

Mathematische Methoden der Bildverarbeitung¹

(Wavelets und Filterbänke)

Prof. Dr. Hans Babovsky

Institut für Mathematik

Technische Universität Ilmenau

¹Version von WS 11/12; unvollständig!

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
1.1	Probleme der Signal- und Bildverarbeitung	3
1.2	Beispiel: Haar-Wavelets	3
1.3	Allgemeine Bemerkungen	6
2	Grundlagen der Multiskalenanalyse	9
2.1	Hilberträume und Orthonormalbasen	9
2.2	Multiskalenanalyse	12
3	Fourierreihen und -integrale	15
3.1	Fourierreihen	15
3.2	Fourierintegrale	18
3.3	Zusammenhang zwischen $L^2([0, 2\pi])$ und $L^2(\mathbb{R})$	21
4	Konstruktion der Multiskalenanalyse	25
4.1	Konstruktion einer ONS	25
4.2	Die Konstruktion von Wavelets	28
4.3	Die schnelle Wavelet-Zerlegung	37
5	Filterbänke und die FWT	41
5.1	Digitalfilter	41
5.2	PR-Filterbänke	44
5.3	Daubechie-Filter	47

Kapitel 1

Einführung

1.1 Probleme der Signal- und Bildverarbeitung

1.2 Beispiel: Haar-Wavelets

Die Wavelet-Zerlegung eines Signals wollen wir uns zunächst für das einfachste Wavelet – das Haar-Wavelet – ansehen.

Gegeben sei ein Signal $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zu einer vorgegebenen Folge von Schrittweiten $h_n = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{Z}$, wollen wir das Signal durch eine Hierarchie von Treppenfunktionen approximieren. Dies bedeutet, dass wir zu einer gegebenen Schrittweite $h > 0$ f im Intervall $[kh, (k+1)h)$ durch den Mittelwert ersetzen:

$$f_h(x) := \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} f(x) dx =: \alpha_{k,h} \quad \text{für } x \in [kh, (k+1)h) \quad (1.1)$$

Formal können wir f_h darstellen mit Hilfe der **Haar-Skalierungsfunktion**

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.2)$$

bzw. der um $k \in \mathbb{Z}$ **verschobenen** Variante

$$\phi_k(x) := \phi(x - k) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [k, k+1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.3)$$

und der um den Faktor $h > 0$ **skalierten** Variante

$$\phi_k(x/h) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [kh, (k+1)h) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.4)$$

Man überzeugt sich leicht, dass f_h die folgende Reihendarstellung besitzt:

$$f_h(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_{k,h} \phi_k(x/h) \quad (1.5)$$

Verschiebungen und Skalierungen sind wesentliche Hilfsmittel bei der Wavelet-Zerlegung.

Die vom praktischen Standpunkt entscheidende Frage zur effizienten Berechnung der Hierarchie von Treppenfunktionen ist: Wie berechnen wir am besten $f_{h/2}$, wenn f_h gegeben ist? Wir setzen zunächst $h = 1$ und $k = 0$. Für $x \in [0, 1)$ ist $f_1(x) = \alpha_{0,1}$ mit

$$\alpha_{0,1} = \int_0^1 f(x) dx \quad (1.6)$$

Die Verfeinerung $f_{1/2}$ ist auf $[0, 1)$ gegeben durch

$$f_{1/2}(x) = \begin{cases} \alpha_{0,1/2} & \text{für } x \in [0, 1/2) \\ \alpha_{1,1/2} & \text{für } x \in [1/2, 1) \end{cases} \quad (1.7)$$

mit

$$\alpha_{0,1/2} = 2 \int_0^{1/2} f(x) dx, \quad \alpha_{1,1/2} = 2 \int_{1/2}^1 f(x) dx \quad (1.8)$$

Die folgenden elementaren Beziehungen lassen sich leicht nachrechnen:

$$\alpha_{0,1/2} + \alpha_{1,1/2} = 2 \int_0^1 f(x) dx = 2\alpha_{0,1} \quad (1.9)$$

und

$$\alpha_{0,1/2} = \alpha_{0,1} + \beta, \quad \alpha_{1,1/2} = \alpha_{0,1} - \beta \quad (1.10)$$

mit

$$\beta = \alpha_{0,1} - 2 \int_{1/2}^1 f(x) dx = - \int_0^{1/2} f(x) dx - \int_{1/2}^1 f(x) dx \quad (1.11)$$

Definieren wir das **Haar-Wavelet** ψ_0 durch

$$\psi_0(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1/2) \\ -1 & \text{für } x \in [1/2, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.12)$$

so lässt sich $f_{1/2}$ auf $[0, 1]$ ganz einfach darstellen in der Form

$$f_{1/2}(x) = \alpha_{0,1} + \beta\psi_0(x) \quad (1.13)$$

Dieses Verfahren lässt sich leicht auf beliebige Intervalle verallgemeinern. Hierzu definieren wir für $k \in \mathbb{Z}$ das verschobene Wavelet

$$\psi_k(x) := \psi(x - k) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [k, k + 1/2) \\ -1 & \text{für } x \in [k + 1/2, k + 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1.14)$$

und

$$\begin{aligned} \beta_{k,h} &:= \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1)h} f(x) dx - \frac{2}{h} \int_{(k+1/2)h}^{kh} f(x) dx \\ &= \frac{1}{h} \int_{kh}^{(k+1/2)h} f(x) dx - \frac{1}{h} \int_{(k+1/2)h}^{kh} f(x) dx \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dann ist im Intervall $[kh, (k+1)h)$ $f_{h/2}$ gegeben durch

$$f_{h/2}(x) = f_h(x) + \beta_{k,h}\psi_k(x/h) \quad (1.16)$$

Das Paar Skalierungsfunktion / Wavelet stellt die zentralen Bausteine der Wavelet-Konstruktionen dar. Dabei dienen die Skalierungsfunktionen als Basis zur Reihendarstellung des Signals und das Wavelet als Hilfsmittel zum Wechsel von einer Diskretisierungsstufe zur nächsten.

Die Berechnung der gesamten Hierarchie von Treppenfunktionen eines Signals $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ – genannt **Haar-Multiskalenanalyse** – kann nun wie folgt durchgeführt werden. Gegeben sei ein Signal $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- 0-te Stufe: Berechnet werden muss

$$\alpha_{0,1} = \int_0^1 f(x) dx$$

Es ist $f_1(x) = \alpha_{0,1} \cdot \phi_0(x)$.

- 1-te Stufe: Zu berechnen ist der Wavelet-Koeffizient

$$\beta_{0,1} = \int_0^{1/2} f(x) dx - \int_{1/2}^1 f(x) dx$$

$f_{1/2}$ hat die Darstellung

$$f_{1/2}(x) = f_1(x) + \beta_{0,1} \psi_0(x) = \alpha_{0,1/2} \phi_0(2x) + \alpha_{1,1/2} \phi_1(2x)$$

mit

$$\alpha_{0,1/2} = \alpha_{0,1} - \beta_{0,1}, \quad \alpha_{1,1/2} = \alpha_{0,1} + \beta_{0,1}$$

- $(k+1)$ -te Stufe: Zu berechnen sind die Wavelet-Koeffizienten ($k = 0, \dots, 2^k - 1$)

$$\beta_{i,2^{-k}} = \int_{i \cdot 2^{-k}}^{(i+1/2) \cdot 2^{-k}} f(x) dx - \int_{(i+1/2) \cdot 2^{-k}}^{(i+1) \cdot 2^{-k}} f(x) dx$$

sowie

$$\alpha_{2i,2^{-(k+1)}} = \alpha_{i,2^{-k}} + \beta_{i,2^{-k}}, \quad \alpha_{2i+1,2^{-(k+1)}} = \alpha_{i,2^{-k}} - \beta_{i,2^{-k}}$$

1.3 Allgemeine Bemerkungen

Die Bedeutung der Wavelets in der Praxis resultiert aus der Erkenntnis, dass die Wavelet-Koeffizienten einer Multiskalenanalyse auf unterschiedlichen Diskretisierungsstufen ganz charakteristische Informationen enthalten, welche sich zur Signalbearbeitung auf unterschiedlichste Weise nutzen lassen. Hinzu kommt, dass mit der schnellen Wavelet-Transformation ein effizientes numerisches Verfahren zur Berechnung zur Verfügung steht.

Das englische Wort *wavelet* (französisch: *ondelette*) bedeutet *kleine Welle*. Die Wavelet-Theorie stellt eine Verallgemeinerung der Fourier-Theorie dar, welche die Zerlegung eines

Signals in Sinus- und Cosinus-Anteile beschreibt. Im Gegensatz hierzu haben die Basisfunktionen der Wavelet-Theorie in der Regel kompakten Träger, so dass die Wavelet-Koeffizienten etwas über *lokale* Eigenschaften des Signals aussagen.

[... historisch ...]

Die **Literatur** zu Wavelets ist mittlerweile sehr reichhaltig; eine auch nur annähernd vollständige Auflistung der nützlichen Bücher ist ausgeschlossen. Stellvertretend für viele andere sollen hier unter verschiedenen Aspekten nur wenige Werke aufgeführt werden:

Kapitel 2

Grundlagen der Multiskalenanalyse

2.1 Hilberträume und Orthonormalbasen

Wir zählen kurz wichtige mathematische Grundbegriffe auf, welche für die Vorlesung von Bedeutung sind. Die meisten werden Ihnen aus der Linearen Algebra und der (Funktional-) Analysis bekannt sein.

Im Folgenden sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum. Besitzt V ein **Skalarprodukt**, d.h. eine Abbildung $(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

- *Linearität*: Für beliebige $a, b \in \mathbb{C}$ und $\phi, \psi, \zeta \in V$ ist

$$(a\phi + b\psi, \zeta) = a(\phi, \zeta) + b(\psi, \zeta)$$

- *(Hermitesche) Symmetrie*: Für beliebige $\phi, \psi \in V$ ist

$$(\phi, \psi) = \overline{(\psi, \phi)}$$

- *Positivität*: Für beliebige $\phi \in V \setminus \{0\}$ ist

$$(\phi, \phi) > 0$$

so heißt V **Prä-Hilbertraum**. Durch

$$\|\phi\| := \sqrt{(\phi, \phi)}$$

ist eine Norm auf dem Prä-Hilbertraum V definiert. Ist V vollständig bzgl. $\|\cdot\|$ (d.h. konvergiert jede Cauchyfolge), so heißt V **Hilbertraum**.

Auf Hilberträumen gelten die wohlbekannten Rechengesetze

- *Cauchy-Schwarz-Ungleichung*: $|(\phi, \psi)| \leq \|\phi\| \cdot \|\psi\|$
- *Dreiecksungleichung*: $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$
- *Satz von Pythagoras*: $(\phi, \psi) = 0 \Rightarrow \|\phi + \psi\|^2 = \|\phi\|^2 + \|\psi\|^2$

Wir stellen kurz die für die Vorlesung wichtigen Beispiele für Hilberträume vor.

(2.1.1) Beispiele: (a) $\ell^2(\mathbb{Z})$ bezeichnet die Menge aller Folgen $\zeta : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\zeta(k)|^2 < \infty$. Auf $\ell^2(\mathbb{Z})$ sind das Skalarprodukt

$$(\zeta, \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \zeta(k) \overline{\xi(k)}$$

und die zugehörige Norm

$$\|\zeta\| = \sqrt{\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\zeta(k)|^2}$$

definiert.

