Institut für Mathematik
Achim Ilchmann
Leslie Leben
Tilman Selig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Blatt 14
23. Januar 2012

Analysis I
WS 2011/12

Abgabe und Besprechung am 30.01.12 um 15:00 Uhr im Curie-Hörsaal und im Sr C113. Dies ist das letzte Übungsblatt in diesem Semester.

Aufgabe 1: Überprüfe, welche der beiden Funktionen

(a) $f : [\frac{1}{16}, \infty) \to (0, \infty)$, $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ und

(b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$

Lipschitz-stetig sind!

Aufgabe 2: Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Beweise die folgenden Aussagen:

(a) $X \setminus A^\circ = \overline{(X \setminus A)}$,

(b) $X \setminus \overline{A} = (X \setminus A)^\circ$.

Definition. *Sei X ein metrischer Raum. Eine Teilmenge K von X heißt* kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $\{A_i : i \in I\}$ mit $K \subset \bigcup_{i\in I}$ eine endliche Teilüberdeckung $\{A_{i_k} : k = 0, 1, \ldots, n\}$ von K besitzt, d.h. $K \subset \bigcup_{k=0}^{n} A_{i_k}$.*

Aufgabe 3: Sei X ein metrischer Raum und A_i, $i \in \mathbb{N}$, eine Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen von X mit $A_{i+1} \subset A_i$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Des Weiteren sei A_0 kompakt. Zeige, dass $\cap_{i=0}^{\infty} A_i \neq \emptyset$ gilt!

Aufgabe 4: (a) Es sei X ein kompakter metrischer Raum und $Y \subset X$. Beweise, dass Y genau dann kompakt ist, wenn Y abgeschlossen ist!

(b) Sei K ein kompakter und Y ein beliebiger metrischer Raum. $f : K \to Y$ sei stetig und bijektiv. Zeige, dass $f^{-1} : Y \to K$ stetig ist!