.

Auch ohne die weitere Untersuchung von (4.33) läßt sich das Phasenportrait qualitativ beschreiben:

(i) Fixpunkte sind alle Punkte auf den Koordinatenachsen.

(ii) Durch analoge Betrachtungen wie oben folgt, daß jeder Orbit auch Teilmenge einer Niveaumenge der Funktion

$$G|\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : G(x) := (x^2)^2 + (x^3)^2$$

ist. Damit liegt jeder Orbit von (4.32) in der Schnittlinie zweier Kreiszyylinder mit der x^3 –Achse bzw. x^1 –Achse als Zylinderachse und mit Radien, die durch den Anfangspunkt ξ bestimmt sind.

□

Definition 4.53 Eine reellwertige C^1 -Funktion F mit $\text{dom } F \subset \mathcal{D}$ heißt **erstes Integral** der DGl $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathcal{D}$, falls ihre Lie-Ableitung $L_f F = 0$ ist.

Ist $\text{dom } F = \mathcal{D}$, dann heißt F **globales erstes Integral**.

Ein Vektorfeld, zu dem ein erstes Integral existiert, heißt **konservatives Vektorfeld**.

Lemma 4.54 F ist erstes Integral zum Vektorfeld f auf \mathcal{D} gdw. F längs jeder Lösung der DGl $\dot{x} = f(x)$, $x \in \text{dom } F$, konstant ist.

Beweis Bezeichnet φ die allgemeine Lösung der DGl $\dot{x} = f(x)$, $x \in \text{dom } F$, dann bedeutet Konstanz längs jeder Lösung

$$\forall \xi \in \text{dom } F \quad \forall t \in I(\xi) \quad (F \circ \varphi_t)(\xi) = F(\xi).$$

Das ist (vgl. Anfang Kapitel 4.9.2) äquivalent mit dem Verschwinden der Lie-Ableitung. ■

Bemerkung (a) Die in den letzten Beispielen angegebenen Funktionen F und G sind globale erste Integrale, man überprüfe Definition 4.53.

(b) Im Lemma ist die Einschränkung der DGl auf $\text{dom } F$ wesentlich. Denn der Schnitt eines Orbits der DGl $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathcal{D}$, mit $\text{dom } F$ kann aus mehreren nichtzusammenhängenden Komponenten bestehen, auf denen F verschiedene Werte annehmen kann.

(c) Eventuell unter zusätzlichen Definitheitseigenschaften können erste Integrale als Ljapunovfunktionen bei Stabilitätsuntersuchungen dienen. (Vgl. die Sätze in Kapitel 4.9.2; $L_f F$ ist „semidefinit“. Siehe auch Lemma 4.63 und Nachfolgendes.)

(d) Für die als zweidimensionale autonome DGl $\dot{x} = g(t)h(x)$, $\dot{t} = 1$ aufgefaßte DGl mit getrennten Variablen $\dot{x} = g(t)h(x)$ ist $F(t, x) := \Gamma(t) - H(x)$ (vgl. (1.6)) ein erstes Integral.

(e) Gemäß Lemma bleibt der Funktionswert $F(\xi)$ längs der Lösung $\varphi(\cdot, \xi)$ *konserviert*, das durch f modellierte System besitzt F als *Erhaltungsgröße* (z.B. Energie-Erhaltung, Beispiel 4.60). □

Die ein erstes Integral charakterisierende Gleichung,

$$0 = L_f F = \sum_{i=1}^n f^i F_{,x^i} \quad \text{auf } \mathcal{D} = \text{dom } F, \quad (4.34)$$

kann als partielle DGl für F verstanden werden, deren Lösungen genau die (lokalen) ersten Integrale der gewöhnlichen DGl $\dot{x} = f(x)$ sind. Die Bestimmung aller Lösungen von (4.34) und die Bestimmung der allgemeinen Lösung $\varphi(\cdot, \cdot)$ von $\dot{x} = f(x)$ sind im wesentlichen äquivalente Probleme. Über die Lösungen von (4.34) berichten die folgenden Lemmata.

Lemma 4.55 Sei $\alpha \in \mathbb{R}$, $w(\cdot, \cdot)$ eine willkürliche glatte Funktion auf \mathbb{R}^2 .

Sind F und G erste Integrale, so auch αF , $F + \alpha$, $F + G$, $F \cdot G$, $w(F, G)$ (die letzten drei auf $\text{dom } F \cap \text{dom } G$).