(b) Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ bezeichnet $L^2([a, b])$ den Hilbertraum aller Lebesgue-messbaren, quadratisch integrierbaren Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

(c) Entsprechend bezeichnet $L^2(\mathbb{R})$ den Hilbertraum aller Lebesgue-messbaren, quadratisch integrierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit dem Skalarprodukt

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx$$

Sei I eine nicht-leere endliche oder abzählbar unendliche Menge. Ein System $\{\phi_\alpha, \alpha \in I\} \subset V \setminus \{0\}$ heißt **Orthonormalsystem (ONS)**, wenn die Elemente ϕ_α normiert und paarweise orthogonal sind, d.h. wenn für beliebige $\alpha, \beta \in I$ gilt

$$(\phi_\alpha, \phi_\beta) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist $\{\phi_\alpha, \alpha \in I\}$ ein ONS und

$$f = \sum_{\alpha \in I} c_\alpha \phi_\alpha \in V \quad (2.1)$$

so lassen sich die Koeffizienten c_α und die Norm $\|f\|$ leicht berechnen. Es gilt nämlich

$$c_\alpha = (f, \phi_\alpha), \quad \|f\| = \sqrt{\sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2}$$

Die Menge aller $f \in V$, welche sich in der Form (2.1) darstellen lassen, wird mit

$$\text{span}(\phi_\alpha, \alpha \in I)$$

bezeichnet. $\text{span}(\phi_\alpha, \alpha \in I)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von V . Ist

$$\text{span}(\phi_\alpha, \alpha \in I) = V$$

so heißt $\{\phi_\alpha, \alpha \in I\}$ **Orthonormalbasis (ONB)** von V . Dies ist genau dann der Fall, wenn beliebige $f \in V$ eine Darstellung der Form (2.1) haben, wobei die Folge $(c_\alpha)_{\alpha \in I}$ quadratisch summierbar ist, d.h.

$$\sum_{\alpha \in I} |c_\alpha|^2 < \infty$$

Ist A eine beliebige Teilmenge von V , so heißt

$$A^\perp = \{\phi \in V, (\phi, \psi) = 0 \quad \forall \psi \in A\}$$

das **orthogonale Komplement** von A . A^\perp ist ein abgeschlossener Unterraum von V . Ist $0 \in A$, so ist $A \cap A^\perp = \{0\}$, andernfalls $A \cap A^\perp = \emptyset$.

Ist A ein abgeschlossener Unterraum von V , so ist

$$V = A \oplus_\perp A^\perp$$

Das bedeutet, dass sich jedes Element $f \in V$ eindeutig in der Form schreiben lässt

$$f = \phi + \psi, \quad \phi \in A, \psi \in A^\perp$$

wobei natürlich gilt $(\phi, \psi) = 0$. Sind V_0, V_1 abgeschlossene Unterräume von V , so gibt es einen abgeschlossenen Unterraum W_0 von V mit

$$V_0 \oplus_\perp W_0 = V_1$$

W_0 ist gegeben durch

$$W_0 = V_0^\perp \cap V_1$$

2.2 Multiskalenanalyse

(2.2.1) Definition: Eine Folge von abgeschlossenen Unterräumen $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ des $L^2(\mathbb{R})$ heißt **Multiskalenanalyse (MSA)**, wenn gilt

- (a) $V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$
- (b) $f(x) \in V_j \Leftrightarrow f(2x) \in V_{j+1}$
- (c) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$
- (d) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$
- (e) Es existiert $\phi \in V_0$ (**Skalierungsfunktion**) derart, dass $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB von V_0 ist. Wir schreiben $\phi_{0,k}(x) := \phi(x - k)$.

Häufig benötigen wir eine technische Bedingung der Skalierungsfunktion.

(2.2.2) Definition: Die MSA $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ mit Skalierungsfunktion ϕ heißt **lokalisiert**, falls

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^m |\phi(x)|^2 dx < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

(2.2.3) Bemerkungen: (a) Offenbar ist eine MSA eindeutig definiert durch eine zugehörige Skalierungsfunktion ϕ . Skalierungsfunktionen mit kompaktem Träger führen immer auf lokalisierte MSA. Ein Beispiel für eine nicht-lokalisierte MSA ist gegeben durch $\phi(x) = \exp(i\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Ist W_0 das orthogonale Komplement von V_0 in V_1 , d.h. $V_1 = V_0 \oplus_\perp W_0$, und existiert ein $\psi \in W_0$ derart, dass $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB von W_0 ist, so heißt ψ (**Mutter-Wavelet**) zur Skalierungsfunktion ϕ . Wir definieren

$$\psi_{j,k}(x) := 2^{j/2} \cdot \psi(2^j x - k) \quad (2.3)$$

Nach Voraussetzung ist $\{\psi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB von W_j . (Beweis ?)

(c) Zu einer Skalierungsfunktion kann es mehrere verschiedene Wavelets geben.

Ziel wird es sein, Funktionen $f \in L^2(\mathbb{R})$ in folgende Form zu zerlegen

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_{0,k} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \psi_{j,k} \quad (2.4)$$

Wir werden sehen, dass die Koeffizienten aus Skalarprodukten berechnet werden können:

$$c_k = (f, \phi_{0,k}), \quad d_{j,k} = (f, \psi_{j,k}) \quad (2.5)$$

c_k beschreibt Integrale von f auf der größten betrachteten Ebene, während $d_{j,k}$ Details von f der Stufe j liefert.

Eine wichtige Rolle bei der Konstruktion von Skalierungsfunktionen und Wavelets liefert die folgende Beziehung.

(2.2.4) Satz: Sei ϕ Skalierungsfunktion einer MSA. Dann gibt es eine Folge $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{R})$ derart, dass

$$\phi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k) \quad (2.6)$$

Diese Gleichung heißt **Skalierungsgleichung**.

Beweis: Da $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB von V_0 ist, sieht man wegen (2.2.1)(b) leicht, dass auch $\{\sqrt{2}\phi(2 \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ eine ONB von V_1 ist. Wegen $\phi \in V_0 \subset V_1 \subset L^2(\mathbb{R})$ ist

$$\phi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(2x - k)$$

und es ist

$$\|\phi\|_2^2 = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |h_k|^2 < \infty \quad \square$$

Das geeignete Mittel zur Arbeit mit der Skalierungsgleichung sind Fourierreihen.

Kapitel 3

Fourierreihen und -integrale

3.1 Fourierreihen

Ist $\phi \in L^1([0, 2\pi])$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist

$$\int_0^{2\pi} |\phi(x) \exp(i\alpha x)| dx = \int_0^{2\pi} |\phi(x)| dx < \infty \quad (3.1)$$

(3.1.1) Definition: Ist $\phi \in L^1([0, 2\pi])$, so ist für $n \in \mathbb{Z}$ der n -te **Fourierkoeffizient** von ϕ definiert durch

$$\phi^\wedge(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \phi(x) \exp(-inx) dx \quad (3.2)$$

Dagegen heißt

$$\phi^\vee(n) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \phi(\omega) \exp(in\omega) d\omega \quad (3.3)$$

der n -te **inverse Fourierkoeffizient** von ϕ .

Wir haben in der Definition verschiedene Integrationsvariablen benutzt um anzudeuten, dass Fourierkoeffizienten üblicherweise für Funktionen im Orts- (oder Zeit-) Bereich, dagegen inverse Fourierkoeffizienten für Funktionen im Frequenzbereich definiert sind. Beide Definitionen unterscheiden sich nur durch das Vorzeichen im Exponenten. Insbesondere ist

$$\phi^\wedge(n) = \phi^\vee(-n) \quad (3.4)$$

Wegen $L^2([0, 2\pi]) \subset L^1([0, 2\pi])$ sind (inverse) Fourierkoeffizienten auch in $L^2([0, 2\pi])$ definiert. Aus der Analysis ist bekannt:

(3.1.2) Satz: (a) Das System $\{\exp(inx)/\sqrt{2\pi}, n \in \mathbb{Z}\}$ ist eine ONB von $L^2([0, 2\pi])$.
 (b) Die Abbildung

$$\phi \rightarrow (\phi^\wedge(n))_{n \in \mathbb{Z}} \quad (3.5)$$

ist eine **Isometrie** zwischen $L^2([0, 2\pi])$ und $\ell^2(\mathbb{Z})$, d.h. für $\phi, \psi \in L^2([0, 2\pi])$ gilt

$$(\phi, \psi)_{L^2([0, 2\pi])} = \int_0^{2\pi} \phi(x) \overline{\psi(x)} dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi^\wedge(n) \overline{\psi^\wedge(n)} = (\phi^\wedge, \psi^\wedge)_{\ell^2(\mathbb{Z})} \quad (3.6)$$

Insbesondere gilt die **Parsevalsche Gleichung**

$$\|\phi\|_{L^2} = \|\phi^\wedge\|_{\ell^2} \quad (3.7)$$

(c) Des weiteren gilt für $\phi \in L^2([0, 2\pi])$

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi^\wedge(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx) \quad \text{f.ü.} \quad (3.8)$$

$$\phi(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi^\vee(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-in\omega) \quad \text{f.ü.} \quad (3.9)$$

Die beiden Reihen auf den rechten Seiten von (3.8) und (3.9) heißen **Fourierreihe** bzw. **inverse Fourierreihe** von ϕ .

Ableitungen in $L^2([0, 2\pi])$:

Mit $C_{\text{per}}^k([0, 2\pi])$, $k \in \mathbb{N}$, bezeichnen wir die Menge der k -mal stetig differenzierbaren 2π -periodischen Funktionen auf \mathbb{R} . (“ 2π -periodisch” bedeutet: für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\phi(x) = \phi(x + 2\pi)$.)

Ist $\phi \in C_{\text{per}}^k$, so ist $\phi|_{[0, 2\pi]} \in L^2([0, 2\pi])$, und durch partielle Integration folgt wegen $\phi(0) = \phi(2\pi)$

$$\begin{aligned} (\phi')^\wedge(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi'(x) \exp(-inx) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n}} \phi(x) \exp(-inx) \Big|_0^{2\pi} + in \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \phi(x) \exp(-inx) dx = in \cdot \phi^\wedge(n) \end{aligned} \quad (3.10)$$

Entsprechend kann durch Induktion leicht gezeigt werden, dass für alle $1 \leq l \leq k$ gilt

$$(\phi^{(l)})^\wedge(n) = (in)^l \cdot \phi^\wedge(n) \quad (3.11)$$

Es folgt

$$\phi^{(l)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^l \phi^\wedge(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx) \quad (3.12)$$

Diese Beziehung ermöglicht es uns, den Begriff der Ableitung auf Funktionen in $L^2([0, 2\pi])$ zu verallgemeinern.

(3.1.3) Definition: (a) Der **Sobolev-Raum** $H^k([0, 2\pi])$ **der Ordnung** $k \in \mathbb{N}$ ist definiert als die Menge der Funktionen $\phi \in L^2([0, 2\pi])$ mit

$$\|\phi\|_{H^k}^2 := \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^k)^2 \cdot |\phi^\wedge(n)|^2 < \infty \quad (3.13)$$

Offenbar ist für beliebige $k \in \mathbb{N}_0$ $H^{k+1}([0, 2\pi]) \subset H^k([0, 2\pi])$.

(b) Für $\phi \in H^k([0, 2\pi])$ ist die **verallgemeinerte k -te Ableitung** $\phi^{(k)} \in L^2([0, 2\pi])$ definiert durch

$$\phi^{(k)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (in)^k \phi^\wedge(n) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(inx) \quad (3.14)$$

(3.1.4) Bemerkungen: (a) Offenbar ist $C_{\text{per}}^k([0, 2\pi]) \subset H^k([0, 2\pi])$. Insbesondere ist für $\phi \in C_{\text{per}}^k([0, 2\pi])$

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + |n|^k)^2 \cdot |\phi^\wedge(n)|^2 < \infty$$

(b) Mit dem Skalarprodukt

$$(\phi, \psi)_{H^k} := \sum_{l=0}^k (\phi^{(l)}, \psi^{(l)})_{L^2([0, 2\pi])} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{l=0}^k n^{2l} \right) \cdot \phi^\wedge(n) \overline{\psi^\wedge(n)} \quad (3.15)$$

wird $H^k([0, 2\pi])$ zu einem Hilbertraum.

