Institut für Mathematik
Prof. Dr. Carsten Trunk
Dipl.-Math. Tilman Selig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Blatt 05
28. Juni 2011

Funktionalanalysis II

im SS 2011

Besprechung in der Übung am 11.07.11

Aufgabe 16: Sei $H = L^2(0,1)$ mit dem Skalarprodukt $\langle x, y\rangle := \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}dt$ und $h \in L^\infty(0,1)$ reellwertig. Zeige, dass der Operator A, definiert durch

$$D(A) := \{x \in C^2([0,1] : x(0) = x(1) = 0\},$$
$$Ax := x'' + hx,$$

symmetrisch ist.

Aufgabe 17: Sei T ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum und $f \in B(\sigma(T))$, d.h. beschränkt und messbar. Gilt der Spektralabbildungssatz

$$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T))?$$

Aufgabe 18: Sei T ein selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H und E sein Spektralmaß. Zeige:

(a) $\lambda \in \rho(T) \quad \Leftrightarrow \quad$ Es existiert eine Umgebung $U(\lambda)$ von λ mit $E(U(\lambda)) = 0$

(b) $\exists x \neq 0 : Tx = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad E(\{\lambda\}) \neq 0$

(c) Ist λ ein isolierter Punkt von $\sigma(T)$, d.h. existiert eine Umgebung $U(\lambda)$ von λ mit $U(\lambda) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$, so ist λ ein Eigenwert von T.

Aufgabe 19: Sei T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathbb{C}^n$. Seien $\{\lambda_i : i \in \mathbb{N}\}$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von T und P_{λ_i} die Orthogonalprojektionen auf die zugehörigen Eigenräume. Für jede Borelmenge $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ setzen wir

$$E(\mathcal{B}) := \sum_{\lambda_j \in \mathcal{B}} P_{\lambda_j}.$$

Zeige:

(a) E ist ein Spektralmaß,

(b) $A = \int \lambda dE_\lambda = \sum_{\lambda_j} \lambda_j P_{\lambda_j}$.

Aufgabe 20: Sei $X = L^2(0,1)$ und

$$T : X \to X,$$
$$(Tf)(t) := tf(t).$$

T ist offensichtlich selbstadjungiert und nach Aufgabe 10 ist $\sigma(T) = [0,1]$. Für jede Borelmenge $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ setzen wir

$$E(\mathcal{B})x := \chi_{[0,1]\cap\mathcal{B}}x.$$

Zeige:

(a) E ist ein Spektralmaß,

(b) $\forall x, y \in X : \quad \langle Tx, y\rangle = \int \lambda d\langle E(\lambda)x, y\rangle.$

Aufgabe 21: Sei T ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum H. Zeige, dass gilt:

$$\forall x \in H : \quad \lim_{\mu\to\infty} i\mu(T - i\mu)^{-1}x = -x.$$

Konvergiert $i\mu(T - i\mu)^{-1}$ auch in $\mathcal{L}(H)$?