Beweis Nachrechnen mit Hilfe der Lie-Ableitung. ■

k erste Integrale F_{\varkappa} , $\varkappa = 1, \dots, k$, sollen im Punkt ξ **unabhängig** heißen, falls ihre Jacobi-matrix $(D_{x^i} F_{\varkappa})$ an der Stelle ξ den Rang k hat.

Erste Integrale F , G und $H = w(F, G)$ sind in keinem Punkt unabhängig.

Lemma 4.56 *Zu einem nicht identisch verschwindenden Vektorfeld f im \mathbb{R}^n kann es nicht mehr als $n - 1$ unabhängige erste Integrale geben.*

Beweis Angenommen, F_1, \dots, F_n sind erste Integrale, die im Punkt ξ unabhängig sind. Dann ist $\det(\mathcal{D}_{x^i} F_{\nu}(x)) \neq 0$ für $x = \xi$ und wegen der Stetigkeit auch für alle x aus einer Umgebung $U(\xi)$. Aus $0 = L_f F_{\nu} = \sum_{i=1}^n f^i D_{x^i} F_{\nu}$ folgt dann $f^i = 0$ auf $U(\xi)$. ■

Ist F ein erstes Integral, so liegt jeder Orbit in einer Niveaumenge von F . Sind F_1, \dots, F_k erste Integrale, so liegt jeder Orbit im Schnitt der Niveaumengen. Ist $k = n - 1$ und sind die ersten Integrale unabhängig, so sind die Schnittmengen eindimensional und bestimmen das Phasenportrait bis auf die Orientierung der Orbits. Daß jede konstante Funktion (4.34) löst, ist klar und uninteressant - ein solches F heißt **triviales erstes Integral**.

Lokal gibt es immer nichttriviale Integrale:

Lemma 4.57 *Sei ξ ein nichtsingulärer Punkt des Vektorfeldes f . Dann gibt es eine Umgebung $U(\xi) \subset \mathcal{D}$, auf der $n - 1$ überall unabhängige erste Integrale existieren.*

Beweis Nach Satz 4.27 gibt es eine flow box H , deren domain $U(\xi)$ sei. H bildet $f|_{U(\xi)}$ auf $g = H_* f : g(y) = (1, 0, \dots, 0)^T$ ab. Es ist $g(H(x)) = DH(x) \cdot f(x) = (L_f H)(x)$, also, für die Koordinaten, $0 = g^{\varkappa}(H(x)) = (L_f H^{\varkappa})(x)$: die flow-box Koordinaten H^2, \dots, H^n sind erste Integrale, sie sind unabhängig, da H Diffeomorphismus, also $DH(x)$ regulär ist. ■

Globale erste Integrale brauchen gar nicht zu existieren. Das hängt unter anderem von den Fixpunkten des Flusses ab.

Lemma 4.58 *x_o sei asymptotisch stabiler Fixpunkt, und F sei ein erstes Integral mit $x_o \in \text{int dom } F$. Dann existiert eine Umgebung von x_o , auf der F konstant ist.*

Beweis (Indirekt) Sei x_o der Fixpunkt mit dem Bassin $B_o \subset \mathcal{D}$, und F sei ein auf einer Umgebung $U \subset B_o$ von x_o nicht konstant. Es sei o.B.d.A. $F(x_o) = 0$. Da F auf U nicht konstant ist, gibt es einen Punkt $\xi \in U$ mit $F(\xi) \neq 0$, dessen positiver Halborbit ganz in U liegt. Dann ist $F(\varphi(t, \xi)) = F(\xi)$ für alle $t \geq 0$ also $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(\varphi(t, \xi)) = F(\xi) \neq 0$. Es ist $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t, \xi) = x_o$, wegen der Stetigkeit von F ist $\lim_{t \rightarrow +\infty} F(\varphi(t, \xi)) = F(x_o) = 0$: Widerspruch! ■

Bemerkung (a) Das Lemma gilt natürlich genauso für abstoßende Fixpunkte (attraktiv für $t \rightarrow -\infty$).