Faltungen:

Ist $\phi \in L^1([0, 2\pi])$, so denken wir uns ϕ periodisch auf ganz \mathbb{R} fortgesetzt durch

$$\phi(x + k \cdot 2\pi) := \phi(x) \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad (3.16)$$

(Vorsicht: Ist $\phi \neq 0$, so ist $\phi \notin L^1(\mathbb{R})$!) Die **Faltung** zweier Funktionen $\phi, \psi \in L^1([0, 2\pi])$ definieren wir nun durch

$$\phi * \psi(x) := \int_0^{2\pi} \phi(x - y) \psi(y) dy \quad \forall x \in [0, 2\pi] \quad (3.17)$$

Es gelten die beiden folgenden wichtigen Aussagen.

(3.1.5) Lemma: (a) Für $\phi, \psi \in L^1([0, 2\pi])$ ist $\phi * \psi \in L^1([0, 2\pi])$ und es gilt

$$\|\phi * \psi\|_{L^1([0, 2\pi])} \leq \|\phi\|_{L^1([0, 2\pi])} \cdot \|\psi\|_{L^1([0, 2\pi])} \quad (3.18)$$

(b) Die Fourierkoeffizienten von $\phi * \psi$ sind gegeben durch

$$(\phi * \psi)^\wedge(n) = \sqrt{2\pi} \phi^\wedge(n) \psi^\wedge(n) \quad (3.19)$$

Beweis: Zu (a): Wegen des Satzes von Fubini und der Periodizität von ϕ ist (mit $z = x - y$)

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\phi * \psi(x)| dx &\leq \int_0^{2\pi} |\phi(x-y)\psi(y)| dy dx \\ &= \int_{y=0}^{2\pi} |\psi(y)| \cdot \underbrace{\int_{z=-y}^{2\pi-y} |\phi(z)| dz}_{=\int_0^{2\pi} |\phi(z)| dz} = \|\phi\|_{L^1} \cdot \|\psi\|_{L^1} \end{aligned}$$

Zu (b):

$$\begin{aligned} (\phi * \psi)^\wedge(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\pi} \phi(x-y)\psi(y) dy \right) \exp(-inx) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=0}^{2\pi} \psi(y) \exp(-iny) dy \int_{x=0}^{2\pi} \underbrace{\phi(x-y) \exp(-in(x-y))}_{2\pi\text{-periodisch}} dx dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{y=0}^{2\pi} \psi(y) \exp(-iny) \underbrace{\int_0^{2\pi} \phi(z) \exp(-inz) dz}_{=\sqrt{2\pi} \phi^\wedge(n)} dy \quad \square \end{aligned}$$

3.2 Fourierintegrale

Ist $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, so ist

$$\int_{\mathbb{R}} |\phi(x) \exp(i\alpha x)| dx = \int_{\mathbb{R}} |\phi(x)| dx < \infty \quad (3.20)$$

(3.2.1) Definition: Ist $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, so ist die **Fouriertransformierte** von ϕ definiert als Funktion auf \mathbb{R} durch

$$\phi^\wedge(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \exp(-i\omega x) dx \quad (3.21)$$

Die Funktion auf \mathbb{R} , definiert durch

$$\phi^\vee(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \quad (3.22)$$

heißt die **inverse Fouriertransformierte** von ϕ .

$\phi^\wedge(\omega)$ und $\phi^\vee(x)$ werden gelegentlich auch mit $\mathcal{F}\phi(\omega)$ bzw. mit $\mathcal{F}^{-1}\phi(x)$ bezeichnet. Nach dieser Definition müssten wir \mathcal{F} als Abbildung von $L^1(\mathbb{R})$ nach $L^\infty(\mathbb{R})$ interpretieren. Diese Ungleichheit zwischen Definitionsbereich und Wertebereich ist ungünstig. Besser ist es, einen anderen Definitionsbereich zu wählen.

In der Analysis zeigt man:

(3.2.2) Satz: Ist $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, so ist $\phi^\wedge \in L^2(\mathbb{R})$. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ist Isometrie, d.h. für $\phi, \psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ist

$$(\phi, \psi)_{L^2(\mathbb{R})} = (\phi^\wedge, \psi^\wedge)_{L^2(\mathbb{R})} \quad (3.23)$$

Insbesondere ist

$$\|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\phi^\wedge\|_{L^2(\mathbb{R})} \quad (3.24)$$

Des weiteren ist für $\phi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$$\phi = (\phi^\wedge)^\vee = (\phi^\vee)^\wedge \quad (3.25)$$

Wegen der Isometrieeigenschaft und der Dichtheit von $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ in $L^2(\mathbb{R})$ kann \mathcal{F} stetig auf ganz $L^2(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden. Die Aussagen des Satzes gelten auch für die Erweiterung.

Ableitungen in $L^2(\mathbb{R})$:

Mit $C_0^k(\mathbb{R})$ ($k \in \mathbb{N}_0$) bezeichnen wir die k -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R} mit kompaktem Träger. Ist $\phi \in C_0^k$, so folgt mit partieller Integration

$$(\phi')^\wedge(\omega) = (i\omega) \cdot \phi^\wedge(\omega) \quad (3.26)$$

und durch Induktion für $1 \leq l \leq k$

$$(\phi^{(l)})^\wedge(\omega) = (i\omega)^l \cdot \phi^\wedge(\omega) \quad (3.27)$$

Wegen $\phi^{(l)} \in C_0^0(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ und der Isometrieeigenschaft von \mathcal{F} ist auch $(\phi^{(l)})^\wedge \in L^2(\mathbb{R})$ und es folgt

$$\phi^{(l)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (i\omega)^l \phi^\wedge(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \quad (3.28)$$

Wieder gibt uns diese Beobachtung die Möglichkeit, den Ableitungsbegriff auf $L^2(\mathbb{R})$ zu verallgemeinern.

(3.2.3) Definition: (a) Der **Sobolev-Raum $H^k(\mathbb{R})$ der Ordnung $k \in \mathbb{N}$** ist definiert als die Menge der $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ mit

$$\|\phi\|_{H^k}^2 := \int_{\mathbb{R}} (1 + |\omega|^k)^2 \cdot |\phi^\wedge(\omega)|^2 d\omega < \infty \quad (3.29)$$

(b) Für $\phi \in H^k(\mathbb{R})$ ist die **verallgemeinerte k -te Ableitung $\phi^{(k)} \in L^2(\mathbb{R})$** definiert durch

$$\phi^{(k)}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (i\omega)^k \phi^\wedge(\omega) \exp(i\omega x) d\omega \quad (3.30)$$

(3.2.4) Bemerkung: Mit dem Skalarprodukt

$$(\phi, \psi) := \sum_{l=0}^k \int_{\mathbb{R}} \phi^{(l)}(x) \overline{\psi^{(l)}(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{l=0}^k \omega^{2l} \right) \cdot \phi^\wedge(\omega) \overline{\psi^\wedge(\omega)} d\omega \quad (3.31)$$

wird H^k wieder zu einem Hilbertraum.

Faltungen:

Sind $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$, so sieht man leicht, dass auch für festes $x \in \mathbb{R}$ die um x verschobene und gespiegelte Funktion $\phi(x - \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$. Daher ist

$$|(\phi, \psi(x - \cdot))| \leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} < \infty \quad (3.32)$$

Die Faltung von ϕ und ψ , definiert durch

$$\phi * \psi(x) := \int_{\mathbb{R}} \phi(x-y)\psi(y)dy \quad (3.33)$$

ist also als Funktion in $L^\infty(\mathbb{R})$ definiert. Genauer gilt (ohne Beweis)

(3.2.5) Lemma: (a) Für $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R})$ ist $\phi * \psi \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Ist $\phi * \psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, so gilt

$$(\phi * \psi)^\wedge(\omega) = \sqrt{2\pi} \cdot \phi^\wedge(\omega)\psi^\wedge(\omega) \quad (3.34)$$

3.3 Zusammenhang zwischen $L^2([0, 2\pi])$ und $L^2(\mathbb{R})$

(3.3.1) Lemma: Ist $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, so ist

$$s(x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(x + 2\pi n) \quad (3.35)$$

wohldefiniert f.ü. und 2π -periodisch. Die Einschränkung $s|_{[0, 2\pi]}$ liegt in $L^1([0, 2\pi])$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |s(x)|dx &\leq \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\phi(x + 2\pi n)|dx = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\phi(x + 2\pi n)|dx \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |\phi(y)|dy = \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Damit ist $s(x)$ für fast alle $x \in [0, 2\pi]$ definiert und für $k \in \mathbb{Z}$ gilt

$$s(x + 2\pi k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(x + 2\pi(k + n)) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(x + 2\pi m) = s(x) \quad \square$$

Wir können nun leicht einen Zusammenhang zwischen der Fouriertransformierten von ϕ und der Fourierreihe von $s|_{[0, 2\pi]}$ herstellen.

(3.3.2) Lemma: Seien ϕ und s wie oben. Seien ϕ^\wedge die Fouriertransformierte von ϕ und für $k \in \mathbb{Z}$ $s^\wedge(k)$ der k -te Fourierkoeffizient von $s|_{[0, 2\pi]}$. Dann ist

$$s^\wedge(k) = \phi^\wedge(k) \quad (3.36)$$

Die selbe Beziehung gilt auch für die inverse Fouriertransformierte ϕ^\vee und die inversen Fourierkoeffizienten s^\vee .

Beweis: Mit Substitution $y := x + 2\pi n$ folgt

$$\begin{aligned} s^\wedge(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(x + 2\pi n) \exp(-ikx)}_{=s(x)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \phi(y) \exp(-iky) \underbrace{\exp(2\pi ikn)}_{=1} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(y) \exp(-iky) dy = \phi^\wedge(k) \end{aligned}$$

Für die inversen Transformierten folgt die Beziehung aus

$$s^\vee(k) = s^\wedge(-k) = \phi^\wedge(-k) = \phi^\vee(k) \quad \square$$

Eine äußerst wichtige Rolle in praktischen Anwendungen spielt das **Shannonsche Abtasttheorem**, welches besagt, dass man gewisse Funktionen völlig rekonstruieren kann aus der Kenntnis ihrer Funktionswerte an diskreten (äquidistanten) Abtastpunkten.

Der **Träger** $\text{supp}(\phi)$ einer Funktion ϕ auf \mathbb{R} ist definiert durch den Abschluss der Menge aller Punkte, auf denen die Funktion ungleich 0 ist:

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R} : \phi(x) \neq 0\}} \quad (3.37)$$

Eine Funktion $\phi \in L^1(\mathbb{R})$, deren Fouriertransformierte ϕ^\wedge kompakten Träger hat, heißt **bandbegrenzt**. Auf \mathbb{R} definieren wir die Funktion sinc durch

$$\text{sinc}(x) := \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \quad (3.38)$$

Nach den Regeln von Bernoulli-L'Hôpital ist $\text{sinc}(0) = 1$.

