Institut für Mathematik
Prof. Dr. Carsten Trunk
Dipl.-Math. Tilman Selig

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Blatt 06
28. Juni 2011

Funktionentheorie
im SS 2011

Abgabe am 6.7.2011, Besprechung in der Übung am 13.7.2011.

Aufgabe 19: (a) Wir wollen zeigen, dass die Fouriertransformierte von $f(x) = e^{-ax^2}$, für $a, x \in \mathbb{R}$ gegeben ist durch

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}. \tag{1}$$

Dazu gehe man wie folgt vor:

(i) Zeige $\mathcal{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx$

(ii) Zeige mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+\frac{i\xi}{2a})^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$

(iii) Verwende die bekannte Tatsache, dass $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ um die Behauptung zu zeigen.

(b) Nun sei $x \in \mathbb{R}^n$. Nutze (1) und den Satz von Fubini um zu zeigen, dass für $g(x) := e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n x_i^2}$ gilt:

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \xi_i^2}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

Aufgabe 20: Bestimme die Fouriertransformierte der charakteristischen Funktion $\chi_{[-1,1]}$, definiert durch

$$\chi_{[-1,1]}(x) := \begin{cases} 1, & x \in [-1,1] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Liegt $\mathcal{F}(\chi_{[-1,1]})$ in $L^1(\mathbb{R})$?

Aufgabe 21: Sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Wir definieren für $a \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktionen $\tau_a f$ und f_λ durch

$$\tau_a f(x) := f(x-a), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
$$f_\lambda(x) := f(\frac{x}{\lambda}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Stelle die Fouriertransfomierten $\mathcal{F}(\tau_a f)$ und $\mathcal{F}(f_\lambda)$ mit Hilfe von $\mathcal{F}(f)$ dar.

Aufgabe 22: Wir betrachten die partielle Differenzialgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(t,x), & (t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

Angenommen, es existert eine Lösung u dieser Gleichung mit $u(t,\cdot) \in L^1(\mathbb{R})$ für alle $t \geq 0$. Zeige, dass die „partiell“ Fouriertransfomierte

$$U(t,\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(t,x) e^{-ix\xi} dx$$

von u der gewöhnlichen Differenzialgleichung

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}U(t,\xi) = -\xi^2 \lambda U(t,\xi), \\ U(0,\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) \end{cases} \tag{3}$$

genügt, und löse diese!

Zeige durch Rücktransformation von U, dass die Lösung u von (2) die Gesalt

$$u(t,x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\lambda t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{|x-y|^2}{4\lambda t}} dy$$

hat. *Hinweis: Verwende den (aus der Analysis bekannten) Faltungssatz!*

Satz (Faltungssatz)**.** *Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, dann ist auch die* Faltung *von f und g*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$$

eine $L^1(\mathbb{R}^n)$ Funktion und es gilt

$$\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mathcal{F}(f * g).$$