(b) Aus dem Lemma folgt, daß eine DGL mit einem globalen ersten Integral, das auf keinem Gebiet konstant ist, keinen attraktiven Fixpunkt besitzt. □

Wichtig und interessant sind natürlich gerade die globalen ersten Integrale, da ihre Niveaumengen invariante Mengen (geometrische Orte der Orbits) sind und damit (zumindest theoretisch) eine Reduktion der DGL auf niedere Dimension gestatten. Wir betrachten im folgenden eine Klasse von DGLn, die (mindestens) ein globales erstes Integral besitzen sowie eine Unterklasse, die für Anwendungen von extremer Bedeutung ist.

Lemma 4.59 Auf dem Gebiet $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ seien gegeben $H \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ und $S \in C^1(\mathcal{D}, \mathbb{R}^{n \times n})$, wobei $S^T = -S$ (S ist also eine mit C^1 -Funktionen besetzte schiefsymmetrische $n \times n$ -Matrix). Dann besitzt die DGL $\dot{x} = f(x)$ mit dem Vektorfeld

$$f := S \cdot (DH)^T \quad (\text{koordinatenweise: } f^i(x) = \sum_{j=1}^n S^{ij}(x) H_{,x^j}(x)) \quad (4.35)$$

H als globales erstes Integral.

Beweis $L_f H = DH \cdot f = DH \cdot S \cdot (DH)^T = 0$, da $S = -S^T$. ■

Im Fall $n = 2$ gibt (4.35) (mit $S^{12} =: a$)

$$f(x) = a(x) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{,x^1}(x) \\ H_{,x^2}(x) \end{pmatrix},$$

und im Sonderfall $a(x) = 1$ entsteht die DGL

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= H_{,x^2}(x^1, x^2) \\ \dot{x}^2 &= -H_{,x^1}(x^1, x^2). \end{aligned} \quad (4.36)$$

(4.36) ist eine **zweidimensionale Hamiltonsche DGL** (in kanonischer Form) mit der **Hamiltonfunktion** H . Nach Lemma 4.59 ist H globales erstes Integral, die Orbits von (4.36) liegen in den Niveaulinien von H , und Fixpunkte des Flusses sind genau die Lösungen (x_o^1, x_o^2) der Gleichungen

$$0 = H_{,x^1}(x^1, x^2), \quad 0 = H_{,x^2}(x^1, x^2),$$

d.h., die extremalverdächtigen Punkte von H .

Beispiel 4.60 Jede 1-dimensionale DGL 2. Ordnung vom Typ

$$y'' = g(y), \quad g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (4.37\text{-a})$$

ist einer 2-dimensionalen Hamiltonschen DGL äquivalent. Mit $y =: x^1$ und die unabhängige Variable als Zeit t interpretierend, ist

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2 \\ \dot{x}^2 &= g(x^1). \end{aligned} \quad (4.37\text{-b})$$

Das stimmt mit (4.36) überein, falls

$$H(x^1, x^2) := \frac{1}{2}(x^2)^2 + U(x^1), \quad \text{wobei } U' := -g \quad (4.38)$$

(die Vorzeichenwahl ist reine Konvention). □

Die Gleichungen (4.37-a) und (4.38) erlauben folgende mechanische Interpretation. Auf einer Geraden bewegt sich ein Massenpunkt (Masse = 1), seine Lagekoordinate ist x^1 , seine Geschwindigkeit x^2 , die Bewegung erfolgt unter Einfluß der ortsabhängigen Kraft $g(x^1) = -U'(x^1)$. H ist die Summe von kinetischer Energie $\frac{1}{2}(x^2)^2$ und potentieller Energie $U(x^1)$ - diese mechanische Gesamtenergie bleibt bei jeder Bewegung konstant. „ H ist globales erstes Integral der DGl“ bedeutet physikalisch „es gilt der Energie-Erhaltungssatz“.

Die Fixpunkte (Gleichgewichtslagen des Massenpunktes) sind

$$x_o = (x_o^1, 0) \quad \text{mit} \quad U'(x_o^1) = 0.$$

Die Linearisierung der DGl mit $f(x) = (x^2, -U'(x^1))^T$ in x_o ist

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -U''(x_o^1) & 0 \end{pmatrix} z.$$

x_o ist einfacher Fixpunkt gdw. $U''(x_o^1) \neq 0$.

$$z = 0 \quad \text{ist ein} \quad \begin{array}{l} \text{Sattel, falls } U''(x_o^1) < 0 \quad (U(x_o^1) \text{ Maximum}) \\ \text{Wirbel, falls } U''(x_o^1) > 0 \quad (U(x_o^1) \text{ Minimum}). \end{array}$$

Die Sattelleigenschaft überträgt sich nach dem Satz von Hartman-Grobman sofort auf das Phasenportrait von (4.37-b) bei x_o , die Wirbeleigenschaft (nichthyperbolischer Fixpunkt!) *in diesem Hamiltonschen Fall* ebenfalls: $U(x_o^1)$ Minimum und $x_o^2 = 0$ impliziert, daß $H(x_o)$ ein Minimum ist und somit die Höhenlinien von H in der Umgebung von x_o geschlossene Kurven sind.