(3.3.3) Satz (Shannonsches Abtasttheorem): Sei $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ und $\text{supp}(\phi^\wedge) \subseteq [-\pi f, \pi f]$, $f > 0$. Dann gilt mit $\Delta t := 1/f$

$$\phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi(n\Delta t) \cdot \text{sinc}((x - n\Delta t)/\Delta t) \quad (3.39)$$

Beweis: Sei $\phi_{\text{per},f}^\wedge(\cdot)$ die $2\pi f$ -Periodisierung von ϕ :

$$\phi_{\text{per},f}^\wedge(\omega) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \phi^\wedge(\omega + 2\pi f n)$$

Da ϕ^\wedge durch $\|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})}$ beschränkt ist und kompakten Träger hat, ist $\phi^\wedge \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Damit ist die Einschränkung $\phi_{\text{per},f}^\wedge|_{[-\pi f, \pi f]} \in L^2([-\pi f, \pi f])$. Es ist günstig, auch die reskalierte Version

$$\phi_{\text{per},f}^{\wedge,(0)}(\omega) := \phi_{\text{per},f}^\wedge(f \cdot \omega)$$

zu betrachten, welche 2π -periodisch ist und deren Einschränkung auf eine Periode in $L^1([-\pi, \pi]) \cap L^2([-\pi, \pi])$ liegt. Es ist

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\text{per},f}^{\wedge,(0)}(\omega) \exp(ik\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}f} \int_{-\pi f}^{\pi f} \phi_{\text{per},f}^\wedge(\omega) \exp(ik\omega/f) d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}f} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{(2n-1)\pi f}^{(2n+1)\pi f} \phi^\wedge(\omega) \exp(ik\omega/f) d\omega = \frac{1}{f} \phi(k/f) \end{aligned}$$

Damit ist $\phi(k/f)/f$ der $(-k)$ -te Fourierkoeffizient von $\phi_{\text{per},f}^{\wedge,(0)}$. Nach Satz (3.1.2)(c) ist

$$\phi_{\text{per},f}^{\wedge,(0)}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{f} \phi(-k/f) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ik\omega) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(k\Delta t) \exp(-ik\omega)$$

Für die $2\pi f$ -Periodisierung $\phi_{\text{per},f}^\wedge$ gilt daher für $\omega \in [-\pi f, \pi f]$

$$\phi^\wedge(\omega) = \phi_{\text{per},f}^\wedge(\omega) = \phi_{\text{per},f}^{\wedge,(0)}(\omega/f) = \frac{\Delta t}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(k\Delta t) \exp(-ik\Delta t\omega)$$

Für die bandbegrenzte Funktion ϕ gilt dagegen

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi^\wedge(\omega) \exp(ix\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi f}^{\pi f} \phi^\wedge(\omega) \exp(ix\omega) d\omega \\ &= \frac{\Delta t}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \phi(k\Delta t) \cdot \int_{-\pi f}^{\pi f} \exp(-ik\Delta t\omega) \cdot \exp(ix\omega) d\omega \end{aligned}$$

Die Behauptung des Satzes folgt aus

$$\begin{aligned} \int_{-\pi f}^{\pi f} \exp(i(x - k\Delta t)\omega) d\omega &= \frac{1}{i \cdot (x - k\Delta t)} \cdot (\cos((x - k\Delta t)\omega) + i(\sin((x - k\Delta t)\omega))|_{-\pi f}^{\pi f}) \\ &= \frac{2}{x - k\Delta t} \cdot \sin(\pi f(x - k\Delta t)) \quad \square \end{aligned}$$

Kapitel 4

Konstruktion der Multiskalenanalyse

4.1 Konstruktion einer ONS

Ausgangspunkt der folgenden Konstruktion ist die Fouriertransformierte Version der Skalierungsgleichung. Ist ϕ Skalierungsfunktion einer MSA, so ist $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ und aus den Rechenregeln für die Fouriertransformation folgt

$$(\phi(2 \cdot -k))^\wedge(\omega) = \frac{1}{2} \exp(-i(\omega/2)k) \cdot \hat{\phi}(\omega/2) \quad (4.1)$$

und wegen Satz (2.2.4)

$$\hat{\phi}(\omega) = \hat{\phi}(\omega/2) \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-i(\omega/2)k) \right) \quad (4.2)$$

Diese Zusammenhänge sehen wir uns jetzt genauer an.

(4.1.1) Lemma: Sei $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\} \text{ ist ONS} \Leftrightarrow 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi] \quad (4.3)$$

Beweis: Offenbar ist $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ genau dann, wenn

$$\int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}^2(\xi)| d\xi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi j}^{2\pi(j+1)} |\hat{\phi}^2(\xi)| d\xi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\phi}^2(\xi + 2\pi j)| d\xi < \infty$$

Dies bedeutet aber gerade, dass

$$\alpha(\xi) := 2\pi \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}^2(\xi + 2\phi j)| \in L^1([0, 2\pi])$$

Zu beweisen bleibt $\alpha(\cdot) \equiv 1$ – oder äquivalent –

$$\hat{\alpha}(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \alpha(\xi) \exp(-in\xi) dx = \sqrt{2\pi} \cdot \delta_{0,n}$$

Nach der Definition von α und der Parsevalformel ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} \delta_{0,n} &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\phi}^2(\xi + 2\pi j)| \exp(-in\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} |\hat{\phi}^2(\xi)| \exp(-in\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\xi) \cdot \overline{\hat{\phi}(\xi)} \exp(in\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}^{-1} \hat{\phi}(x) \cdot \overline{\mathcal{F}^{-1}(\hat{\phi}(\cdot) \exp(in\cdot))}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \cdot \overline{\phi(x-n)} dx \end{aligned}$$

Dies bedeutet aber gerade, dass $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ ONS ist. \square

(4.1.2) Satz: Die Funktion $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ erfülle die Lokalisierungseigenschaft (2.1),

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |x|)^m |\phi(x)|^2 dx < \infty \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ sei ONS und V_j sei der von $\{2^{j/2} \phi(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ aufgespannte Unterraum. Dann gilt $V_j \subset V_{j+1}$ genau dann, wenn es eine 2π -periodische Funktion $m_0 \in C^\infty$ gibt derart, dass

$$\hat{\phi}(2\omega) = m_0(\omega) \cdot \hat{\phi}(\omega) \tag{4.4}$$

Beweis: “ \Rightarrow ” *Schritt 1:* Konstruktion von m_0 .

Wegen $V_{-1} \subset V_0$ und $\phi(\cdot/2) \in V_{-1}$ ist

$$\frac{1}{2} \phi(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(x - k)$$

mit

$$h_k = \left(\frac{1}{2} \phi(\cdot/2), \phi(\cdot - k) \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \phi(x/2) \overline{\phi(x - k)} dx$$

Wegen

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \phi(\cdot/2) \right)^\wedge(\omega) &= \hat{\phi}(2\omega) \\ (\phi(\cdot - k))^\wedge(\omega) &= \exp(-ik\omega) \cdot \hat{\phi}(\omega) \end{aligned}$$

folgt

$$\hat{\phi}(2\omega) = \underbrace{\left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\omega) \right)}_{=: m_0(\omega)} \cdot \hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega) \cdot \hat{\phi}(\omega)$$

Schritt 2: $m_0 \in C^\infty$.

Hinreichend hierfür ist, dass für alle $m \in \mathbb{N}$ die Folge h_k für $k \rightarrow \infty$ schneller als $|k|^{-m}$ abfällt. Sei $m \in \mathbb{N}$. Wegen der Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|(u, v)| \leq \|u\|_2 \|v\|_2$ ist

$$\begin{aligned} |h_k| &= \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}} \phi(x/2) \overline{\phi(x-k)} dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{|x| \leq |k|/2} |\phi(x/2)| \cdot |\phi(x-k)| dx + \int_{|x| > |k|/2} |\phi(x/2)| \cdot |\phi(x-k)| dx \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \underbrace{\left(\int_{|x| \leq |k|/2} |\phi(x/2)|^2 dx \right)^{1/2}}_{\leq \sqrt{2} \text{ wg. } \|\phi\|_2=1} \cdot \left(\int_{|x| \leq |k|/2} |\phi(x-k)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\int_{|x| > |k|/2} |\phi(x/2)|^2 dx \right)^{1/2} \cdot \underbrace{\left(\int_{|x| > |k|/2} |\phi(x-k)|^2 dx \right)^{1/2}}_{\leq 1} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{|x| \leq |k|/2} |\phi(x-k)|^2 dx \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \left(\int_{|x| > |k|/2} |\phi(x/2)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Der zweite Term lässt sich mit $y = x/2$ umformen in

$$\frac{1}{2} \left(\int_{|x| > |k|/2} |\phi(x/2)|^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{|y| > |k|/4} |\phi(y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

und der erste mit $y = x - k$ in

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{|x| \leq |k|/2} |\phi(x-k)|^2 dx \right)^{1/2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{|y+k| \leq |k|/2} |\phi(y)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\int_{|y| \geq |k|/2} |\phi(y)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} |h_k| &\leq \sqrt{2} \cdot \left(\int_{|x| \geq |k|/4} |\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{2} \left(\int_{|x| \geq |k|/4} \underbrace{(1+|x|)^{-2m}}_{\leq (1+|k|/4)^{-2m}} \cdot (1+|x|^2)^{2m} |\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sqrt{2}(1 + |k|/4)^{-m} \cdot \underbrace{\left(\int_{|x| \geq |k|/4} (1 + |x|^2)^{2m} |\phi(x)|^2 dx \right)^{1/2}}_{=: C_m < \infty} \\ &\leq \frac{\sqrt{2} \cdot 4^m \cdot C_m}{(1 + |k|)^m} \end{aligned}$$

“ \Leftarrow ” Sei $m_0 \in C_{\text{per}}^\infty([0, 2\pi])$. Dann ist $m_0 \in H^\ell([0, 2\pi])$ für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ und die Folge $(\hat{m}_0(k))_{k \in \mathbb{Z}}$ ist in $\ell^2(\mathbb{Z})$ und fällt schneller als jede Potenz k^n . Aus

$$\hat{\phi}(2\omega) = m_0(\omega) \hat{\phi}(\omega) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{m}_0(k) \exp(ik\omega) \right) \cdot \hat{\phi}(\omega)$$

folgt durch Anwendung der inversen Fouriertransformation

$$\frac{1}{2} \phi(x/2) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{m}_0(k) \phi(x+k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \phi(x-k)$$

mit $h_k = \hat{m}_0(-k) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Damit ist $\phi(\cdot/2) \in V_0$ und daher $V_{-1} \subset V_0$. Dies überträgt sich auf $V_j \subset V_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$. \square

(4.1.3) Satz: Unter den Voraussetzungen des Satzes (4.1.2) gilt

(a) $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

(b) $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j$ ist dicht in $L^2(\mathbb{R})$ genau dann, wenn $|\hat{\phi}(0)| = 1/\sqrt{2\pi}$.

Beweis: [später]

Die Beziehung

$$|\hat{\phi}(0)| = 1/\sqrt{2\pi} \tag{4.5}$$

wird im Folgenden immer vorausgesetzt.

4.2 Die Konstruktion von Wavelets

Die Argumente des Satzes (2.2.4) und zu Beginn von Abschnitt 4.1 kann auch auf das Mutterwavelet ψ angewendet werden. Da $\psi \in W_0 \subset V_1$ und $\{\phi(2\cdot -k), k \in \mathbb{Z}\}$ eine Basis von V_1 ist, besitzt ψ eine Darstellung der Form

$$\psi(x) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k) \tag{4.1}$$

Durch Fouriertransformation erhalten wir eine Beziehung der Form

$$\hat{\psi}(\omega) = \hat{\phi}(\omega/2) \cdot \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \exp(-i(\omega/2)k) \right) =: \hat{\phi}(\omega/2) \cdot m_1(\omega/2) \quad (4.2)$$

Wir wollen den Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen $m_0(\omega)$ und $m_1(\omega)$ näher untersuchen. Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden zentralen Ergebnisses.

(4.2.1) Satz: Sei ϕ die Skalierungsfunktion einer lokalisierten MSA $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$, für welche die Beziehung (4.4)

$$\hat{\phi}(2\omega) = m_0(\omega) \cdot \hat{\phi}(\omega)$$

gilt. Definiere

$$m_1(\omega) := \exp(-i\omega) \cdot \overline{m_0(\omega + \pi)} \quad (4.3)$$

Dann wird durch

$$\hat{\psi}(2\omega) = m_1(\omega) \cdot \hat{\phi}(\omega) \quad (4.4)$$

ein Wavelet für die MSA definiert. Definieren wir für $j \in \mathbb{Z}$

$$W_j := \overline{\text{span}(2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k), k \in \mathbb{Z})} \quad (4.5)$$

so gilt also insbesondere gilt

$$V_j \otimes_{\perp} W_j = V_{j+1} \quad (4.6)$$

Wir unterteilen den Beweis in mehrere Zwischenschritte. Zunächst bemerken wir, dass wegen Satz (4.1.2) m_1 eine 2π -periodische C^∞ -Funktion ist und daher wie in Satz (4.1.2) folgt $W_j \subset V_{j+1}$. Des weiteren leiten wir leicht aus der Darstellung

$$m_0(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\omega) \quad (4.7)$$

für m_0 die folgende Darstellung für m_1 her

$$m_1(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{h_{1-k}} \exp(-ik\omega) \quad (4.8)$$

(4.2.2) **Lemma:** Es gelten die Identitäten

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \quad \forall \omega \in [0, \pi] \quad (4.9)$$

$$m_0(0) = 1 \quad (4.10)$$

Beweis: $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ ist ONS. Aus Lemma (4.1.1) folgt mit der 2π -Periodizität von m_0

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(2\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + \pi k)|^2 \cdot |\hat{\phi}(\omega + \pi k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + 2\pi k)|^2 \cdot |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega + \pi(2k + 1))|^2 \cdot |\hat{\phi}(\omega + \pi(2k + 1))|^2 \\ &= |m_0(\omega)|^2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + \pi + 2\pi k)|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} (|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2) \end{aligned}$$

Außerdem ist wegen (4.4)

$$m_0(0)\hat{\phi}(0) = \hat{\phi}(2 \cdot 0) = \hat{\phi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx \neq 0$$

(warum “ $\neq 0$ ”?) und daher $m_0(0) = 1$. \square

(4.2.3) **Lemma:** $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ ist ONB von W_0 .

Beweis: Nach Definition von W_0 muss nur gezeigt werden, dass $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ ein ONS ist. Hinreichend hierfür ist nach Lemma (4.1.1), dass $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 = 1/2\pi$. Dies folgt aus der Definitionsgleichung für ψ und der Definition von m_1 aus

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_1(\omega/2 + \pi k)|^2 \cdot |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega/2 + \pi(k + 1))|^2 \cdot |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega/2 + \pi(2k + 1))|^2 \cdot |\hat{\phi}(\omega/2 + 2\pi k)|^2 \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |m_0(\omega/2 + \pi(2k + 2))|^2 \cdot |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi(2k + 1))|^2 \\ &= |m_0(\omega/2 + \pi)|^2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega/2 + 2\pi k)|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + + |m_0(\omega/2)|^2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi + 2\pi k)|^2 \\
& = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left(|m_0(\omega/2 + \pi)|^2 + |m_0(\omega/2)|^2 \right)}_{=1 \text{ nach Lemma (4.2.5)}} = \frac{1}{2\pi} \quad \square
\end{aligned}$$

(4.2.4) **Lemma:** $W_0 \perp V_0$.

Beweis: Zu zeigen ist, dass für $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt: $\phi(\cdot - k) \perp \psi(\cdot - l)$. Aus der Beziehung

$$\mathcal{F}(\phi(\cdot - k))(\omega) = \exp(-ik\omega) \cdot \hat{\phi}(\omega)$$

und der Parsevalgleichung folgt mit $r := l - k$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \phi(x - k) \overline{\psi(x - l)} dx &= \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\omega) \exp(-ik\omega) \overline{\hat{\psi}(\omega)} \exp(il\omega) d\omega \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \hat{\phi}(\omega + 2\pi n) \overline{\hat{\psi}(\omega + 2\pi n)} \exp(i \underbrace{(l - k)}_{=r} \omega) d\omega =: \alpha(r)
\end{aligned}$$

$\alpha(r)$ ist der r -te inverse Fourierkoeffizient der 2π -periodischen Funktion

$$\hat{\alpha}(\omega) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\phi}(\omega + 2\pi n) \overline{\hat{\psi}(\omega + 2\pi n)}$$

Damit ist $\alpha(r) = 0$ für alle $r \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn $\hat{\alpha}(\omega) = 0$ f.ü. Wegen (4.4) und (4.9) sowie der 2π -Periodizität von m_0 ist (durch Aufteilung von $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$ in gerade und ungerade n)

$$\begin{aligned}
\hat{\alpha}(\omega) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_0(\omega/2 + \pi n) \hat{\phi}(\omega/2 + \pi n) \cdot \overline{m_1(\omega/2 + \pi n) \hat{\phi}(\omega/2 + \pi n)} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_0(\omega/2 + \pi n) \underbrace{m_0(\omega/2 + \pi(n+1)) \cdot \exp(i(\omega/2 + \pi n))}_{=\overline{m_1(\omega/2 + \pi n)}} \\
&\quad \cdot \hat{\phi}(\omega/2 + \pi n) \cdot \overline{\hat{\phi}(\omega/2 + \pi n)} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(i(\omega/2 + \pi n)) m_0(\omega/2 + \pi n) m_0(\omega/2 + \pi(n+1)) \cdot |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi n)|^2 \\
&= \exp(i\omega/2) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_0(\omega/2 + 2\pi n) m_0(\omega/2 + \pi(2n+1)) \cdot |\hat{\phi}(\omega/2 + 2\pi n)|^2 \\
&\quad - \exp(i\omega/2) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} m_0(\omega/2 + \pi(2n+1)) m_0(\omega/2 + \pi(2n+2)) \cdot |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi(2n+1))|^2 \\
&= m_0(\omega/2) m_0(\omega/2 + \pi) \cdot
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\underbrace{\exp(i\omega/2) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega/2 + 2\pi n)|^2}_{=1/2\pi \text{ nach Lemma (4.1.1)}} - \underbrace{\exp(i\omega/2) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega/2 + \pi + 2\pi n)|^2}_{=1/2\pi \text{ nach Lemma (4.1.1)}} \right) \\
& = m_0(\omega/2)m_0(\omega/2 + \pi) \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot (\exp(i\omega/2) - \exp(i\omega/2)) = 0 \quad \square
\end{aligned}$$

(4.2.5) Lemma: $W_0 \subset V_1$.

Proof: Zu zeigen ist, dass $\psi(\cdot - k) \in V_1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Da V_1 invariant ist gegenüber ganzzahligen Verschiebungen, genügt es, $k = 0$ zu untersuchen. Die inverse Fouriertransformation ergibt mit der Darstellung (4.13) für m_1

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}(\omega) \exp(ix\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} m_1(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{h_{1-k}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ik\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \exp(ix\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{h_{1-k}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\omega/2) \exp(i(x - k/2)\omega) d\omega}_{\text{NR: } =2 \cdot \sqrt{2\pi} \phi(2x-k)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} \overline{h_{1-k}} \cdot 2\phi(2x - k) \in V_1
\end{aligned}$$

wobei wir durch Nebenrechnung mit der Substitution $\eta := \omega/2$ erhalten haben

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\omega/2) \exp(i(x - k/2)\omega) d\omega = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{\phi}(\eta) \exp(i\eta(2x - k)) d\eta = 2\phi(2x - k) \quad \square$$

Mit den Lemmata (4.2.7) und (4.2.8) haben wir gezeigt, dass $V_0 \otimes_{\perp} W_0 \subseteq V_1$. Es fehlt noch die umgekehrte Mengeninklusion. Die zentrale Beobachtung hierfür ist

(4.2.6) Lemma: Ist m eine 2π -periodische C^∞ -Funktion, so sind

$$\hat{\alpha}(\omega) = m(\omega) \hat{\phi}(\omega), \quad \hat{\beta}(\omega) = m(\omega) \hat{\psi}(\omega) \tag{4.11}$$

die Fouriertransformierten von Funktionen

$$\alpha \in \text{span}(\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}) \cap L^2(\mathbb{R}) \tag{4.12}$$

$$\beta \in \text{span}(\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}) \cap L^2(\mathbb{R}) \tag{4.13}$$

Beweis: Nach Voraussetzung besitzt m eine Darstellung der Form

$$m(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{m}(k) \exp(-ik\omega)$$

mit $(\hat{m}(k))_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Da $\{\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ ONS ist, hat die Funktion

$$\alpha(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{m}(k) \phi(x - k)$$

die L^2 -Norm

$$\|\alpha\|_2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{m}(k)|^2 < \infty$$

Nach den Rechenregeln für Fouriertransformierte ist

$$\hat{\alpha}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{m}(k) \mathcal{F}(\phi(\cdot - k))(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{m}(k) \exp(-ik\omega) \hat{\phi}(\omega) = m(\omega) \hat{\phi}(\omega)$$

Da auch $\{\psi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$ ONS ist, lässt sich das gleiche Argument auch auf $\hat{\beta}$ anwenden. \square

(4.2.7) Lemma: $V_1 \subseteq V_0 \otimes_{\perp} W_0$.

Beweis: Schritt 1, $\phi(2x) \in V_0 \otimes_{\perp} W_0$: Wegen

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\omega) &= \hat{\phi}(\omega/2) \cdot m_0(\omega/2) \\ \hat{\psi}(\omega) &= \hat{\phi}(\omega/2) \cdot m_1(\omega/2) \end{aligned}$$

ist

$$\left(\overline{m_0(\omega/2)} + \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \right) \cdot \hat{\phi}(\omega) = \left(|m_0(\omega/2)|^2 + m_0(\omega/2) \cdot \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \right) \cdot \hat{\phi}(\omega/2)$$

und (wegen der Definition von m_1)

$$\begin{aligned} & \left(\overline{m_1(\omega/2)} + \overline{m_1(\omega/2 + \pi)} \right) \cdot \hat{\psi}(\omega) \\ &= \left(|m_1(\omega/2)|^2 + m_1(\omega/2) \cdot \overline{m_1(\omega/2 + \pi)} \right) \cdot \hat{\phi}(\omega/2) \\ &= \left(\underbrace{|m_0(\omega/2 + \pi)|^2}_{=|m_1(\omega/2)|^2} + \underbrace{\exp(-i\omega/2) \cdot \overline{m_0(\omega/2 + \pi)}}_{=m_1(\omega/2)} \cdot \underbrace{\exp(i(\omega/2 + \pi)) \cdot m_0(\omega/2)}_{=\overline{m_1(\omega/2 + \pi)}} \right) \hat{\phi}(\omega/2) \\ &= \left(|m_0(\omega/2 + \pi)|^2 - m_0(\omega/2) \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \right) \hat{\phi}(\omega/2) \end{aligned}$$

Durch Summation der beiden Gleichungen erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left(\overline{m_0(\omega/2)} + \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \right) \cdot \hat{\phi}(\omega) + \left(\overline{m_1(\omega/2)} + \overline{m_1(\omega/2 + \pi)} \right) \cdot \hat{\psi}(\omega) \\ = & \underbrace{\left(|m_0(\omega/2)|^2 + |m_0(\omega/2 + \pi)|^2 \right)}_{=1 \text{ nach Lemma (4.2.5)}} \cdot \hat{\phi}(\omega/2) = \hat{\phi}(\omega/2) \end{aligned}$$

Da $\overline{m_0(\omega/2)} + \overline{m_0(\omega/2 + \pi)}$ und $\overline{m_1(\omega/2)} + \overline{m_1(\omega/2 + \pi)}$ 2π -periodische C^∞ -Funktionen sind, gibt es nach Lemma (4.2.9) zwei Funktionen

$$\alpha, \beta \in \text{span}(\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(\omega) &= \overline{m_0(\omega/2)} + \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \hat{\phi}(\omega) \\ \hat{\beta}(\omega) &= \overline{m_1(\omega/2)} + \overline{m_1(\omega/2 + \pi)}(\omega) \hat{\psi}(\omega) \end{aligned}$$

Damit ist auch

$$\phi(2\cdot) = \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{1}{2} \hat{\phi}(\cdot/2) \right) = \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \in \text{span}(\phi(\cdot - k), k \in \mathbb{Z}) \cap L^2(\mathbb{R}) = V_0 \otimes_{\perp} W_0$$

Schritt 2, $\phi(2x - 1) \in V_0 \otimes_{\perp} W_0$: Die Fouriertransformierte von $2\phi(2\cdot - 1)$ ist $\exp(-i\omega/2) \cdot \hat{\phi}(\omega/2)$. Ähnliche Rechnungen wie in Schritt 1 zeigen dass

$$\begin{aligned} \exp(-i\omega/2) \cdot \hat{\phi}(\omega/2) &= \underbrace{\left(\exp(-i\omega/2) \overline{m_0(\omega/2)} - \exp(-i\omega/2) \overline{m_0(\omega/2 + \pi)} \right)}_{2\pi\text{-periodische } C^\infty\text{-Funktion}} \hat{\phi}(\omega) \\ &+ \underbrace{\left(\exp(-i\omega/2) \overline{m_1(\omega/2)} - \exp(-i\omega/2) \overline{m_1(\omega/2 + \pi)} \right)}_{2\pi\text{-periodische } C^\infty\text{-Funktion}} \hat{\psi}(\omega) \end{aligned}$$

und damit

$$\phi(2x - 1) \in V_0 \otimes_{\perp} W_0$$

Schritt 3, $\phi(2x - 2k) = \phi(2(x - k)) \in V_0 \otimes_{\perp} W_0$ und $\phi(2x - (2k + 1)) = \phi(2(x - k) - 1) \in V_0 \otimes_{\perp} W_0$, da V_0 und W_0 invariant bzgl. ganzzahligen Verschiebungen sind. \square

Damit ist der Beweis von Satz (4.2.4) beendet.