U dient nicht nur zur Charakterisierung der Fixpunkte, mit Hilfe des gezeichneten Graphen von U läßt sich auch das Phasenportrait qualitativ gewinnen.

Für jeden Orbit gilt $H(x^1, x^2) = \text{const} =: h = H(\xi^1, \xi^2)$. Also ist

$$0 \leq (x^2)^2 = 2[h - U(x^1)]. \tag{4.39}$$

Bei vorgegebenem $h \in \mathbb{R}$ liegt ein Orbit somit über einem x^1 -Intervall mit $U(x^1) \leq h$, und zu jedem dieser x^1 gehören $x^2 = \pm\sqrt{2(h - U(x^1))}$: die Orbits sind symmetrisch zur x^1 -Achse.

Die Durchlaufungsrichtung ergibt sich aus $\dot{x}^1 = x^2$. Die Bewegung mit dem Anfangszustand (ξ^1, ξ^2) schließlich läßt sich aus (4.39) gewinnen: mit $h = \frac{1}{2}(\xi^2)^2 + U(\xi^1)$ folgt

$$\dot{x}^1 = \text{sgn } \dot{x}^1 \cdot \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{2}(\xi^2)^2 + U(\xi^1) - U(x^1)},$$

das ist bei festem Vorzeichen von \dot{x}^1 jeweils eine DGl mit getrennten Variablen für x^1 . Eventueller Vorzeichenwechsel muß an den Nullstellen des Radikanden durch Betrachtung von $\ddot{x}^1 = \dot{x}^2 = -U'(x^1)$ festgestellt werden.

Eine Nullstelle ξ_o^1 des Radikanden mit $U'(\xi_o^1) \neq 0$ bedeutet einen *Nulldurchgang* von \dot{x}^1 und erfordert den Übergang zur DGl mit geändertem Vorzeichen der rechten Seite.

Die Frage, ob eine gegebene DGl $\dot{x} = f(x)$ im \mathbb{R}^2 Hamiltonsch ist, klärt das folgende

Lemma 4.61 *Die DGl $\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, \mathcal{D} einfach zusammenhängend, ist genau dann Hamiltonsch in kanonischer Form, wenn $f = (f^1, f^2)^T$ auf \mathcal{D} der partiellen DGl $f^1_{,x^1} + f^2_{,x^2} = 0$ genügt.*

Beweis Es existiert eine Hamiltonfunktion H mit $f = (H_{,x^2}, -H_{,x^1})$ genau dann, wenn das Linienintegral $\int f^1 dx^2 - f^2 dx^1$ wegunabhängig ist, die angegebene Bedingung ist dafür notwendig und hinreichend. ■

Der Fluß eines Hamiltonschen Vektorfeldes hat eine wesentliche geometrische Besonderheit.

Lemma 4.62 (Satz von Liouville im \mathbb{R}^2) *Der Fluß eines Hamiltonschen Vektorfeldes ist flächentreu.*

Bemerkung Das bedeutet, daß für jeden der Diffeomorphismen φ_t ein Teilgebiet $G \subset \mathcal{D}_t$ und sein Bild $\varphi_t G \subset \mathcal{D}_{-t}$ gleichen Flächeninhalt haben. Dieser Sachverhalt weist darauf hin, daß eine Hamiltonsche DGL keinen attraktiven Fixpunkt besitzen kann, denn dann müßte eine Umgebung nach hinreichend langer Zeit in eine beliebig kleine Umgebung des Fixpunktes „hineingeflossen“ sein. □