(4.2.8) Beispiel: Wir berechnen mit dem beschriebenen Verfahren das Wavelet für die Haar-Skalierungsfunktion. Sei also

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es ist

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp(-i\omega x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} (1 - \exp(-i\omega)) \\ \hat{\phi}(2\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2i\omega} (1 - \exp(-2i\omega)) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \exp(-2i\omega)}{1 - \exp(-i\omega)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} (1 - \exp(-i\omega))}_{=\hat{\phi}(\omega)}\end{aligned}$$

und damit

$$m_0(\omega) = \frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)} = \frac{1}{2}(1 + \exp(-i\omega))$$

Hieraus erhalten wir

$$\begin{aligned}\overline{m_0(\omega + \pi)} &= \frac{1}{2}(1 - \exp(i\omega)) \\ m_1(\omega) &= \exp(-i\omega) \cdot \overline{m_0(\omega + \pi)} = \frac{1}{2}(\exp(-i\omega) - 1)\end{aligned}$$

und mit einer kleinen Nebenrechnung

$$\hat{\psi}(\omega) = m_1(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{i\omega} \cdot (1 - \exp(-i\omega/2))^2$$

Man überzeugt sich leicht, dass dies die Fouriertransformierte der folgenden Funktion ist.

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & \text{in } [0, 1/2) \\ 1 & \text{in } [1/2, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Damit erhalten wir bis auf den Faktor -1 das selbe Haar-Wavelet wie im Einführungskapitel.

(4.2.9) Bemerkungen: (a) Die Matrix

$$U(\omega) = \begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) \\ m_0(\omega + \pi) & m_1(\omega + \pi) \end{pmatrix}$$

ist unitär, d.h. es gilt $U^*(\omega)U(\omega) = I$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}U^*(\omega)U(\omega) &= \begin{pmatrix} \overline{m_0(\omega)} & \overline{m_0(\omega + \pi)} \\ \overline{m_1(\omega)} & \overline{m_1(\omega + \pi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_0(\omega) & m_1(\omega) \\ m_0(\omega + \pi) & m_1(\omega + \pi) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 & \overline{m_0(\omega)}m_1(\omega) + \overline{m_0(\omega + \pi)}m_1(\omega + \pi) \\ m_0(\omega)\overline{m_1(\omega)} + m_0(\omega + \pi)\overline{m_1(\omega + \pi)} & |m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = |m_1(\omega)|^2 + |m_1(\omega + \pi)|^2 = 1$$

sowie wegen der 2π -Periodizität von $m = 0$

$$\begin{aligned} & \overline{m_0(\omega)}m_1(\omega) + \overline{m_0(\omega + \pi)}m_1(\omega + \pi) \\ = & \overline{m_0(\omega) \exp(i\omega)m_0(\omega + \pi) + \overline{m_0(\omega + \pi) \exp(i(\omega + \pi))m_0(\omega)}} \\ = & \overline{m_0(\omega)m_0(\omega + \pi) \exp(i\omega)(1 + \exp(i\pi))} = 0 \quad \circ \end{aligned}$$

(2π -periodische Funktionen m_0 mit

$$|m_0(\omega)|^2 + |m_0(\omega + \pi)|^2 = 1 \tag{4.14}$$

heißen auch *konjugierte Spiegelfilter*.)

(b) Ist m_0 gegeben, so kann die zugehörige Skalierungsfunktion ϕ und damit auch ψ hergeleitet werden. Es ist nämlich wegen (4.4)

$$\hat{\phi}(\omega) = m_0(\omega/2)\hat{\phi}(\omega/2) = m_0(\omega/2)m_0(\omega/4)\hat{\phi}(\omega/4) = \dots = \hat{\phi}(2^{-n}\omega) \cdot \prod_{k=1}^n m_0(2^{-k}\omega)$$

Ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\phi}(2^{-n}\omega) = \hat{\phi}(0) = 1/\sqrt{2\pi}$$

(vgl. (4.5)), so folgt

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}\omega)$$

(c) Nicht jede glatte 2π -periodische Funktion m_0 erzeugt nach dem Verfahren in (a) eine Skalierungsfunktion (also insbesondere eine normierte Funktion).

Gegenbeispiel: Sei ϕ Skalierungsfunktion mit zugehöriger 2π -periodischer Funktion m_0 . Insbesondere ist dann

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} m_0(2^{-k}\omega)$$

und $\|\phi\|_2 = \|\hat{\phi}\|_2 = 1$. Zu $p \in \{1, 2, 3, \dots\}$ definiere $m_{0,p}(\omega) := m_0((2p+1)\omega)$ und

$$\hat{\phi}_p(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} m_{0,p}(2^{-k}\omega) = \hat{\phi}((2p+1)\omega)$$

Man rechnet leicht nach, dass m_0 , 2π -periodisch ist und die Eigenschaft (4.14) erfüllt. Allerdings ist

$$\|\phi_p\|_2^2 = \|\hat{\phi}_p\|_2^2 = (2p+1)^{-1} \neq 1$$

und damit ϕ_p keine Skalierungsfunktion.

4.3 Die schnelle Wavelet-Zerlegung

ϕ und ψ seien eine Skalierungsfunktion und eine zugehörige Waveletfunktion. Wir erinnern an die Schreibweise des Abschnitts 2.2,

$$\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k), \quad \psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

Ist $J \in \{1, 2, 3, \dots\}$, so ist $V_{-J} \subset V_0$ und

$$V_0 = \underbrace{V_{-J} \oplus W_{-J}}_{=V_{-J+1}} \oplus W_{-J+1} \oplus \dots \oplus W_{-1}$$

Dem entsprechend gibt es für $f \in V_0$ die beiden Darstellungen

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{0,k} \phi_{0,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{-J,k} \phi_{-J,k}(x) + \sum_{j=-J}^{-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_{j,k} \psi_{j,k}(x)$$

Die **schnelle Wavelet-Transformation (FWT)** ist ein effizienter Algorithmus zum Umrechnen der entsprechenden Datensätze

$$\{S_{0,k} \quad (k \in \mathbb{Z})\} \leftrightarrow \{S_{-J,k} \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad D_{j,k} \quad (k \in \mathbb{Z}, j = -J, \dots, -1)\}$$

Wir demonstrieren die Beziehungen beim Wechsel zwischen der $(J-1)$ -ten und der J -ten Stufe.

(4.3.1) Satz: Sei $J \in \mathbb{Z}$.

(a) Ist $(S_{J,k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, so gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{J,k} \phi_{J,k}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{J-1,k} \phi_{J-1,k}(x) + \sum_{k \in \mathbb{Z}} D_{J-1,k} \psi_{J-1,k}(x)$$

mit

$$S_{J-1,k} = \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \overline{h_{\ell-2k}} S_{J,\ell} \quad \text{und} \quad D_{J-1,k} = \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^{1+2k-\ell} h_{1+2k-\ell} S_{J,\ell}$$

(b) Sind $(S_{J-1,k})_{k \in \mathbb{Z}}, (D_{J-1,k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, so ist

$$S_{J,k} = \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} h_{k-2\ell} S_{J-1,\ell} + \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^{1+2\ell-k} \overline{h_{1+2\ell-k}} D_{J-1,\ell}$$

Beweis: Es gilt

- (i) $\phi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\phi(2^j x - k)$ (nach Definition)
- (ii) $\psi_{j,k}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ (nach Definition)
- (iii) $\phi(x/2) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(x - n)$ (Skalierungsgleichung)
- (iv) $\psi(x/2) = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{1-n}} \phi(x - n)$ (vgl. Beweis von Lemma (4.2.5))

Hieraus folgen die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\phi_{J-1,k}(x) &= 2^{(J-1)/2} \phi(2^{J-1}x - k) = 2^{(J+1)/2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \underbrace{\phi(2^J x - 2k - n)}_{=2^{-J/2} \phi_{J,2k+n}} \\
&= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{J,2k+n} \\
\psi_{J-1,k}(x) &= 2^{(J-1)/2} \psi(2^{J-1}x - k) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{1-n}} 2^{J/2} \phi(2^J x - 2k - n) \\
&= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{1-n}} \phi_{J,2k+n}(x)
\end{aligned}$$

Sei nun $f_J \in V_J = V_{J-1} \oplus W_{J-1}$,

$$f_J(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_{J,k} \phi_{J,k}(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} S_{J-1,\ell} \phi_{J-1,\ell}(x) + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} D_{J-1,\ell} \psi_{J-1,\ell}(x)$$

Zu (a): Wegen der Orthonormalität der beteiligten Basisfunktionen ist

$$\begin{aligned}
S_{J-1,k} &= (f_J, \phi_{J-1,k}) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} S_{J,\ell} (\phi_{J,\ell}, \phi_{J-1,k}) = \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} S_{J,\ell} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{h_n} \underbrace{(\phi_{J,\ell}, \phi_{J,2k+n})}_{=\delta_{\ell,2k+n}} \\
&= \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} S_{J,\ell} \overline{h_{\ell-2k}}
\end{aligned}$$

Ebenso folgt durch das Skalarprodukt mit $\psi_{J-1,k}$

$$\begin{aligned}
D_{J-1,k} &= (f_J, \psi_{J-1,k}) - \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} S_{J-1,\ell} \underbrace{(\phi_{J-1,\ell}, \psi_{J-1,k})}_{=0} \\
&= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{1-n}} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} S_{J,\ell} (\phi_{J,\ell}, \phi_{J,2k+n}) = \sqrt{2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} (-1)^{\ell-2k-1} \overline{h_{1+2k-\ell}} S_{J,\ell}
\end{aligned}$$

Zu (b): Es ist

$$S_{J,k} = (f_J, \phi_{J,k}) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} S_{J-1,\ell} (\phi_{J-1,\ell}, \phi_{J,k}) + \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} D_{J-1,\ell} (\psi_{J-1,\ell}, \phi_{J,k})$$

und

$$\begin{aligned}
(\phi_{J-1,\ell}, \phi_{J,k}) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n (\phi_{J,2\ell+n}, \phi_{J,k}) = \sqrt{2} h_{k-2\ell} \\
(\psi_{J-1,\ell}, \phi_{J,k}) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{1-n}} (\phi_{J,2\ell+n}, \phi_{J,k}) = \sqrt{2} (-1)^{k-2\ell-1} \overline{h_{1-k+2\ell}} \quad \circ
\end{aligned}$$

(4.3.2) Beispiel: Für die Haar-Skalierungsfunktion ist $h_0 = h_1 = 1$ und $h_n = 0$ für $n \notin \{0, 1\}$. Es folgt

$$\begin{aligned} S_{J-1,k} &= \sqrt{2}(S_{J,2k} + S_{J,2k+1}) \\ D_{J-1,k} &= \sqrt{2}(-S_{J,2k} + S_{J,2k+1}) \\ S_{J,k} &= \sqrt{2}(S_{J-1,(k \operatorname{div} 2)} - (-1)^k D_{J-1,(k \operatorname{div} 2)}) \end{aligned}$$

mit

$$k \operatorname{div} 2 = \begin{cases} k/2 & \text{für } k \text{ gerade} \\ (k-1)/2 & \text{für } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

(4.3.3) Bemerkungen: (a) Im Folgenden gehen wir davon aus, dass eine zu untersuchende Funktion $f(\cdot)$ auf einem feinsten Level J vorgegeben ist durch die Koeffizientenmenge $\{S_{J,k}, k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) Aus praktischen Gründen müssen die Daten auf eine endliche Datenmenge $\{S_{J,k}, k = -N \dots N\}$ beschränkt werden. Der Umrechnungsalgorithmus aus dem obigen Satz hat dann den linearen Rechenaufwand $\mathcal{O}(N)$.