Beweis $\varphi_t G$ geht durch die Transformation φ_t aus G hervor. Also gilt nach der Substitutionsregel $\int_{\varphi_t G} d(x^1, x^2) = \int_G |\det D_x \varphi_t(x)| d(x^1, x^2)$. $D_\xi \varphi_t(\xi) = D_\xi \varphi(t, \xi)$ löst das Matrizen-Anfangswertproblem $\dot{V} = D_x f(\varphi_t(\xi))V$, $V(0) = E$ - vgl. Satz 4.7. $D_\xi \varphi_t$ ist Fundamentalmatrix der längs $\varphi(\cdot, \xi)$ linearisierten DGL $\dot{x} = f(x)$. Nach Satz 3.8 (vgl. auch die Bemerkung zu diesem Satz) ist die Wronski-Determinante $W(t) = \det D_\xi \varphi_t(\xi)$ genau dann konstant (und somit gleich 1), wenn die Spur der Koeffizientenmatrix gleich Null ist. Hier ist in der Tat $\text{tr} D_x f = \text{tr} \begin{pmatrix} H_{,x^2 x^1} & H_{,x^2 x^2} \\ -H_{,x^1 x^1} & -H_{,x^1 x^2} \end{pmatrix} = 0$. ■

Die in Beispiel 4.60 vorgenommene Klassifizierung von Fixpunkten der zweidimensionalen Hamiltonschen DGL (4.37-b) mit Hilfe der Hamiltonfunktion weist darauf hin, daß eine Hamiltonfunktion - und allgemeiner jedes erste Integral - als Ljapunovfunktion für einen Stabilitätsnachweis dienen kann.

Lemma 4.63 *Es sei F ein erstes Integral der DGL $\dot{x} = f(x)$, $x_o \in \text{dom } F$ sei singulärer Punkt von f . Hat F bei x_o ein eigentliches lokales Minimum, dann ist x_o stabil.*

Beweis O.B.d.A. sei $F(x_o) = 0$, dann ist $F(x) > 0$ für alle $x \neq x_o$ aus einer Umgebung von x_o , mit $V := F$ ist die Prämisse in Satz 4.45. erfüllt. ■

Wesentlich ist die positive Definitheit des ersten Integrals bei x_o . Sind mehrere unabhängige Integrale in der Umgebung von x_o bekannt (von denen keines positiv definit ist), dann kann man versuchen, ein weiteres, definites Integral aus den gegebenen zu konstruieren. Wir formulieren dieses Verfahren ohne seinen theoretischen Hintergrund zu beleuchten.

Energie-Casimir-Methode: F_1, \dots, F_k , $k \geq 2$, seien erste Integrale der DGL $\dot{x} = f(x)$, die auf einer Umgebung des Fixpunktes x_o erklärt und in x_o unabhängig sind. Finde eine glatte Funktion $\Psi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ so, daß für das erste Integral $F := \Psi \circ (F_1, \dots, F_k)$ gilt

$$D_x F(x_o) = 0, \quad D_x^2 F(x_o) \text{ positiv definit.}$$

Dann ist x_o stabil. Denn $F: F(x) = \Psi(F_1(x), \dots, F_k(x))$ hat dann bei x_o ein eigentliches lokales Minimum, Lemma 4.63 gibt die Folgerung. □

Beispiel 4.64 (Vgl. Beispiel 4.52).

$$\dot{x}^1 = x^2 x^3, \quad \dot{x}^2 = -x^3 x^1, \quad \dot{x}^3 = a x^1 x^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Globale erste Integrale: $F_1(x) = (x^1)^2 + (x^2)^2$, $F_2(x) = a(x^2)^2 + (x^3)^2$.

Wir betrachten nur die Fixpunkte $x_o = (\alpha, 0, 0)$, $\alpha \neq 0$.

Ansatz: $F := \Psi(F_1, F_2)$.

$$D_x F(x) = (2x^1 \Psi_{,1}, 2x^2 (\Psi_{,1} + a \Psi_{,2}), 2x^3 \Psi_{,2})$$

$$D_x F(x_o) = (2\alpha \Psi_{,1}(\alpha^2, 0), 0, 0)$$

$$D_x^2 F(x_o) = \text{diag}(2\Psi_{,11} + 4\alpha^2 \Psi_{,11}, 2(\Psi_{,11} + a \Psi_{,2}), 2\Psi_{,2}) \text{ (alles mit Argument } (\alpha^2, 0)\text{)}.$$

Forderung: $\Psi_{,1}(\alpha^2, 0) = 0$, $\Psi_{,11}(\alpha^2, 0) > 0$, $a \Psi_{,2}(\alpha^2, 0) > 0$, $\Psi_{,2}(\alpha^2, 0) > 0$.

Die beiden letzten Ungleichungen verlangen $a > 0$. Die verbleibenden Forderungen versucht man mit einem passenden Ansatz für Ψ zu erfüllen: ein quadratisches Polynom $\Psi(u, v)$ genügt hier schon, und $\Psi(u, v) = u(u - 2\alpha^2) + v$ ist brauchbar.

Für Parameterwerte $a < 0$ arbeitet die Methode hier nicht. Die *Instabilität* von x_o läßt sich für diesen Fall mittels Reduktion des Systems auf die entsprechende Niveauläche von F_1 - vgl. Beispiel 4.52 - und dann mit Hilfe des Satzes 4.39 beweisen.

Ergebnis: Für $a > 0$ ist x_o stabil, für $a < 0$ instabil. □

Beispiel 4.65 Die *Pendelgleichung*

Wir betrachten die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{q} = -\alpha^2 \sin q, \quad q \in \mathbb{R}, \quad \text{Parameter } \alpha > 0, \tag{4.40}$$

aus zwei Gründen.

(i) Die DGl (4.40) dient ursprünglich der Beschreibung der Bewegungen eines mathematischen Pendels (q : Auslenkungswinkel aus der nach unten orientierten Vertikalen, \dot{q} : Winkelgeschwindigkeit, α^2 : Verhältnis von Fallbeschleunigung g und Pendellänge), erfaßt gleichermaßen das physikalische Pendel, beschreibt Bewegungen elektrischer Gleichstrommotoren und tritt unerwartet bei der Untersuchung der Verformung elastischer Stäbe und von Kreisbewegungen an zentraler Stelle in Erscheinung. Vgl. auch Beispiele 4.40 und 4.50.

(ii) Die DGl (4.40) und ihr Phasenportrait weisen etliche Besonderheiten auf, die für DGl'n aus verschiedenen Anwendungsgebieten typisch sind. Für deren Untersuchung steht jetzt das volle Arsenal an Begriffen und Methoden zur Verfügung.

1. (4.40) als DGl in \mathbb{R}^2 :

$$\dot{x}^1 = x^2, \quad \dot{x}^2 = -\alpha^2 \sin x^1, \quad x = (x^1, x^2) \in \mathbb{R}^2. \tag{4.41}$$

Das Vektorfeld $f(x) = (x^2, -\alpha^2 \sin x^1)^T$ zeigt eine Symmetrie: Transformationen $(x^1, x^2) \rightarrow (x^1 + k2\pi, x^2)$, $k \in \mathbb{Z}$, führen (4.41) in sich über (anschaulich: Pendellagen x^1 und $x^1 + 2\pi$ sind nicht unterscheidbar). Damit wird das Phasenportrait in \mathbb{R}^2 bestimmte Periodizitätseigenschaften über der x^1 -Achse aufweisen. Sachgerechter wäre es, die Winkelkoordinate x^1 modulo 2π zu zählen und somit den *zylindrischen* Phasenraum $S^1 \times \mathbb{R}$ zugrunde zu legen.

2. Fixpunkte: $x_k = (k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

(Anschaulich: $k = 0$ hängendes Pendel, $k = 1$ stehendes Pendel.)

3. Linearisierung:

$$D_x f(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 \cos x^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bei $x_o = (0, 0)$:

$$D_x f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad \text{Wirbel (stabil)}.$$

Zugehörige DGl 2. Ordnung

$$\ddot{q} = -\alpha^2 q$$

hat die allgemeine Lösung $q(t) = A \cos \alpha t + B \sin \alpha t$, $A, B \in \mathbb{R}$, die Pendelbewegungen bei kleinen Auslenkungen sind in linearer Näherung harmonische Schwingungen konstanter Kreisfrequenz α (Schwingungsdauer $T_o = 2\pi/\alpha$).

Bei $x_1 = (\pi, 0)$:

$$D_x f(\pi, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha^2 & 0 \end{pmatrix} \quad : \quad \text{Sattel (instabil)}.$$

4. Hamiltonfunktion:

$$H(x^1, x^2) = \frac{1}{2}(x^2)^2 - \alpha^2 \cos x^1.$$

Bei jeder Bewegung ist $H(x^1(t), x^2(t)) = h$, wobei die Konstante h durch die Anfangswerte festgelegt ist:

$$h = \frac{1}{2}(x^2(0))^2 - \alpha^2 \cos x^1(0).$$

5. Diskussion des Phasenportraits:

Durch Untersuchung der Niveaulinien von H .