(c) Muss aus formalen Gründen die Datenmenge $\{S_{J,k}, k = -N \dots N\}$ auf ganz \mathbb{Z} fortgesetzt werden, so kann dies z.B. geschehen durch

- (i) Fortsetzung mit 0, (ii) Periodisierung, (iii) symmetrische Fortsetzung.

Kapitel 5

Filterbänke und die FWT

5.1 Digitalfilter

Wir beschäftigen uns jetzt mit Signalen, welche durch eine diskrete Folge von (Abtast-) Werten beschrieben werden. Hierzu gehören nach dem Abtasttheorem die bandbegrenzten Funktionen.

Im Folgenden sei ein diskretes Eingangssignal in Form einer Folge $\mathbf{x} = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ gegeben. Ein Digitalfilter H ist zunächst allgemein eine Vorschrift, welche dem Signal \mathbf{x} ein Ausgangssignal $H(\mathbf{x}) = \mathbf{y} = (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ zuordnet.

(5.1.1) Definition: Ein **linearer Filter** ist gegeben durch eine Folge $\mathbf{h} = (h_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von *Filterkoeffizienten* und durch die Vorschrift

$$y_n = H(\mathbf{x})_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k}$$

Diese Operation heißt (diskrete) *Faltung* und wird auch durch die symbolische Schreibweise $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$ beschrieben.

Das spezielle Eingangssignal $\delta = (\delta_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (\delta_{0n})_{n \in \mathbb{Z}}$ heißt *Einheitsimpuls*. Das zugehörige Ausgangssignal $\mathbf{y} = H(\delta) = \mathbf{h}$ heißt *Impulsantwort*.

(5.1.2) Definition: Die **Z-Transformierte** eines Signals $\mathbf{s} = (s_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist definiert als die formale Potenzreihe

$$S(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s_k z^{-k}$$

Ist $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{x}$, so ist wegen

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n z^{-n} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k} \right) z^{-n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^{-k} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_{n-k} z^{k-n} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^{-k} \cdot \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} x_\ell z^{-\ell}$$

die Z-Transformierte gegeben durch das Produkt $Y(z) = H(z) \cdot X(z)$. Eine diskrete Faltung geht also durch die Z-Transformation über in ein Produkt, wie wir das bereits für die kontinuierliche Faltung unter der Fouriertransformation kennengelernt haben. $H(z)$ heißt *Übertragungsfunktion* des Systems. Einen Zusammenhang mit der Fouriertheorie der vorherigen Kapitel erhalten wir wie folgt. Definieren wir

$$\hat{h}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} H(\exp(i\xi)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\xi)$$

so ist $\hat{h}(\xi)$ die 2π -periodische Funktion mit den inversen Fourierkoeffizienten h_k . Die Funktion $|\hat{h}(\xi)|$ heißt *Amplitudengang*. Der Winkel $\text{Arg}(\hat{h}(\xi))$ heißt *Phasengang*.

Betrachten wir nun Eingangssignale der Form $\mathbf{x} = (\exp(in\xi))_{n \in \mathbb{Z}}$ mit festem $\xi \in (-\pi, \pi)$. \mathbf{x} repräsentiert also die Abtastreihe der durch $[-\pi, \pi]$ bandbegrenzten Funktion $x \rightarrow \exp(i\xi x)$. Dann ist

$$y_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k x_{n-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(i(n-k)\xi) = \exp(in\xi) \cdot \sqrt{2\pi} \hat{h}(\xi) = \sqrt{2\pi} \hat{h}(\xi) x_n$$

Ist $\lim_{\xi \rightarrow 0} |h(\xi)| > 0$ und $\lim_{|\xi| \nearrow \pi} h(\xi) = 0$, so werden Signale mit kleinen Frequenzen mit einer positiven Mindeststärke durchgelassen, während Frequenzen in der Nähe von π absorbiert werden. In diesem Fall wird der Filter als **Tiefpass** bezeichnet. Entsprechend heißt ein Filter mit $\lim_{|\xi| \nearrow \pi} |h(\xi)| > 0$ und $\lim_{\xi \rightarrow 0} h(\xi) = 0$ **Hochpass**.

(5.1.3) Beispiele: (a) Ein **Haarfilter** ist definiert durch

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_n + x_{n-1})$$

also durch

$$h_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } k \in \{0, 1\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Z-Transformierte ist $H(z) = (1 + z^{-1})/\sqrt{2}$, und

$$\hat{h}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (1 + \exp(-i\xi)) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-i\xi/2) \cdot \cos(\xi/2)$$

Damit ist der Haarfilter ein Tiefpass.

(b) Es sei

$$h_k = \begin{cases} 1/\sqrt{2} & \text{für } k = 0 \\ -1/\sqrt{2} & \text{für } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Jetzt ist $H(z) = (1 - z^{-1})/\sqrt{2}$ und

$$\hat{h}(\xi) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \exp(i\xi/2) \cdot \sin(\xi/2)$$

Hier handelt es sich um einen Hochpass.

(c) Ein **Daubechies-(Tiefpass-) Filter** ist definiert durch

$$h_k = \begin{cases} (1 + \sqrt{3})/(4\sqrt{2}) & \text{für } k = 0 \\ (3 + \sqrt{3})/(4\sqrt{2}) & \text{für } k = 1 \\ (3 - \sqrt{3})/(4\sqrt{2}) & \text{für } k = 2 \\ (1 - \sqrt{3})/(4\sqrt{2}) & \text{für } k = 3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left((1 + \sqrt{3}) + (3 + \sqrt{3}) \exp(-i\xi) + (3 - \sqrt{3}) \exp(-2i\xi) + (1 - \sqrt{3}) \exp(-3i\xi) \right) \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left[(1 + 3 \exp(-i\xi) + 3 \exp(-2i\xi) + \exp(-3i\xi)) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{3}(1 + \exp(-i\xi) - \exp(-2i\xi) - \exp(-3i\xi)) \right] \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \left[(1 + \exp(-i\xi))^3 + \sqrt{3} \exp(-3i\xi/2) (\exp(3i\xi/2) - \exp(-3i\xi/2)) \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{3} \exp(-3i\xi/2) (\exp(i\xi/2) - \exp(-i\xi/2)) \right] \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \exp(-3i\xi/2) \left[(\exp(i\xi/2) + \exp(-i\xi/2))^3 + 2i\sqrt{3}(\sin(3\xi/2) + \sin(\xi/2)) \right] \\ &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \exp(-3i\xi/2) \left[8 \cos^3(\xi/2) + 2i\sqrt{3}(\sin(3\xi/2) + \sin(\xi/2)) \right] \end{aligned}$$

Die sin- und cos-Reihenentwicklungen um $\xi = 0$ und $\xi = \pm\pi$ ergeben

$$\begin{aligned} \hat{h}(\xi) &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \exp(-3i\xi/2) \left[(8 - 3\xi^2 + \mathcal{O}(\xi^4)) + 2\sqrt{3}i(2\xi + \mathcal{O}(\xi^3)) \right] \\ \hat{h}(\pm\pi + 2\alpha) &= \frac{1}{8\sqrt{\pi}} \exp(-3i\xi/2) \left[\mp 8(\alpha + \mathcal{O}(\alpha^3))^3 \pm \sqrt{3}i(8\alpha^2 + \mathcal{O}(\alpha^4)) \right] = \mathcal{O}(\alpha^2) \end{aligned}$$

Insbesondere hat der Amplitudengang bei $\pm\pi$ eine doppelte Nullstelle und für kleine ξ ist

$$|\hat{h}(\xi)|^2 = \frac{1}{\pi}(1 + \mathcal{O}(\xi^4))$$

($\partial_\xi|\hat{h}(\xi)|$ hat sogar eine dreifache Nullstelle bei 0.) Der Daubechies-Filter ist also ein Tiefpassfilter.

5.2 PR-Filterbänke

[width=0.048]WaveletPR.jpg

FIGURE 1. Maxwellian on finite grid, (a), (b) T low; (c), (d) T high.

Eine Filterbank ist eine Anordnung von Filtern, die dazu dient, ein Signal in verschiedene Teilsignale zu zerlegen oder aus verschiedenen Teilsignalen zu rekonstruieren. Wir beschränken uns hier auf sog. 2-Kanal-Filterbänke, deren Prinzip in obiger Abbildung dargestellt ist. Hierbei wird der linke Teil als *Analysebank* und der rechte als *Synthesebank* bezeichnet. Die Komponenten $\downarrow 2$ und $\uparrow 2$ werden als *Downsampling-* bzw. *Upsampling-* Operatoren bezeichnet und sind definiert durch

$$\begin{aligned} (\cdots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\cdots) &\stackrel{\downarrow 2}{=} (\cdots x_{-4}x_{-2}x_0x_2x_4\cdots) \\ (\cdots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\cdots) &\stackrel{\uparrow 2}{=} (\cdots x_{-1}0x_00x_10x_2\cdots) \end{aligned}$$

(5.2.1) Beispiel: Es seien A der Haar-Tiefpassfilter und D der Hochpassfilter aus den Beispielen (5.1.3)(a),(b), also

$$\begin{aligned} A(\cdots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\cdots) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots x_{-3} + x_{-2}; x_{-2} + x_{-1}; x_{-1} + x_0; x_0 + x_1; x_1 + x_2; x_2 + x_3 \cdots) \\ D(\cdots x_{-2}x_{-1}x_0x_1x_2\cdots) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots x_{-3} - x_{-2}; x_{-2} - x_{-1}; x_{-1} - x_0; x_0 - x_1; x_1 - x_2; x_2 - x_3 \cdots) \end{aligned}$$

Beschreibt

$$S_J = (S_{J,k}, k \in \mathbb{Z})$$

die Haar-Wavelet-Koeffizienten eines Signals auf der J -ten Stufe, so sind durch

$$\begin{aligned} A(\downarrow 2)S_J &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots S_{J,-4} + S_{J,-3}; S_{J,-2} + S_{J,-1}; S_{J,0} + S_{J,1}; S_{J,2} + S_{J,3} \cdots) \\ D(\downarrow 2)S_J &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\cdots S_{J,-4} - S_{J,-3}; S_{J,-2} - S_{J,-1}; S_{J,0} - S_{J,1}; S_{J,2} - S_{J,3} \cdots) \end{aligned}$$

gerade die zugehörigen Koeffizienten der Stufe $J - 1$ gegeben (vgl. Beispiel (4.3.2)).