$h < -\alpha^2$: leer

$h = -\alpha^2$: Fixpunkte x_{2k} , $k \in \mathbb{Z}$ (insbesondere $x_o = (0, 0)$)

$h \in (-\alpha^2, \alpha^2)$: Geschlossene Orbits

$h = \alpha^2$: Fixpunkte x_{2k+1} , $k \in \mathbb{Z}$, und verbindende Orbits (*Heteroklinen*).

$h > \alpha^2$: Nichtgeschlossene Orbits.

Je zwei zur x^1 -Achse symmetrische Heteroklinen trennen geschlossene von nichtgeschlossenen Orbits, ihre Vereinigung heißt deshalb in diesem Zusammenhang eine **Separatrix**.

Geschlossener Orbit bedeutet periodische Bewegung $t \mapsto x^1(t)$: Schwingungen des Pendels (vgl. Figur 4.12; die Schwingungsdauer T wächst mit der Amplitude! Merkwürdige praktische Konsequenz: eine Pendeluhr, deren Ausschläge infolge Verschmutzung abnehmen, geht schneller.)

6. Die Schwingungsdauer T (Periode eines geschlossenen Orbits zum Anfangspunkt $(x_o^1, 0)$, $0 < x_o^1 < \pi$) läßt sich aus dem Energie-Erhaltungssatz $H(x^1, x^2) = h = -\alpha^2 \cos x_o^1$ berechnen. Zuzufolge der Geradheit von $H(\cdot, x^2)$ und $H(x^1, \cdot)$ erfolgt die Durchlaufung des im vierten Quadranten liegenden Teils des Orbits in einer Viertelperiode, dabei ist $\dot{x}^1 = x^2 \leq 0$. Somit gilt für $0 \leq t \leq \frac{1}{4}T$

$$\dot{x}^1 = -\sqrt{2\alpha} \sqrt{\cos x^1 - \cos x_o^1}, \quad (4.42)$$

und es ist $x^1\left(\frac{T}{4}\right) = 0$.

Die Bewegung $t \mapsto (x^1(t), \dot{x}^1(t))$ im Zeitintervall $[0, \frac{T}{4}]$ ergibt sich durch Integration der DGL mit getrennten Variablen (4.42), und insbesondere ist

$$\int_0^{x_o^1} (\cos x^1 - \cos x_o^1)^{-1/2} dx^1 = \sqrt{2\alpha} \frac{T}{4}.$$

Das für $0 < x_o^1 < \pi$ konvergente uneigentliche Integral läßt sich mit der Substitution $\sin \frac{x^1}{2} = k \sin u$, $k := \sin \frac{x_o^1}{2}$, auf ein vollständiges elliptisches Normalintegral

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} (1 - k^2 \sin^2 u)^{-1/2} du$$

zurückführen, und es folgt

$$T = \frac{4}{\alpha} K(k), \quad k = \sin \frac{x_o^1}{2}.$$

Im Intervall $x_o^1 \in (0, \frac{\pi}{3})$ ist T fast konstant (ganz schwach wachsend) mit einem Wert $T \approx \frac{2\pi}{\alpha}$ (= Periode der Lösungen der bei $x_o = (0, 0)$ linearisierten DGL), ab $x_o^1 \approx \frac{5\pi}{6}$ beginnt ein rasches unbeschränktes Wachstum (beliebig große Periode der dicht an der Separatrix liegenden geschlossenen Orbits). \square

Literaturverzeichnis

- [1] Amann, H. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Walter de Gruyter, Berlin, 1983.
- [2] Arnold, V.I. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979.
- [3] Hahn, W. *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [4] Heuser, H. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart, 1989.
- [5] Hirsch, M.W. und S. Smale *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Academic Press, New York, 1974.
- [6] Knobloch, H.W. und F. Kappel *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart, 1974.
- [7] Szlenk, W. *An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems*, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1984.
- [8] Sontag, E.D. *Mathematical Control Theory*, Springer-Verlag, New York Berlin, 1990.
- [9] Vidyasagar, M. *Nonlinear Systems Analysis*, Prentice-Hall International, Inc., New Jersey, 1993
- [10] Wiggins, S. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New York Berlin, 1990.

Index

- Ähnlichkeitsdifferentialgleichung, 12
- Übergangsmatrix, 35

- allgemeine Lösung, 53
- Anfangswertproblem (AWP), 2
- asymptotisch stabil, 83
- attraktiv, 83

- Bassin, 84
- Bernoullische DGL, 12
- Bewegung, 66

- charakteristisches Polynom, 42, 49

- dynamisches System, 65
 - kontinuierliches, diskretes, 65

- Eigenpaar, 41
- Eigenraum, 41
 - verallgemeinerter, 42
- Eigenvektor, 41
 - verallgemeinerter, 42
- Eigenwert, 41
 - einfacher, halbeinfacher, 42
- Einzugsgebiet, 84
- Energie-Casimir-Methode, 98
- Entweichzeit, 25
- erstes Integral, 94
- Explosionszeit, 25
- Exponentialansatz, 42
 - verallgemeinerter, 43

- Fixpunkt des Flusses, 66
 - hyperbolischer, 75
 - stabiler, instabiler, 77
- Fixpunktsatz von Banach, 16
- flow box, 73, 74
- Fluß, 65
 - lokaler, 57
- Fundamentalmatrix, 35

- Fundamentalsystem, 35
- Funktion von der Klasse \mathcal{K} , 88

- gewöhnliche Differentialgleichung
 - autonome, 4, 51
 - erster Ordnung, 1
 - heteronome, 4
 - Lösung, 1
 - lineare, 9
 - mit getrennten Veränderlichen, 5
 - n-ter Ordnung, 4
 - Lösung, 4
 - Systeme, 1
- Gleichgewichtslösung, 51
- global asymptotisch stabil, 84
- Grenzmenge, 24
 - α -, ω -, 27, 69
- Grenzpunkt, 24
- Gruppenaktion, 65

- Heterokline, 100
- Homokline, 84

- Inhomogenität, 10, 31
- instabil, 83
- Integralbasis, 35, 49
- Integralkurve, 2, 52
- invariante Menge, 69

- Knoten, 77
- Koeffizientenmatrix, 31
 - konstante, 41
- komplettes Vektorfeld, 64
- konjugiert, 71, 72
- konservatives Vektorfeld, 94

- Lie-Ableitung, 88
- linear abhängig, 33
- linear unabhängig, 33

- linear-beschränkt, 29
- lineare Differentialgleichung, 9, 31
 - formal adjungierte, 40
 - homogene, 10, 31
 - allgemeine Lösung, 11, 36
 - im \mathbb{R}^1 , 10
 - inhomogene, 10, 31, 36
 - n-ter Ordnung, 48
- lineare Operatorgleichung, 10
- Linearisierung, 62
- Liouvillesche Formel, 34
- Lipschitz-Bedingung, 20
- Lipschitz-stetig, 19
 - gleichgradig, 19, 21
- Ljapunov, 83
 - direkte Methode, 87
 - Theorie der ersten Näherung, 85
- Ljapunovfunktion, 91

- Matrizen-Exponentialfunktion, 47
- Maximalintervall, 23

- Orbit, 66
 - periodischer, 66

- partikuläre Lösung, 10
- Pendelgleichung, 93, 99
- Phasengeschwindigkeit, 51, 67
- Phasenkoordinaten, 51
- Phasenkurve, 51
- Phasenportrait, 67
- Phasenraum, 51, 66
 - erweiterter, 66
- Prolongation, 59
- Prozeß, 51
- pullback, 72
- pushforward, 72

- qualitative Theorie, 53

- Riccatische DGL, 13
- Richtungsfeld, 3

- Sattel, 78
- Satz
 - von Hartman und Grobman, 75
 - von LaSalle, 90
 - von Liouville, 98
 - von Picard und Lindelöf, 20
 - von Poincaré und Bendixson, 70
- Separatrix, 100
- singulärer Punkt
 - entartet, nichtentartet, 68
- Spektrum, 41
- stabil, 83
- Strudel, 79
- strukturell stabil, 71
- sukzessive Approximation, 17, 20

- Variation der Konstanten, 11, 37, 49
- Variationsgleichung, 62, 63
- Vielfachheit
 - algebraische, geometrische, 42

- Wirbel, 79
- Wronski-Determinante, 33, 49

- Zustand, 51