Die Hintereinanderausführung der Downsampling- und Upsampling-Operatoren ist gegeben durch

$$y = (\uparrow 2)(\downarrow 2)x = (\cdots 0x_{-2}0x_00x_20 \cdots)$$

(Vorsicht: Dies ist kein linearer Filter im Sinne der Definition (5.1.1)!) Die Z -Transformation ist gegeben durch

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k z^{-k} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_{2k} z^{-2k} = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} x_k (z^{-k} + (-z)^{-k}) \\ &= \frac{1}{2}(X(z) + X(-z)) \end{aligned}$$

Ohne Einsatz eines weiteren Bearbeitungsfilters (also für $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$) setzt sich das Ausgangssignal \tilde{x} zusammen aus den beiden Komponenten

(i) $\tilde{x}^{(1)} = \tilde{A}(\uparrow 2)(\downarrow 2)Ax$ mit der Z -Transformierten

$$\tilde{X}^{(1)}(z) = \frac{1}{2}\tilde{A}(z)[A(z)X(z) + A(-z)X(-z)] = \frac{1}{2}[A(z)\tilde{A}(z)X(z) + A(-z)\tilde{A}(z)X(-z)]$$

(ii) $\tilde{x}^{(2)} = \tilde{D}(\uparrow 2)(\downarrow 2)Dx$ mit der Z -Transformierten

$$\tilde{X}^{(2)}(z) = \frac{1}{2}\tilde{D}(z)[D(z)X(z) + D(-z)X(-z)] = \frac{1}{2}[D(z)\tilde{D}(z)X(z) + D(-z)\tilde{D}(z)X(-z)]$$

Es folgt

$$\tilde{X}(z) = \frac{1}{2}[A(z)\tilde{A}(z) + D(z)\tilde{D}(z)]X(z) + \frac{1}{2}[A(-z)\tilde{A}(z) + D(-z)\tilde{D}(z)]X(-z)$$

(5.2.2) Definition: Die Filterbank heißt **PR-Filterbank** (PR=*perfect reconstruction*), wenn $X(z) = \tilde{X}(z)$. Hinreichend hierfür sind die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & A(-z)\tilde{A}(z) + D(-z)\tilde{D}(z) = 0 \\ \text{(ii)} \quad & A(z)\tilde{A}(z) + D(z)\tilde{D}(z) = 2 \end{aligned}$$

Konstruktion eines PR-Filters

Zur Erfüllung von (5.2.2)(i) machen wir folgenden Ansatz. Für ein $\ell \in \mathbb{Z}$ gelte

$$D(-z) = z^\ell \tilde{A}(z), \quad \tilde{D}(z) = -z^{-\ell} A(-z)$$

Zur Erfüllung von (5.2.2)(ii) müssen dann A und \tilde{A} die Eigenschaft

$$(5.2.2)(ii') \quad A(z)\tilde{A}(z) - (-1)^\ell A(-z)\tilde{A}(-z) = 2$$

erfüllen.

(5.2.3) Lemma: Definiere $M = (m_k)_{k \in \mathbb{Z}} := A(z)\tilde{A}(z)$. Die Bedingung (5.2.2)(ii')

$$M(z) - (-1)^\ell M(-z) = 2$$

ist genau dann erfüllt, wenn ℓ ungerade ist und

$$m_0 = 1, \quad m_{2k} = 0 \text{ für } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Beweis: *Fall 1:* Ist $\ell \in \mathbb{Z}$ gerade, so lautet die Bedingung

$$M(z) - M(-z) = 2$$

Diese Bedingung kann nicht erfüllt werden, da

$$\begin{aligned} M(z) - M(-z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} m_k z^k - \sum_{m \in \mathbb{Z}} m_k (-z)^k \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} m_{2k} (z^{2k} - (-z)^{2k}) + \sum_{m \in \mathbb{Z}} m_{2k+1} (z^{2k+1} - (-z)^{2k+1}) \\ &= 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} m_{2k+1} z^{2k+1} \end{aligned}$$

ungerade in z und daher ungleich 2 ist.

Fall 2: Ist ℓ ungerade, so lautet die Bedingung

$$M(z) + M(-z) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_{2k} z^{2k} = 2 \quad \circ$$

5.3 Daubechie-Filter

Eine MSA ist charakterisiert durch die Skalierungsgleichung (...) mit den Koeffizienten $H = (h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Wir stellen die Konstruktion einer orthogonalen PR-Filterbank $(A, D, \tilde{A}, \tilde{D})$ mit $A = H$ nach I. Daubechie vor. Ist H bekannt, so folgen die anderen Komponenten nach

$$\tilde{A}(z) = A(z^{-1}), \quad D(-z) = z^\ell \tilde{A}(z), \quad \tilde{D}(z) = -z^{-\ell} A(-z)$$

Das Ziel ist, H als Tiefpassfilter zu konstruieren, wobei $z = -1$ eine Nullstelle möglichst hoher Ordnung p von $H(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k z^{-k}$ ist. In diesem Fall ist H von der Form

$$H(z) = (1 + z)^p G(z)$$

und daher

$$H(\exp(i\xi)) = (1 + \exp(i\xi)) \cdot G(\exp(i\xi)) = [2 \exp(-i\xi/2)]^p \cdot \cos(\xi/2)^p \cdot G(\exp(i\xi))$$

Damit ist $\xi = \pi$ Nullstelle von $H(\exp(i\xi))$ von (mindestens) der Ordnung p . Zur Konstruktion von $H(z)$ benutzen wir wieder die Hilfsfunktion $M(z) = H(z) \cdot H(z^{-1})$. Die zentrale Bedingung an $M(z)$ ist die Gleichung aus Lemma (5.2.3), $M(z) + M(-z) = 2$.

Schritt 1: Konstruktion von $M(z)$.

Offenbar ist $M(z)$ *symmetrisch*, d.h. $M(z) = M(z^{-1})$. Um die p -fache Nullstelle bei $z = -1$ zu erzwingen, machen wir den Ansatz

$$M(z) = 2 \cdot \left(\frac{1+z}{2}\right)^p \cdot \left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^p \cdot M_0(z)$$

mit symmetrischem M_0 mit möglichst kleiner Filterlänge. Zur Abkürzung setzen wir

$$u(z) := \frac{1+z}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{2}$$

Die von $M_0(z)$ zu erfüllende Bedingung lautet

$$u(z)^p M_0(z) + u(-z)^p M_0(-z) = 1$$

(5.3.1) Beispiel: Die Wahl $p = 1$ führt auf

$$M(z) = \frac{1}{2} \cdot (2 + z + z^{-1}) \cdot M_0(z)$$

Man sieht leicht, dass für $M_0(z) = 1$ die Bedingung $M(z) + M(-z) = 2$ erfüllt ist. Dies führt auf den bereits bekannten *Haarfilter*

$$H(z) = \frac{1+z}{\sqrt{2}}$$

Für die Konstruktion höherer Ordnung hilft uns die Beobachtung, dass

$$u(z) + u(-z) = \frac{1}{4}(2 + z + z^{-1}) + \frac{1}{4}(2 - z - z^{-1}) = 1$$

und daher

$$\begin{aligned} 1 &= (u(z) - u(-z))^{2p-1} = \sum_{k=0}^{2p-1} \binom{2p-1}{k} u(z)^{2p-1-k} u(-z)^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{k} u(z)^{2p-1-k} u(-z)^k + \sum_{k=p}^{2p-1} \binom{2p-1}{k} u(z)^{2p-1-k} u(-z)^k \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{k} u(z)^{2p-1-k} u(-z)^k + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{k} u(z)^k u(-z)^{2p-1-k} \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Summe der letzten Zeile k durch $2p-1-k$ ersetzt wurde.

(5.3.2) Satz: Der Filter

$$M_0(z) := \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{k} u(z)^{p-1-k} u(-z)^k$$

hat die Länge $2p-1$ und die Eigenschaften

- (i) M_0 ist symmetrisch
- (ii) Es gilt $u(z)^p M_0(z) + u(-z)^p M_0(-z) = 1$

Beweis: Die nicht verschwindenden Koeffizienten von $u(z) = (2 + z + z^{-1})/4$ bilden die Indexmenge $\{-1, 0, 1\}$. Da $M_0(z)$ ein Polynom in $u(z)$ und $u(-z)$ des Grades $p - 1$ ist, liegen die nicht verschwindenden Koeffizienten in $\{-(p - 1), \dots, 0, \dots, (p - 1)\}$. Damit hat M_0 (höchstens) die Länge $2p - 1$.

Die Symmetrie von M_0 folgt leicht aus der Symmetrie von u .

Außerdem ist

$$\begin{aligned} & u(z)^p M_0(z) + u(-z)^p M_0(-z) \\ = & \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{k} u(z)^{2p-1-k} u(-z)^k + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{k} u(-z)^{2p-1-k} u(z)^k = 1 \quad \circ \end{aligned}$$

Es gilt die folgende Eindeutigkeitsaussage.

(5.3.3) Satz: Ist \tilde{M}_0 ein Filter der Länge $\leq 2p - 1$ und erfüllt \tilde{M}_0 die Eigenschaften (i), (ii) des Satzes (5.3.2), so ist $\tilde{M}_0 = M_0$.

Beweis: Die Potenzreihe

$$V(z) := z^{p-1}(M_0(z) - \tilde{M}_0(z))$$

ist ein Polynom höchstens $(2p - 2)$ -ten Grades. Außerdem ist

$$\begin{aligned} u(z)^p V(z) + (-1)^{p-1} u(-z)^p V(-z) &= z^{p-1} \underbrace{[u(z)^p M_0(z) + u(-z)^p M_0(-z)]}_{=1} \\ &\quad - z^{p-1} \underbrace{[u(z)^p \tilde{M}_0(z) + u(-z)^p \tilde{M}_0(-z)]}_{=1} = 0 \end{aligned}$$

Da $u(1) = 1$ und 1 $2p$ -fache Nullstelle von $u(-1)$ ist, muss 1 auch $2p$ -fache Nullstelle von V sein. Damit gilt aber $V \equiv 0$, also $M_0 = \tilde{M}_0$. \circ

Schritt 2: Zerlegung von M_0 .

Gesucht ist H_0 mit $M_0(z) = H_0(z)H_0(z^{-1})$. Ist H_0 gefunden, so erhalten wir die gesuchte Darstellung für H ,

$$H(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + z^{-1}}{2} \right)^p \cdot H_0(z)$$

Für die gewünschte Zerlegung betrachten wir die Nullstellen von M_0 . Ist $c \in \mathbb{C}$ Nullstelle, so ist $(cz^{-1} - 1) = z^{-1}(c - z)$ Linearfaktor von M_0 . Außerdem gilt, da M_0 reelle

Koeffizienten hat: Ist $c \in \mathbb{C}$ Nullstelle, so sind dies auch \bar{c} , c^{-1} und \bar{c}^{-1} .

Die Zerlegung geschieht, indem wir mit $H_0 \equiv 1$ starten und nacheinander Linearfaktoren von M_0 abspalten und zu $H_0(z)$ bzw. zu $H_0(z^{-1})$ multiplizieren.

Zu unterscheiden sind die folgenden Fälle.

Fall 1: Ist $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ und $|c| \neq 1$, so besitzt M_0 die vier paarweise verschiedenen Nullstellen c , \bar{c} , c^{-1} und \bar{c}^{-1} . Damit können wir von M_0 den Faktor $(cz^{-1}-1)(cz-1)(\bar{c}z^{-1}-1)(\bar{c}z-1)$ abspalten. Wir wählen ein $\tilde{c} \in \{c, c^{-1}\}$ und fügen $(\tilde{c}z^{-1}-1)(\bar{\tilde{c}}z^{-1}-1)$ als Faktor zu $H_0(z)$ hinzu. Wir haben hier die Freiheit der Wahl von \tilde{c} . (Die beiden anderen Faktoren kommen zu $H_0(z^{-1})$.) Beispielsweise kann \tilde{c} so gewählt werden, dass $|\tilde{c}| < 1$. (Dies führt zu Filtern mit minimalem Phasengang, s.u.)

Fall 2: Ist $c \in \mathbb{R}$ und $|c| \neq 1$, so fügen wir den Faktor $(cz^{-1}-1)$ zu $H_0(z)$ und damit $(cz-1)$ zu $H_0(z^{-1})$ hinzu. Für minimalen Phasengang wählen wir wieder $|c| < 1$.

Fall 3, $c \in \mathbb{C}$, $|c| = 1$. In diesem Fall ist $\bar{c} = c^{-1}$ und damit

$$u(c) = \left| \frac{1+c}{2} \right| \quad \text{und} \quad u(-c) = \left| \frac{1-c}{2} \right|$$

Damit kann aber c keine Nullstelle von M_0 in der Darstellung von Satz (5.2.3) sein. Fall 3 kann also nicht eintreten.

Nach Abspalten aller Linearfaktoren stellt sich $M_0(z)$ in der Form $C^2 H_0(z) H_0(z^{-1})$ dar. Wegen $M_0(1) = 2$ muss $C > 0$ sein, sodass wir schließlich den Faktor \sqrt{C} zu H_0 hinzufügen können. Damit erhalten wir die gewünschte Darstellung.

(5.3.4) Beispiele: (a) Die Wahl $p=1$ führt auf den oben besprochenen Haarfilter.

(b) $p=2$: