

Skript zur Vorlesung
Stochastische Prozesse

25. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Stochastische Prozesse	3
1.1	Definitionen	3
1.2	Markovsche Ketten	3
1.2.1	Grundbegriffe	3
1.2.2	Rekursive Konstruktion von Markovketten	7
1.2.3	Klassifikation der Zustände homogener Markovketten	7
1.2.4	Grenzverhalten der Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen Markovkette	12
1.2.5	Erwartungswert der ersten Eintrittszeit in eine Menge	17
1.3	Markovsche Prozesse mit diskretem Zustandsraum und stetiger Zeit	19
1.3.1	Einführung	19
1.3.2	Der homogene Poisson-Prozess	22
1.3.3	Die Struktur homogener MKSZ	24
1.3.4	Grenzverhalten der Übergangswahrscheinlichkeiten homogener MKSZ	25
1.4	Semi-Markovsche Prozesse	28
1.4.1	Einführung	28
1.4.2	Grenzverhalten der Übergangswahrscheinlichkeiten	29
1.5	Simulation stochastischer Prozesse	30
1.5.1	Markovketten	30
1.5.2	Poissonprozess	30
1.5.3	Markovketten mit stetiger Zeit	30
1.5.4	Semimarkovsche Prozesse	31
2	Einführung Warteschlangentheorie	32
2.1	Klassifikation	32
2.2	Das Modell $M(\lambda)/M(\mu)/1/\infty$	34
2.3	Das Modell $M(\lambda)/M(\mu)/s/\infty$	35
2.3.1	Mittlere Anzahl der Kunden im System	37
2.3.2	Mittlere Warteschlangenlänge	37
2.3.3	Wartezeit W eines Kunden in der Warteschlange	38
2.4	Die Methode der eingebetteten Markovkette	41

2.4.1	Das Modell $M/G/1/\infty$	41
2.4.2	Das Modell $GI/M(\mu)/1/\infty$	45
2.5	Warteschlangennetzwerke	45
2.5.1	Reversibilität und der Satz von Burke	45
2.5.2	Jackson-Netzwerke	47
2.5.3	Geschlossene Netzwerke	49

Kapitel 1

Stochastische Prozesse

1.1 Definitionen

Sei $[\Omega, \mathcal{A}, P]$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition 1.1.1. Eine Familie $X_T := (X_t)_{t \in T}$, $T \neq \emptyset$ von reellen Zufallsgrößen über $[\Omega, \mathcal{A}, P]$ heißt (*reellwertiger*) *stochastischer Prozess* oder *zufällige Funktion*.

Man kann X_T auffassen als Funktion $X: T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

1. für festes $t \in T$ ist $X(t, \cdot)$ eine Zufallsgröße
2. für festes $\omega \in \Omega$ ist $X(\cdot, \omega)$ eine deterministische Funktion von T mit Werten in \mathbb{R} (eine sogenannte *Trajektorie* oder *Realisierung*)

Die Menge T ist eine beliebige Parametermenge, die jedoch meist als Zeit aufgefasst wird. Ist T abzählbar, so heißt X_T *Prozess mit diskreter Zeit*. Wir nehmen dann o.B.d.A. an, dass $T = \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Das wahrscheinlichkeitstheoretische Verhalten eines stochastischen Prozesses wird durch die „endlichdimensionalen Verteilungen“

$$P(X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n)$$

für beliebige $n \in \mathbb{N}$, $t_j \in T$, $B_j \in \mathcal{B}$ charakterisiert, wobei \mathcal{B} die σ -Algebra der Borelmengen von \mathbb{R} ist.

1.2 Markovsche Ketten

1.2.1 Grundbegriffe

Definition 1.2.1. Ein stochastischer Prozess X_T mit diskreter Zeit und mit Werten in einer abzählbaren Menge $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}$ heißt *Markovkette*, wenn

$$P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) = P(X_{t_{n+1}} = x_{n+1} \mid X_{t_n} = x_n)$$

(Markoveigenschaft)

$\forall n \in \mathbb{N}$ und $\forall t_j \in T$ mit $t_1 < t_2 < \dots < t_{n+1}$ mit $P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n) > 0$ gilt.

\mathcal{S} heißt *Zustandsraum* der Markovkette. Die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(X_n = j, | X_{n-1} = i)$, $i, j \in \mathcal{S}$ heißen *Übergangswahrscheinlichkeiten*. Die Wahrscheinlichkeiten $P(X_0 = i)$, $i \in \mathcal{S}$ beschreiben die Anfangsverteilung \mathbf{p}_0 .

Im Folgenden ist $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$ bzw. $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, m\}$. Abkürzend schreiben wir $p_{ij}(n) := P(X_n = j | X_{n-1} = i)$.

Satz 1.2.2. *Zu einer vorgegebenen Anfangsverteilung und Familie von Übergangswahrscheinlichkeiten existiert eine Markovkette mit dieser Anfangsverteilung und Familie von Übergangswahrscheinlichkeiten.*

Die Übergangswahrscheinlichkeiten werden i.Allg. zu Matrizen zusammengefasst:

$$\mathbf{P}_n := (p_{ij}(n))_{i,j} = (P(X_n = j | X_{n-1} = i))_{i,j}.$$

Die so entstehenden Matrizen \mathbf{P}_n heißen *Übergangsmatrizen* und besitzen folgende Eigenschaften:

1. $p_{ij} \geq 0$, $\forall i, j \in \mathcal{S}$
2. $\sum_j p_{ij} = 1$, $\forall i \in \mathcal{S}$, d.h. die Zeilensumme ist 1.

Eine Matrix mit diesen beiden Eigenschaften heißt *stochastische Matrix*.

Satz 1.2.3. *Es sei $s+1 \leq l \leq n-1$. Dann gilt für alle i mit $P(X_s = i) > 0$:*

$$P(X_n = j | X_s = i) = \sum_k P(X_n = j | X_l = k) P(X_l = k | X_s = i).$$

(Gleichung von Chapman-Kolmogorov)

Beweis. Sei $P(X_s = i) > 0$.

$$\begin{aligned} & P(X_n = j | X_s = i) \\ &= \frac{P(X_n = j, X_s = i)}{P(X_s = i)} \\ &= \frac{\sum_k P(X_n = j, X_s = i, X_l = k)}{P(X_s = i)} \\ &= \sum_{k: P(X_l = k, X_s = i) > 0} \frac{P(X_n = j, X_s = i, X_l = k)}{P(X_s = i)} \frac{P(X_l = k, X_s = i)}{P(X_l = k, X_s = i)} \\ &= \sum_{k: P(X_l = k, X_s = i) > 0} \underbrace{P(X_n = j | X_s = i, X_l = k)}_{= P(X_n = j | X_l = k)} P(X_l = k | X_s = i) \\ &= \sum_k P(X_n = j | X_l = k) P(X_l = k | X_s = i) \end{aligned} \quad \square$$

Wir schreiben abkürzend $p_j(n) := P(X_n = j)$ und fassen die $p_j(n)$ zum Vektor \mathbf{p}_n zusammen: $\mathbf{p}_n := (p_j(n))_{j \in \mathcal{S}}$. Außerdem setzen wir $\mathbf{P}^{(n)} := (P(X_n = j \mid X_0 = i))_{ij}$ und nennen $\mathbf{P}^{(n)}$ n -Schritt-Übergangsmatrix.

Lemma 1.2.4. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei eine Markovkette mit den Übergangsmatrizen $\mathbf{P}^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, und der Anfangsverteilung \mathbf{p}_0 . Dann gilt:

1. $\mathbf{p}_n^T = \mathbf{p}_0^T \mathbf{P}^{(n)}$

2. $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = p_{i_0}(0) \prod_{j=1}^n p_{i_{j-1}i_j}(j)$.

Beweis.

zu 1.: Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_j(n) = P(X_n = j) &= \sum_{i: P(X_0=i)>0} P(X_n = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i: P(X_0=i)>0} \frac{P(X_n = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} P(X_0 = i) \\ &= \sum_{i: P(X_0=i)>0} P(X_n = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= \sum_i P(X_n = j \mid X_0 = i) P(X_0 = i) \\ &= \text{Skalarprodukt von } \mathbf{p}_0 \text{ mit } j\text{-ter Spalte} \\ &\quad \text{von } \mathbf{P}^{(n)}. \end{aligned}$$

zu 2.: Beweis mittels vollständiger Induktion

$n = 1$:

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, X_1 = i_1) &= P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) P(X_0 = i_0) \\ &= p_{i_0 i_1}(1) p_{i_0}(0) \end{aligned}$$

$n > 1$: Behauptung sei richtig für $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n)$, Betrachtung von $P(X_0 = i_0, \dots, X_{n+1} = i_{n+1})$:

1. Es sei $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) > 0$. Dann

$$\begin{aligned} P(X_0 = i_0, \dots, X_{n+1} = i_{n+1}) &= P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &\quad \cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &= P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_n = i_n) \cdot P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\ &= p_{i_n i_{n+1}}(n+1) p_{i_0}(0) \prod_{j=1}^n p_{i_{j-1}i_j}(j) \end{aligned}$$

2. Es sei $P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) = 0$. Dann ist (Induktionsvoraussetzung)

$$p_{i_0}(0) \prod_{j=1}^n p_{i_{j-1}i_j}(j) = 0 \text{ und daraus folgt } p_{i_0}(0) \prod_{j=1}^{n+1} p_{i_{j-1}i_j}(j) = 0. \text{ Außer-}$$

dem ist auch $P(X_0 = i_0, \dots, X_{n+1} = i_{n+1}) = 0$. □

Definition 1.2.5. Eine Markovkette $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt *homogen*, wenn $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_{n+1} =: \mathbf{P}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Gilt $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n+1} =: \mathbf{p}$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$, so heißt \mathbf{p} ($= \mathbf{p}_0$) *stationäre (Anfangs-)Verteilung* der Markovkette.

Für eine stationäre Verteilung \mathbf{p} muss gelten

1. $\mathbf{p}^T = \mathbf{p}^T \mathbf{P}$ (lineares Gleichungssystem), wegen $\mathbf{p}_{n+1}^T = \mathbf{p}_n^T \mathbf{P}$,
2. $\sum_{i \in \mathcal{S}} P(X_0 = i) = 1$, damit \mathbf{p} eine Verteilung beschreibt

Schreibweise für homogene Markovketten:

$$p_{ij} := P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$$

$$p_{ij}^{(n)} := P(X_{k+n} = j \mid X_k = i) = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

Damit gilt:

$$P(X_n = j) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{kj}^{(n)} P(X_0 = k).$$

Lemma 1.2.6. Für eine homogene Markovkette gilt:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^n. \quad (1.1)$$

Beweis. Nach der Gleichung von Chapman-Kolmogorov gilt:

$$\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P}^{(n-1)} \mathbf{P} = \mathbf{P}^{(n-2)} \mathbf{P} \mathbf{P} = \dots = \mathbf{P}^n. \quad \square$$

Beispiel 1. (spezielles Warteschlangenmodell)

- Zum Zeitpunkt 0 befindet sich kein Kunde im System.
- Die Anzahl der Kunden, die im Zeitintervall $(n-1, n]$ eintreffen, ist eine Zufallsgröße und wird mit Y_n bezeichnet.

Wir nehmen an, dass die Y_n unabhängig und identisch verteilt sind mit

$$P(Y_n = 0) = 0.3; \quad P(Y_n = 1) = 0.5; \quad P(Y_n = 2) = 0.2.$$

- In einem Zeitintervall $(n-1, n]$ wird genau ein Kunde abgefertigt, falls zu Beginn des Intervalls (d.h. zum Zeitpunkt $n-1$) mindestens ein Kunde auf Bedienung wartet.
- Das Wartesystem umfasst 2 Warteplätze. Sind beim Eintreffen eines Kunden alle Warteplätze besetzt, verlässt dieser Kunde das Wartesystem wieder.

1.2.2 Rekursive Konstruktion von Markovketten

Es seien gegeben

- Wahrscheinlichkeitsraum $[\Omega, \mathcal{A}, P]$
- Zufallsgröße X_0 mit Werten in $[\mathcal{S}, \mathcal{P}(\mathcal{S})]$
- Zufallsgrößen W_1, W_2, \dots mit Werten in $[\mathbb{R}, \mathcal{B}]$; $\{X_0, W_1, W_2, \dots\}$ stochastisch unabhängig
- Familie von Borel-messbaren Funktionen $f_n : \mathcal{S} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{S}$.

Satz 1.2.7. Die Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit

$$X_n := f_n(X_{n-1}, W_n)$$

ist eine Markovkette deren Übergangswahrscheinlichkeiten $\mathbf{P}_n = (p_{ij}(n))_{i,j \in \mathcal{S}}$ gegeben sind durch

$$p_{ij}(n) = P(f_n(i, W_n) = j).$$

Ist $f_n = f$ und sind die W_i identisch verteilt, so ist die Markovkette homogen.

1.2.3 Klassifikation der Zustände homogener Markovketten

Definition 1.2.8.

1. Ein Zustand i heißt *absorbierend*, wenn $p_{ii} = 1$ gilt.
2. Der größte gemeinsame Teiler d_i aller $n \in \mathbb{N}$ mit $p_{ii}^{(n)} > 0$ heißt *Periode* von i .
3. j heißt *von i aus erreichbar*, falls ein $n \geq 0$ existiert mit $p_{ij}^{(n)} > 0$.
Schreibweise: $i \rightarrow j$. (Vereinbarungen: $p_{ii}^{(0)} := 1$, d.h. jeder Zustand ist von sich aus erreichbar; $p_{ij}^{(0)} := 0$ für $i \neq j$ und $p_{ij}^{(1)} := p_{ij}$)
4. i und j heißen *verbunden*, wenn $i \rightarrow j$ und $j \rightarrow i$ (Abkürzung $i \leftrightarrow j$).
5. i heißt *wesentlich*, wenn i aus allen von i erreichbaren Zuständen j ebenfalls erreichbar ist, d.h. wenn gilt $\forall j : i \rightarrow j \Rightarrow j \rightarrow i$. Anderenfalls heißt i *unwesentlich*.

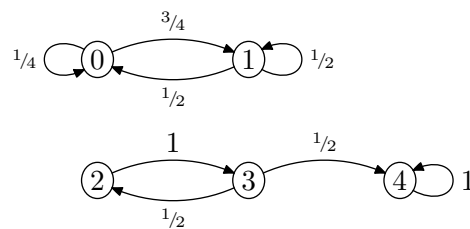
Gilt für alle $i \in \mathcal{S}$ die Beziehung $d_i = 1$, so ist die Markovkette *aperiodisch*.

Bemerkung 1.2.9. \leftrightarrow ist eine Äquivalenzrelation, zerlegt also \mathcal{S} in Äquivalenzklassen.

Beispiel 2. Wir betrachten die homogene Markovkette mit den Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und der Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Man kann sich die Übergangsmatrix durch den sogenannten *Markov-Graphen* veranschaulichen:



- Der Zustand 4 ist absorbierend.
- Die Zustände 2 und 3 haben die Periode 2, der Rest Periode 1.
- Vom Zustand 0 ist nur der Zustand 1 erreichbar und umgekehrt. Die Zustände 3 und 4 sind von 2 erreichbar usw.
- Die Zustände in den folgenden \leftrightarrow -Klassen sind untereinander verbunden:

$$\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}, \quad \mathcal{C}_2 = \{2, 3\}, \quad \mathcal{C}_3 = \{4\}.$$

- Die Zustände 0, 1 und 4 sind wesentlich; 2 und 3 unwesentlich.

Die \leftrightarrow -Klassen entsprechen den stark zusammenhängenden Komponenten des Markovgraphen.

Behauptung 1.2.10. *Die Elemente einer Äquivalenzklasse von \leftrightarrow sind entweder alle wesentlich oder unwesentlich und sie besitzen alle dieselbe Periode.*

Beweis.

Z.z.: Alle Zustände einer Äquivalenzklasse sind wesentlich bzw. unwesentlich:

Angenommen, in Klasse \mathcal{C} existiere mindestens ein wesentlicher Zustand i . Dann ist zu zeigen:

ein beliebiger anderer Zustand $j \in \mathcal{C}$ ist ebenfalls wesentlich, d.h.

$$i \text{ wesentlich, } j \leftrightarrow i, j \rightarrow k \Rightarrow k \rightarrow j$$

Wir haben:

$$i \rightarrow j, j \rightarrow k \Rightarrow i \rightarrow k \Rightarrow k \rightarrow i$$

weil i wesentlich ist; und daraus folgt

$$k \rightarrow j$$

Z.z.: Alle Zustände einer Äquivalenzklasse haben die gleiche Periode:
Zustände i und j sind aus einer Äquivalenzklasse \mathcal{C} :

$$i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists m \geq 1, n \geq 1 : p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(n)} > 0.$$

Sei $p_{ii}^{(s)} > 0$. Dann gilt mit Chapman-Kolmogorov für alle $j \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} p_{jj}^{(n+s+m)} &= \sum_k \sum_l p_{jk}^{(n)} p_{kl}^{(s)} p_{lj}^{(m)} \\ &\geq p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(s)} p_{ij}^{(m)} > 0. \end{aligned}$$

Analog gilt $p_{jj}^{(n+2s+m)} > 0$, denn wegen $p_{ii}^{(s)} > 0$ ist auch $p_{ii}^{(2s)} > 0$. Daraus folgt

$$d_j \mid n + s + m \wedge d_j \mid n + 2s + m \Rightarrow d_j \mid s \quad \forall s \text{ mit } p_{ii}^{(s)} > 0.$$

Da d_i ggT aller s mit $p_{ii}^{(s)} > 0$ ist, muss $d_j \mid d_i$ gelten. Vertauschen von i und j führt zu $d_i \mid d_j$, woraus sich $d_i = d_j$ ergibt. \square

Definition 1.2.11. Eine homogene Markovkette heißt *irreduzibel*, wenn nur eine Äquivalenzklasse vorhanden ist.

Rekurrenzverhalten¹ einer homogenen Markovkette

Es seien

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(n)} &:= P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = i), \quad n \geq 2 \\ f_{ij}^{(1)} &:= p_{ij} \end{aligned}$$

Die $f_{ij}^{(n)}$ sind also die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Zustand j , ausgehend vom Zustand i , zur Zeit n zum *ersten* Mal erreicht wird.

Definition 1.2.12. Ein Zustand i heißt *rekurrent*, falls der Prozeß bei Start in i mit Wahrscheinlichkeit 1 nach i zurückkehrt, d.h. wenn

$$f_{ii}^* := \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1.$$

Anderenfalls ($f_{ii}^* < 1$) heißt i *transient*.

Satz 1.2.13. Es sei $Q_{ij} := P(X_m = j \text{ für unendlich viele } m \mid X_0 = i)$.
Dann gilt:

¹Rückkehrverhalten

$$1. \text{ } i \text{ rekurrent} \Leftrightarrow Q_{ii} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

$$2. \text{ } i \text{ transient} \Leftrightarrow Q_{ii} = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$$

Folgerung 1.2.14. *Unwesentliche Zustände sind transient.*

Beweis.

$$\begin{aligned} i \text{ unwesentlich} &\Rightarrow \exists j, \exists m : p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(n)} = 0 \forall n \in \mathbb{N} \\ &\Rightarrow Q_{ii} = P(X_k = i \text{ für unendlich viele } k \mid X_0 = i) \leq 1 - p_{ij}^{(m)} < 1 \end{aligned}$$

□

Behauptung 1.2.15. *Die Zustände einer Äquivalenzklasse sind entweder alle rekurrent oder alle transient.*

Beweis. z.z.: i rekurrent, $i \leftrightarrow j \Rightarrow j$ rekurrent

Aus $i \leftrightarrow j$ folgt $\exists m, n \geq 1 : p_{ij}^{(m)} > 0, p_{ji}^{(n)} > 0$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{jj}^{(\nu)} &\geq \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+\nu)} \\ &\geq \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{ji}^{(n)} p_{ii}^{(\nu)} p_{ij}^{(m)} \\ &= p_{ji}^{(n)} p_{ij}^{(m)} \sum_{\nu=1}^{\infty} p_{ii}^{(\nu)} = \infty. \end{aligned}$$

□

Beispiel 3. (Zufällige Irrfahrt auf den ganzen Zahlen)

Wir betrachten eine homogene Markovkette mit $\mathcal{S} = \mathbb{Z}$ und den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{i,i+1} = p \qquad p_{i,i-1} = q = 1 - p$$

für ein $p \in (0, 1)$.

Jeder Zustand ist von jedem anderen erreichbar, es gibt also nur eine Äquivalenzklasse. Auch sind alle Zustände wesentlich.

Es ist klar, dass die Kette nicht in einer ungeraden Anzahl von Zeitschritten in einen Zustand i zurückkehren kann, insbesondere ist

$$p_{0,0}^{(2n+1)} = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Für gerade Zeitpunkte ergibt sich diese Wahrscheinlichkeit zu

$$p_{0,0}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n.$$

Die Stirlingsche Formel

$$n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

besagt, dass $n!$ asymptotisch äquivalent der rechten Seite ist, d.h.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}} = 1.$$

Für $a_n \sim b_n$ ist bekannt, dass die Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ dasselbe Konvergenzverhalten besitzen. Diese Eigenschaft wird im Folgenden ausgenutzt. Es gilt

$$\begin{aligned} p_{0,0}^{(2n)} &\sim (pq)^n \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi} \\ &= \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}} = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$4p(1-p) = \begin{cases} 1 & \text{falls } p = \frac{1}{2} \\ < 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir können jetzt das Konvergenzverhalten von $\sum_{n=1}^{\infty} p_{0,0}^{(2n)}$ abschätzen. Für $p = q = \frac{1}{2}$ ist die Kette wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{0,0}^{(2n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = \infty$$

rekurrent, für $p \neq q$ hingegen wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{0,0}^{(2n)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4pq)^n}{\sqrt{n\pi}} < \sum_{n=1}^{\infty} (4p(1-p))^n < \infty$$

transient, obwohl alle Zustände wesentlich sind!

Behauptung 1.2.16. *Ist j transient, dann gilt für alle i*

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$$

und folglich $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

Falls i ein rekurrenter Zustand ist, gilt $Q_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$. Die $f_{ii}^{(n)}$ definieren also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die erste Rückkehrzeit auf \mathbb{N} . μ_i sei der Erwartungswert (im Falle der Existenz) dieser Rückkehrzeit. (Falls der Erwartungswert nicht existiert, gilt $\mu_i = \infty$.)

$$\mu_i := \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}.$$

Definition 1.2.17. Ein rekurrenter Zustand i heißt *positiv rekurrent*, wenn $\mu_i < \infty$ gilt; im Fall $\mu_i = \infty$ heißt i *null-rekurrent*.

Sind alle Zustände (einer homogenen Markovkette) rekurrent bzw. positiv rekurrent, so heißt die Markovkette selbst rekurrent bzw. positiv rekurrent.

Satz 1.2.18. Ein rekurrenter Zustand ist genau dann null-rekurrent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ gilt.

Behauptung 1.2.19. Die Zustände einer rekurrenten Klasse sind entweder alle positiv rekurrent oder null-rekurrent.

Beweis. Übung □

1.2.4 Grenzverhalten der Übergangswahrscheinlichkeiten einer homogenen Markovkette

Satz 1.2.20. Für eine irreduzible, aperiodische und rekurrente Markovkette gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_j} & \text{falls } \mu_j < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.2)$$

Satz 1.2.21. Für eine irreduzible und rekurrente Markovkette mit der Periode $d > 1$ gilt

$$p_{ii}^{(nd+k)} = 0 \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, d-1\} \text{ und} \quad (1.3)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = \begin{cases} \frac{d}{\mu_i} & \text{falls } \mu_i < \infty, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (1.4)$$

Satz 1.2.22. Eine homogene Markovkette sei irreduzibel und aperiodisch. Dann sind alle Zustände genau dann positiv rekurrent, wenn eine stationäre Verteilung $\mathbf{p} = (\pi_i)_{i \in \mathcal{S}}$ existiert. Falls diese existiert, ist \mathbf{p} eindeutig und es gilt

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_j} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \quad \forall i, j \in \mathcal{S}. \quad (1.5)$$

Satz 1.2.23. Eine homogene Markovkette mit endlichem Zustandsraum \mathcal{S} besitzt

1. evtl. transiente Zustände
2. mindestens einen rekurrenten Zustand
3. keine null-rekurrenten Zustände
4. keine wesentlichen transienten Zustände.

Beweis.

1. vgl. Einführungsbeispiel
2. \mathcal{S} endlich $\Rightarrow \exists i : Q_{ii} > 0 \Rightarrow Q_{ii} = 1 \Rightarrow i$ rekurrent
3. Angenommen, es existiert ein null-rekurrenter Zustand i .
 $\Rightarrow \exists$ null-rekurrente Zustandsklasse \mathcal{C} , die i enthält
 $\Rightarrow \mathcal{C} = \{j : i \leftrightarrow j\}$, da rekurrente Zustände wesentlich sind
 $\Rightarrow \forall j \in \mathcal{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$, denn $\exists m : p_{ji}^{(m)} > 0$, also $p_{ii}^{(m+n)} \geq p_{ij}^{(n)} p_{ji}^{(m)}$
wobei $p_{ii}^{(m+n)} \rightarrow 0$ wegen der Null-Rekurrenz von i

Andererseits folgt aus $\sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij}^{(n)} = 1 \forall n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{C}} p_{ij}^{(n)} = 1$$

im Widerspruch zu $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$.

4. Übung □

Folgerung 1.2.24. Für eine irreduzible aperiodische Markovkette mit $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, m\}$ existiert eine eindeutige stationäre Verteilung $\mathbf{p} = (\pi_i)_{i \in \mathcal{S}}$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^{(n)} = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \pi_0 & \pi_1 & \cdots & \pi_m \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad (1.6)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}. \quad (1.7)$$

Beweis. noch zu zeigen ist: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{p}_n = \mathbf{p}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m P(X_0 = i) p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_{i=0}^m P(X_0 = i) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \\ &= \sum_{i=0}^m P(X_0 = i) \pi_j \\ &= \pi_j \end{aligned} \quad \square$$

Bemerkung 1.2.25.

1. Falls die homogene Markovkette mit $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots, m\}$ irreduzibel, aber nicht aperiodisch ist, gilt noch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n p_{ij}^{(\nu)} = \pi_j \quad \text{und}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n P(X_\nu = j) = \pi_j$$

wobei $\mathbf{p} = (\pi_j)_{j \in \mathcal{S}}$ die eindeutige stationäre Verteilung bezeichnet.

2. Der Zustandsraum \mathcal{S} einer irreduziblen homogenen Markovkette mit Periode d kann in d nichtleere, disjunkte Klassen \mathcal{D}_r ($r = 0, \dots, d-1$) zerlegt werden. Beim Ablauf der Kette werden dabei die Klassen \mathcal{D}_r zyklisch durchlaufen, d.h. von einem Zustand der Klasse \mathcal{D}_s kann man nur in einen Zustand der Klasse \mathcal{D}_{s+1} und von \mathcal{D}_{d-1} nur in \mathcal{D}_0 gelangen.

Definition 1.2.26. Eine homogene Markovkette heißt *ergodisch*, wenn unabhängig von $i \in \mathcal{S}$ die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} =: \pi_j$$

existieren und eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über $[\mathcal{S}, \mathcal{P}(\mathcal{S})]$ definieren.

Folgerung 1.2.27. Eine irreduzible aperiodische Markovkette mit endlich vielen Zuständen ist ergodisch.

Satz 1.2.28. Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine homogene Markovkette mit endlich vielen Zuständen. Falls ein $l > 0$ derart existiert, dass \mathbf{P}^l eine Spalte mit ausschließlich positiven Zahlen enthält, ist die Markovkette ergodisch und es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, wobei $\mathbf{p} = (\pi_i)_{i \in \mathcal{S}}$ die eindeutige stationäre Verteilung bezeichnet.

Satz 1.2.29. Unter den Voraussetzungen von Satz 1.2.28 existieren ein $C > 0$ und ein $r \in (0, 1)$ mit

$$|P(X_n = j) - \pi_j| \leq Cr^n \quad \forall j \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Absorptionswahrscheinlichkeiten

Im folgenden ist i ein transienter Zustand, $T \subset \mathcal{S}$ Menge der transienten Zustände und \mathcal{C} eine Rekurrenzklasse.

Wir interessieren uns für den Fall, dass die Markovkette in einem transienten Zustand i startet und schließlich in der Rekurrenzklasse \mathcal{C} ankommt. Dazu führen wir

$$\begin{aligned} \pi_i^{(1)}(\mathcal{C}) &:= P(X_1 \in \mathcal{C} \mid X_0 = i) \\ \pi_i^{(n)}(\mathcal{C}) &:= P(X_n \in \mathcal{C}, X_{n-1} \in T, \dots, X_1 \in T \mid X_0 = i), \quad n > 1 \end{aligned}$$

ein, das sind die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die Markovkette in n Schritten die Menge T verlässt und erstmalig in \mathcal{C} eintritt. Außerdem ist

$$\pi_i(\mathcal{C}) := \sum_{n=1}^{\infty} \pi_i^{(n)}(\mathcal{C})$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass \mathcal{C} von der Markovkette bei Start in i erreicht wird. Man sagt, dass der Prozess in Klasse \mathcal{C} *absorbiert* wird.

Es gilt

$$\pi_i^{(1)}(\mathcal{C}) = \sum_{k \in \mathcal{C}} P(X_1 = k \mid X_0 = i) = \sum_{k \in \mathcal{C}} p_{ik}$$

Wir berechnen nun $\pi_i^{(n)}(\mathcal{C}), n \geq 2$.

$$\begin{aligned} \pi_i^{(n)}(\mathcal{C}) &= P(X_n \in \mathcal{C}, X_{n-1} \in T, \dots, X_1 \in T \mid X_0 = i) \\ &= P(X_n \in \mathcal{C}, X_{n-1} \in T, \dots, X_2 \in T, \bigcup_{j \in T} X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in T} P(X_n \in \mathcal{C}, X_{n-1} \in T, \dots, X_2 \in T, X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in T} \frac{P(X_n \in \mathcal{C}, X_{n-1} \in T, \dots, X_2 \in T, X_1 = j, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \frac{P(X_1 = j \mid X_0 = i)}{P(X_1 = j \mid X_0 = i)} \\ &= \sum_{j \in T} P(X_n \in \mathcal{C}, X_{n-1} \in T, \dots, X_2 \in T \mid X_1 = j) P(X_1 = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{j \in T} \pi_j^{(n-1)}(\mathcal{C}) \cdot p_{ij} \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \pi_i(\mathcal{C}) &= \pi_i^{(1)}(\mathcal{C}) + \sum_{n=2}^{\infty} \pi_i^{(n)}(\mathcal{C}) \\ &= \pi_i^{(1)}(\mathcal{C}) + \sum_{j \in T} p_{ij} \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \pi_j^{(n-1)}(\mathcal{C})}_{=\pi_j(\mathcal{C})} \end{aligned}$$

Dies führt auf das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\pi_i(\mathcal{C}) = \pi_i^{(1)}(\mathcal{C}) + \sum_{j \in T} p_{ij} \pi_j(\mathcal{C}) \quad (1.8)$$

zur Bestimmung der $\pi_i(\mathcal{C})$.

Bemerkung 1.2.30.

1. Falls $P(\exists n : X_n \notin T \mid X_0 = i) = 1$ gilt, besitzt dieses Gleichungssystem eine eindeutige Lösung.
2. Aus $\pi_i^{(1)}(\mathcal{C}) = 0 \forall i \in T$ folgt wegen $\pi_i^{(n)}(\mathcal{C}) = \sum_{j \in T} p_{ij} \pi_j^{(n-1)}(\mathcal{C})$ auch $\pi_i^{(n)}(\mathcal{C}) = 0 \forall n \geq 2$, d.h. wenn man nicht in einem Schritt von T nach \mathcal{C} kommt, dann überhaupt nicht.

Satz 1.2.31.

1. Es seien \mathcal{C} eine aperiodische positiv rekurrente Klasse und $j \in \mathcal{C}$. Dann gilt für $i \in T$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_i(\mathcal{C}) \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = \pi_i(\mathcal{C})\pi_j. \quad (1.9)$$

2. Falls \mathcal{C} eine periodische positiv rekurrente Klasse ist, gilt für $i \in T$

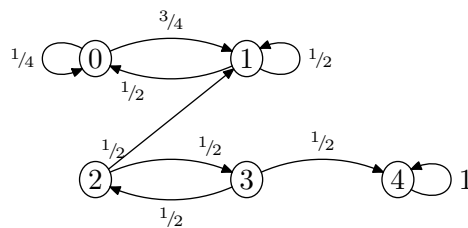
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^n p_{ij}^{(\nu)} = \pi_i(\mathcal{C})\pi_j. \quad (1.10)$$

Wir sind nun in der Lage, die Grenzwerte der Übergangswahrscheinlichkeiten $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ zu bestimmen.

Dazu zerlegt man die Markovkette in rekurrente Klassen und die Menge der transienten Zustände T . Jede rekurrente Klasse kann man als irreduzible Markovkette mit Periode $d \geq 1$ auffassen, sodass mit den Sätzen 1.2.20 und 1.2.21 die Grenzwerte in diesen Klassen berechnet werden können. Mit dem letzten Satz lassen sich dann die Absorptionswahrscheinlichkeiten für die Zustände aus T in die jeweiligen rekurrenten Klassen bestimmen.

Beispiel 4. Wir betrachten eine leicht veränderte Version des Beispiels 2 mit Zuständen $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Diese Markovkette hat die Rekurrenzklassen $\mathcal{C}_1 = \{0, 1\}$, $\mathcal{C}_2 = \{4\}$ und die transienten Zustände $T = \{2, 3\}$. Daher wissen wir, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n$ die folgende Struktur hat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}^n = \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \pi_0 & \pi_1 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{\pi}_{20} & \tilde{\pi}_{21} & 0 & 0 & \tilde{\pi}_{24} \\ \tilde{\pi}_{30} & \tilde{\pi}_{31} & 0 & 0 & \tilde{\pi}_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zunächst bestimmen wir π_0 und π_1 , indem wir \mathcal{C}_1 als homogene Markovkette auffassen. Dann ist $(\pi_0 \ \pi_1)$ als stationäre Verteilung Lösung von

$$(\pi_0 \ \pi_1) \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\pi_0 \ \pi_1).$$

Es ergibt sich $\pi_0 = \frac{2}{5}$ und $\pi_1 = \frac{3}{5}$.

Um die $\tilde{\pi}_{ij}$ zu erhalten, müssen wir erst die Absorptionswahrscheinlichkeiten $\pi_2(\mathcal{C}_1)$ und $\pi_3(\mathcal{C}_1)$ (oder $\pi_2(\mathcal{C}_2)$ und $\pi_3(\mathcal{C}_2)$) kennen. Der Ansatz (1.8) führt auf das System

$$\begin{aligned} \pi_2(\mathcal{C}_1) &= \frac{1}{2} + 0 \cdot \pi_2(\mathcal{C}_1) + \frac{1}{2} \cdot \pi_3(\mathcal{C}_1) \\ \pi_3(\mathcal{C}_1) &= 0 + \frac{1}{2} \cdot \pi_2(\mathcal{C}_1) + 0 \cdot \pi_3(\mathcal{C}_1) \end{aligned}$$

mit der Lösung $\pi_2(\mathcal{C}_1) = \frac{2}{3}$ und $\pi_3(\mathcal{C}_1) = \frac{1}{3}$. Damit haben wir:

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}_{20} &= \pi_2(\mathcal{C}_1) \cdot \pi_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \\ \tilde{\pi}_{21} &= \pi_2(\mathcal{C}_1) \cdot \pi_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \\ \tilde{\pi}_{24} &= \pi_2(\mathcal{C}_2) \cdot \pi_4 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Analog: $\tilde{\pi}_{30} = \frac{2}{15}$, $\tilde{\pi}_{31} = \frac{1}{5}$, $\tilde{\pi}_{34} = \frac{2}{3}$.

1.2.5 Erwartungswert der ersten Eintrittszeit in eine Menge

Der Erwartungswert der Zeit des ersten Eintritts in eine Menge ist wichtig z.B. für die Average-Case-Analyse bei stochastischen (Such-)Algorithmen.

Es sei $B \subset \mathcal{S}$. Dann ist $S(B)$ die *erste Eintrittszeit in B*:

$$S(B) := \begin{cases} \min\{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\} & \text{falls } \{n \in \mathbb{N}_0 : X_n \in B\} \neq \emptyset \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bezeichnungen:

$B^C := \mathcal{S} \setminus B$	Komplement von B bez. \mathcal{S}
$b := \text{card } B^C$	Anzahl der Elemente von B^C
$\mathbf{P}_{B^C} := (p_{ij})_{i,j \in B^C}$	Teilmatrix der Übergänge außerhalb von B
$\mathbf{p}_{0,B^C} := (P(X_0 = i))_{i \in B^C}$	Anfangsverteilung außerhalb von B
\mathbf{I}_b	$b \times b$ -Einheitsmatrix
\mathbf{e}_i	i -ter Einheitsvektor
$\mathbf{1}_b := (1 \dots 1)^T \in \mathbb{R}^b$	

Satz 1.2.32. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei eine homogene Markovkette mit $\mathcal{S} = \{0, \dots, m\}$, der Übergangsmatrix \mathbf{P} und der Anfangsverteilung \mathbf{p}_0 . Sind dann alle (evtl. auch komplexen) Eigenwerte der Matrix \mathbf{P}_{B^C} betragsmäßig kleiner als 1, so existiert der Erwartungswert $E(S(B))$ und es gilt

$$E(S(B)) = \mathbf{p}_{0,B^C}^T (\mathbf{I}_b - \mathbf{P}_{B^C})^{-1} \mathbf{1}_b.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S(B)) &= \sum_{n=1}^{\infty} nP(S(B) = n) \\
&= P(S(B) = 1) + 2P(S(B) = 2) + 3P(S(B) = 3) + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(S(B) = n) + \sum_{n=2}^{\infty} P(S(B) = n) + \sum_{n=3}^{\infty} P(S(B) = n) + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(S(B) > n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_0 \notin B, X_1 \notin B, \dots, X_n \notin B)
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}
P(X_0 \notin B, \dots, X_n \notin B) &= \sum_{i_0 \in B^c} \dots \sum_{i_n \in B^c} P(X_0 = i_0, \dots, X_n = i_n) \\
&= \sum_{i_0 \in B^c} \dots \sum_{i_n \in B^c} P(X_0 = i_0) \prod_{j=1}^n p_{i_{j-1}i_j} \\
&= \sum_{i_0 \in B^c} \sum_{i_n \in B^c} P(X_0 = i_0) \sum_{i_1 \in B^c} \dots \sum_{i_{n-1} \in B^c} \prod_{j=1}^n p_{i_{j-1}i_j} \\
&= \sum_{i_0 \in B^c} \sum_{i_n \in B^c} P(X_0 = i_0) \mathbf{e}_{i_0}(\mathbf{P}_{B^c})^n \mathbf{e}_{i_n} \\
&= \mathbf{p}_{0, B^c}^T (\mathbf{P}_{B^c})^n \mathbf{1}_b.
\end{aligned}$$

Es ist also

$$\mathbb{E}(S(B)) = \mathbf{p}_{0, B^c}^T \sum_{n=0}^{\infty} (\mathbf{P}_{B^c})^n \mathbf{1}_b.$$

Nun gilt für eine Matrix \mathbf{A} , deren Eigenwerte betragsmäßig alle kleiner als 1 sind, die Beziehung (Verallgemeinerung der Formel für geometrische Reihen)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{A}^n = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Die Bedingung ist hier erfüllt und daher ist

$$\mathbb{E}(S(B)) = \mathbf{p}_{0, B^c}^T (\mathbf{I}_b - \mathbf{P}_{B^c})^{-1} \mathbf{1}_b. \quad \square$$

Bemerkung 1.2.33. Es gilt stets: Die Eigenwerte λ der Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j \in \{1, \dots, m\}$ liegen in einer der Kreisscheiben der komplexen Ebene mit Mittelpunkt a_{ii} und Radius $\sum_{j \neq i} |a_{ij}|$, d.h.

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|. \quad (\text{Gershgorin-Schranken})$$

Daraus ergibt sich

$$|\lambda| \leq |\lambda - a_{ii}| + |a_{ii}| \leq \sum_{j \in \mathcal{S}} |a_{ij}|.$$

Somit

1. Die Eigenwerte einer stochastischen Matrix sind betragsmäßig ≤ 1 .
2. Die Voraussetzungen von Satz 1.2.32 sind z.B. erfüllt, wenn alle Zeilensummen von \mathbf{P}_{BC} kleiner als 1 sind. (Eine stochastische Matrix \mathbf{A} hat stets den Eigenwert 1, denn $\mathbf{A}\mathbf{1} = \mathbf{1}$.)

1.3 Markovsche Prozesse mit diskretem Zustandsraum und stetiger Zeit

1.3.1 Einführung

Definition 1.3.1. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ mit Zustandsraum $\mathcal{S} = \{0, 1, \dots\}$ heißt *Markovsche Kette mit stetiger Zeit (MKSZ)* falls für jede Auswahl t_1, t_2, \dots von Zeitpunkten mit $t_i < t_{i+1}$ die zugehörige Folge eine Markovkette $(X_{t_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ bildet, d.h. für jede solche Auswahl gilt:

$$P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n, \dots, X_{t_1} = i_1) = P(X_{t_{n+1}} = i_{n+1} \mid X_{t_n} = i_n).$$

Eine MKSZ wird wahrscheinlichkeitstheoretisch vollständig beschrieben durch

1. die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij}(s, t) := P(X_t = j \mid X_s = i), s \leq t$$

und

2. die Anfangsverteilung $\mathbf{p}_0 = (P(X_0 = i))_{i \in \mathcal{S}}$

Es gilt

$$p_{ij}(t_1, t_3) = \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{ik}(t_1, t_2) p_{kj}(t_2, t_3) \quad \forall i, j \in \mathcal{S}, t_1 < t_2 < t_3 \in T$$

(Chapman-Kolmogorov)

und

$$P(X_t = j) = \sum_{i \in \mathcal{S}} P(X_0 = i) p_{ij}(0, t).$$

Eine MKSZ ist *homogen*, wenn die Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij}(s, t)$ nur von der Differenz $t - s$ abhängen. Wir schreiben

$$p_{ij}(t - s) := P(X_t = j \mid X_s = i) = P(X_{t-s} = j \mid X_0 = i), t - s > 0$$

für die Wahrscheinlichkeit, in $t - s$ Zeiteinheiten von i nach j überzugehen und fassen diese wieder zu einer Matrix $\mathbf{P}(t)$ zusammen

$$\mathbf{P}(t) := (p_{ij}(t))_{i,j \in \mathcal{S}}, t > 0.$$

Außerdem vereinbaren wir

$$p_{ij}(0) := \begin{cases} 1 & \text{falls } i=j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für eine homogene MKSZ gilt wegen der Gleichung von Chapman-Kolmogorow

$$\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t).$$

Bemerkung 1.3.2. Es existiert nicht für jede stochastische Matrix $\mathbf{\Pi}$ eine MKSZ mit $\mathbf{P}(1) = \mathbf{\Pi}$. Z.B. ist $\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht als $\mathbf{P}(\frac{1}{2}) \cdot \mathbf{P}(\frac{1}{2})$ mit einer reellen Matrix $\mathbf{P}(\frac{1}{2})$ darstellbar.

Definition 1.3.3. Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ eine homogene MKSZ mit den Übergangsmatrizen $(P(t))_{t \geq 0}$. Eine reelle Matrix \mathbf{Q} , die der Beziehung

$$e^{t\mathbf{Q}} = \mathbf{P}(t), \quad t \geq 0$$

genügt, wobei

$$e^{t\mathbf{Q}} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \mathbf{Q}^k = \mathbf{I} + t\mathbf{Q} + \frac{t^2}{2} \mathbf{Q}^2 + \dots \quad (1.11)$$

ist, heißt *Intensitätsmatrix (Generatormatrix)* des Prozesses.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\frac{d}{dt} (e^{\mathbf{A}t}) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{A} \quad (1.12)$$

$$e^{\mathbf{A}(s+t)} = e^{\mathbf{A}s} \cdot e^{\mathbf{A}t} \quad (1.13)$$

$$e^{(\mathbf{A}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{B}t}, \text{ falls } \mathbf{AB} = \mathbf{BA} \quad (1.14)$$

Aus (1.13) folgt wegen

$$\mathbf{I} = e^{\mathbf{A}(t-t)} = e^{\mathbf{A}t} \cdot e^{-\mathbf{A}t} = e^{-\mathbf{A}t} \cdot e^{\mathbf{A}t}$$

zusätzlich eine schöne Formel für die entsprechende Inverse:

$$(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}.$$

Falls eine Intensitätsmatrix existiert, so ist sie eindeutig bestimmt und es gilt wegen (1.11):

$$\mathbf{Q} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}(t) - \mathbf{I}}{t}$$

d.h.

$$q_{ij} = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t)}{t} & i \neq j, \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{p_{ij}(t) - 1}{t} & i = j. \end{cases}$$

Für \mathbf{Q} gilt außerdem

1. $q_{ij} \geq 0$, $i \neq j$ und $q_{ii} \leq 0$
2. Falls $\sum_{j \neq i} q_{ij} = -q_{ii} < \infty$, ist jede Zeilensumme 0:

$$\sum_{j \in \mathcal{S}} q_{ij} = 0.$$

Das ist bei endlichem Zustandsraum stets der Fall.

Interpretation der Intensitäten Die Wahrscheinlichkeit, in Zeiteinheit t (t klein) von i nach j , $i \neq j$, überzugehen, ist näherungsweise $q_{ij}t$, die in i zu bleiben annähernd $q_{ii}t + 1$. In den Anwendungen geht man im Allgemeinen von \mathbf{Q} aus.

Berechnung von $\mathbf{P}(t)$ bei Kenntnis von \mathbf{Q}

Die Berechnung $\mathbf{P}(t)$ nach (1.11) ist im Allgemeinen ungünstig, da

- Rundungsfehler bei der Berechnung von \mathbf{Q}^n auftreten und
- die Konvergenz sehr langsam sein kann.

Alternativen sind

1. Ausnutzen der Beziehung

$$\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\mathbf{I} + \frac{t\mathbf{Q}}{n} \right)^n$$

2. Lösung der „Kolmogorovschen Differentialgleichungen“

$$\mathbf{P}'(t) = \frac{d}{dt} e^{t\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \cdot e^{t\mathbf{Q}} = \mathbf{Q} \mathbf{P}(t) \quad (\text{Rückwärtsgleichung})$$

$$\mathbf{P}'(t) = \frac{d}{dt} e^{t\mathbf{Q}} = e^{t\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{P}(t) \mathbf{Q} \quad (\text{Vorwärtsgleichung})$$

1.3.2 Der homogene Poisson-Prozess

Definition 1.3.4. $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sei eine Folge unabhängiger mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilter Zufallsgrößen. Weiterhin seien $T_0 \equiv 0$, $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \in \mathbb{N}$. Dann heißt der durch $N_t := \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid T_n \leq t\}$, $t \geq 0$, definierte Prozess (*homogener*) *Poissonprozess* mit dem Parameter λ .

Die Folge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ nennt man *Folge der Ankunftszeiten*.

z.B.: N_t ist Anzahl der in einem Bediensystem bis zum Zeitpunkt t ankommenden Kunden

Satz 1.3.5. *Ein Poissonprozess besitzt unabhängige, poissonverteilte Zuwächse, und es gilt für $N_{(t_n, t_{n+1}]}$:= $N_{t_{n+1}} - N_{t_n}$ die Beziehung*

$$P(N_{(t_n, t_{n+1}]} = k) = \frac{(\lambda(t_{n+1} - t_n))^k}{k!} e^{-\lambda(t_{n+1} - t_n)}.$$

Satz 1.3.6. *Der durch 1.3.4 definierte Prozess ist ein homogener Markovprozess mit*

$$P(N_t = j \mid N_s = i) = P(N_{(s,t]} = j - i) = \frac{(\lambda(t - s))^{j-i}}{(j - i)!} e^{-\lambda(t-s)}$$

für $0 \leq s < t, i, j \in \mathbb{N}_0, i \leq j$.

Beweis. Sei $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_n < \dots$. Dann ist $N_{t_n} = N_{t_{n-1}} + D_n$ mit $D_n = N_{(t_{n-1}, t_n]}$, $n \in \mathbb{N}$. $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge unabhängiger Zufallsgrößen (nämlich der nach dem vorherigen Satz unabhängigen Zuwächse), die unabhängig von N_{t_0} ist. Nach Satz 1.2.7 (rekursive Konstruktion von Markovketten) ist $(N_{t_n})_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette, also ist $(N_t)_{t \in [0, \infty)}$ eine MKSZ.

$$\begin{aligned} P(N_t = j \mid N_s = i) &= P(N_s + N_{(s,t]} = j \mid N_s = i) \\ &= \frac{P(N_s + N_{(s,t]} = j, N_s = i)}{P(N_s = i)} \\ &= \frac{P(N_s = i, N_{(s,t]} = j - i)}{P(N_s = i)} \\ &= \frac{P(N_s = i) \cdot P(N_{(s,t]} = j - i)}{P(N_s = i)} \quad (\text{Unabhängigkeit}) \\ &= P(N_{(s,t]} = j - i) \end{aligned}$$

und mit dem vorherigen Satz

$$= \frac{(\lambda(t - s))^{j-i}}{(j - i)!} e^{-\lambda(t-s)}$$

Aus der letzten Gleichung ergibt sich auch die Homogenität. □

Weitere Charakterisierungen eines homogenen Poissonprozesses

Satz 1.3.7. *Es sei $(N_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess mit $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$, dessen Trajektorien nichtfallend sind. Wenn*

1. $(N_t)_{t \geq 0}$ unabhängige Zuwächse besitzt, d.h. für $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$ die Zufallsgrößen $N_{t_1} - 0, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots$ unabhängig sind,
2. die Zuwächse zeitlich homogen sind, d.h. wenn $N_{t_2+h} - N_{t_1+h}$ und $N_{t_2} - N_{t_1}$ für alle $h > 0, t_2 > t_1$ dieselbe Verteilung besitzen, und
3. die Beziehungen

$$P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$$

$$P(N_h \geq 2) = o(h)$$

für ein $\lambda > 0$ erfüllt sind,

dann ist $(N_t)_{t \geq 0}$ ein homogener Poissonprozess mit der Intensität λ .

Bemerkung 1.3.8. Die Aussage des Satzes bleibt richtig, wenn 3. durch die Bedingungen

- 3.a) (N_t) ist nicht identisch gleich Null
- 3.b) $N(0) = 0$
- 3.c) Die Trajektorien besitzen nur Sprünge der Höhe 1.

ersetzt wird.

Satz 1.3.9. *(Überlagerung und Aufteilung von Poissonprozessen)*

1. *Es seien $(N_t)_{t \geq 0}$ und $(M_t)_{t \geq 0}$ voneinander unabhängige Poissonprozesse mit den Parametern $\lambda > 0$ und $\mu > 0$ sowie den Ankunftszeitenfolgen $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$. Die durch*

$$U_0 := 0$$

$$k_n := \min\{k : T_k > U_{n-1}\}$$

$$l_n := \min\{l : S_l > U_{n-1}\}$$

$$U_n := \min\{T_{k_n}, S_{l_n}\}$$

definierte Überlagerung von $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bildet dann die Ankunftszeitenfolge eines Poissonprozesses mit Parameter $\lambda + \mu$.

2. Ist $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine von $(N_t)_{t \geq 0}$ unabhängige Folge Bernoulli-verteilter Zufallsgrößen mit $p \in (0, 1)$ und teilt man die Ankunftszeitenfolge $(T_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ von $(N_t)_{t \geq 0}$ zufällig auf gemäß

$$\begin{aligned} U_0 &= V_0 = 0 \\ U_n &:= T_{k_n} \text{ mit } k_n := \min\{k : T_k > U_{n-1}, I_k = 1\} \\ V_n &:= T_{l_n} \text{ mit } l_n := \min\{l : T_l > V_{n-1}, I_l = 0\}, \end{aligned}$$

so bilden $(U_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Ankunftszeitenfolgen zweier unabhängiger Poissonprozesse mit den Parametern λp und $\lambda(1-p)$.

1.3.3 Die Struktur homogener MKSZ

Es sei $\lambda_i := -q_{ii}$.

Satz 1.3.10. Sei $\mathbf{Q} = (q_{ij})_{i,j \in \mathcal{S}}$ eine Matrix mit den Eigenschaften

1. $q_{ii} < 0$, $q_{ij} \geq 0$, $j \neq i$
2. $\sum_{j \in \mathcal{S}} q_{ij} = 0$

die den Bedingungen $0 < \inf_{i \in \mathcal{S}} \lambda_i$ und $\sup_{i \in \mathcal{S}} \lambda_i < \infty$ genügt. Weiterhin sei eine Anfangsverteilung \mathbf{p}_0 gegeben.

Dann gibt es eine homogene MKSZ $(X_t)_{t \geq 0}$ auf $[\Omega, \mathcal{A}, P]$ mit den Übergangsmatrizen $\mathbf{P}(t) = e^{t\mathbf{Q}}$ und der Anfangsverteilung \mathbf{p}_0 . $(X_t)_{t \geq 0}$ kann wie folgt konstruiert werden:

1. $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei eine homogene Markovkette auf $[\Omega, \mathcal{A}, P]$ mit dem Zustandsraum \mathcal{S} , der Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$(\mathbf{P}_Y)_{ij} \text{ mit } P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) := \begin{cases} \frac{q_{ij}}{\lambda_i} & j \neq i, \\ 0 & j = i. \end{cases} \quad (1.15)$$

und der Anfangsverteilung \mathbf{p}_0 .

2. Die Verweildauern Δ_{k+1} im Zustand Y_k sind untereinander und von $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ unabhängige mit dem Parameter λ_{Y_k} exponentialverteilte Zufallsgrößen.

3. Setze

$$X_t = Y_k \text{ für } \sum_{j=0}^k \Delta_j \leq t < \sum_{j=0}^{k+1} \Delta_j. \quad (\Delta_0 = 0)$$

Bemerkung 1.3.11.

1. $(X_{T_n})_{n \in \mathbb{N}_0} = (Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ heißt eingebettete Markovkette.

2. Die Exponentialverteilung der Zwischenzeiten hängt bei MKSZ von dem Zustand ab, in dem sich die MKSZ befindet. Besitzen die Verweildauern eine beliebige stetige Verteilung (positive Dichte nur für $t \geq 0$), die auch vom Zustand, in den der Prozess übergeht, abhängen kann, erhält man einen sogenannten *Semi-Markovschen Prozess*.
3. Analog zum Markovgraphen kann man einen *Intensitätsgraphen* betrachten (unter den Voraussetzungen des Satzes). Interpretation:
 - (a) Die Verweilzeit in jedem Zustand (Knoten) ist nach einer Exponentialverteilung mit der Summe der wegführenden Kantenwerte als Parameter verteilt:

$$\lambda_i = \sum_{j \in \mathcal{S} \setminus \{i\}} q_{ij}.$$

- (b) Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind proportional zu den Werten der wegführenden Kanten

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\lambda_i}.$$

1.3.4 Grenzverhalten der Übergangswahrscheinlichkeiten homogener MKSZ

Satz 1.3.12. *Es seien $(X_t)_{t \geq 0}$ eine homogene Markovkette mit der Intensitätsmatrix \mathbf{Q} sowie $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die zugehörige eingebettete Markovkette (mit der durch (1.15) gegebenen Übergangsmatrix \mathbf{P}_Y).*

1. *Ist die Markovkette $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ irreduzibel und positiv rekurrent, so existiert*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{p}^T \\ \mathbf{p}^T \\ \vdots \end{pmatrix},$$

wobei \mathbf{p} die stationäre Verteilung von $(X_t)_{t \geq 0}$ ist.

2. \mathbf{p} ist genau dann stationäre Verteilung von $(X_t)_{t \geq 0}$, wenn $\mathbf{p}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}$.

Beweis.

zu 2.: Jede stationäre Verteilung erfüllt diese Bedingung:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T &= \mathbf{p}^T \mathbf{P}(t) \\ &= \mathbf{p}^T e^{t\mathbf{Q}} \end{aligned}$$

Vermutung aufgrund der ersten beiden Ergebnisse:

$$\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \pi_0 \quad (1.16)$$

In die obige Gleichung eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} \pi_{i+1} &= \frac{1}{\mu_{i+1}} \left(\lambda_i \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \pi_0 + \mu_i \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \pi_0 - \lambda_{i-1} \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-2}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{i-1}} \pi_0 \right) \\ &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_{i+1}} \pi_0, \end{aligned}$$

womit die Vermutung bestätigt ist. Sie hält auch für $i = m$:

$$\begin{aligned} m. \text{ Spalte: } & -\lambda_{m-1} \pi_{m-1} + \mu_m \pi_m = 0 \\ \Rightarrow \pi_m &= \frac{\lambda_{m-1}}{\mu_m} \pi_{m-1} = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{m-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_m} \pi_0. \end{aligned}$$

Da $(\pi_0 \dots \pi_m)$ eine Verteilung ist, haben wir als zusätzliche Bedingung $\sum_{i=0}^m \pi_i = 1$ und damit

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^m \pi_i &= \left(1 + \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i} \right) \pi_0 \\ \Rightarrow \pi_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_i}}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Spezialfall:

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \lambda \quad i = 0, \dots, m-1 \\ \mu_j &= \mu \quad j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \pi_i &= \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i \pi_0 \\ \pi_0 &= \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i} \end{aligned}$$

mit

$$1 + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i = \sum_{i=0}^m \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^i = \begin{cases} m+1 & \text{für } \lambda = \mu, \\ \frac{\frac{\lambda}{\mu}^{m+1} - 1}{\frac{\lambda}{\mu} - 1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die eingebettete Markovkette ist hier periodisch, d.h. $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ existiert nicht.

1.4 Semi-Markovsche Prozesse

1.4.1 Einführung

Definition 1.4.1. Seien $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein stochastischer Prozess mit Werten in $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ und $(V_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von nichtnegativen Zufallsgrößen, die die Zwischenankunftszeiten (Verweildauern)

$$\begin{aligned} T_0 &:= 0 \\ T_1 &:= V_1 \\ T_n &:= \sum_{i=1}^n V_i, n \geq 2 \\ T(t) &:= \max\{n \in \mathbb{N} : T_n \leq t\} \end{aligned}$$

realisiert.

Der durch $X(t) := Y_{T(t)}, t \geq 0$ definierte Prozess $(X_t)_{t \geq 0}$ heißt *Semi-Markovscher Prozess*, wenn die Bedingungen

$$\begin{aligned} P(Y_{n+1} = j, V_{n+1} \leq t \mid Y_n = i_n, \dots, Y_0 = i_0, V_n \leq t_n, \dots, V_1 \leq t_1) \\ = P(Y_{n+1} = j, V_n \leq t \mid Y_n = i_n) \end{aligned} \quad (\text{SM1})$$

und

$$P(Y_{n+1} = j, V_{n+1} \leq t \mid Y_n = i) = P(Y_1 = j, V_1 \leq t \mid Y_0 = i) \quad (\text{SM2})$$

erfüllt sind (für alle Vorgeschichten mit positiver Wahrscheinlichkeit).

Bemerkung 1.4.2. Aus (SM2) folgt die Homogenität von $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} P(Y_{n+1} = j, V_{n+1} \leq t \mid Y_n = i) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(Y_1 = j, V_1 \leq t \mid Y_0 = i) \\ P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i) &= P(Y_1 = j \mid Y_0 = i). \end{aligned}$$

Verhalten von $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$:

$(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine homogene Markovkette (eingebettete Markovkette) mit den Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Y_{n+1} = j, V_{n+1} \leq t \mid Y_n = i).$$

Die Abbildung \mathbf{M} mit

$$\mathbf{M}(t) = (m_{ij}(t))_{i,j \in \mathcal{S}}, \quad m_{ij}(t) := P(Y_{n+1} = j, V_{n+1} \leq t \mid Y_n = i)$$

wird *Semi-Markovscher Kern* genannt.

Verweilzeitverteilungsfunktionen:

1. Verweilzeit im Zustand i

$$H_i(t) := P(V_{n+1} \leq t \mid Y_n = i) = \sum_{j \in \mathcal{S}} m_{ij}(t)$$

Erwartungswert der Aufenthaltsdauer im Zustand i :

$$\mu_i = \begin{cases} \int_{x=0}^{\infty} x h_i(x) dx & \text{Verweilzeiten stetig verteilt} \\ \sum_j x_j P(V_{n+1} = x_j \mid Y_n = i) & \text{Verweilzeiten diskret verteilt} \end{cases}$$

2. Verweilzeit im Zustand i bei Übergang zu j

$$\begin{aligned} F_{ij}(t) &= P(V_{n+1} \leq t \mid Y_n = i, Y_{n+1} = j) \\ &= \frac{P(V_{n+1} \leq t, Y_n = i, Y_{n+1} = j)}{P(Y_n = i, Y_{n+1} = j)} \cdot \frac{P(Y_n = i)}{P(Y_n = i)} \\ &= \frac{P(V_{n+1} \leq t, Y_{n+1} = j \mid Y_n = i)}{P(Y_{n+1} = j \mid Y_n = i)} \\ &= \frac{m_{ij}(t)}{p_{ij}} \end{aligned}$$

Bemerkung 1.4.3. Eine MKSZ ist ein Semi-Markovscher Prozess mit

$$F_{ij}(t) = 1 - e^{-\lambda_i t} =: \tilde{F}_i(t), \quad t \geq 0.$$

Folglich

$$\begin{aligned} H_i(t) &= \sum_{j \in \mathcal{S}} m_{ij}(t) = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{ij} F_{ij}(t) = \tilde{F}_i(t) = 1 - e^{-\lambda_i t} \\ \mu_i &= \int_{x=0}^{\infty} x h_i(x) dx = \int_0^{\infty} x \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx = \frac{1}{\lambda_i}. \end{aligned}$$

1.4.2 Grenzverhalten der Übergangswahrscheinlichkeiten

Bezeichne T_{ii} die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Besuchen in Zustand i . Wir setzen voraus, dass die Verteilung von T_{ii} nicht gitterförmig ist (eine Verteilung heißt gitterförmig, wenn es ein $d \geq 0$ gibt mit $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = nd) = 1$).

Satz 1.4.4. *Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Semi-Markovscher Prozess mit $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ als zugehöriger eingebetteter Markovkette. Ist die obige Voraussetzung erfüllt und ist $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ irreduzibel und positiv rekurrent, so gilt*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = j \mid X_0 = i) = p_j = \frac{\pi_j \mu_j}{\sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_k \mu_k},$$

wobei $(\pi_0, \dots, \pi_i, \dots)^T$ die stationäre Verteilung von $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ bezeichnet.

1.5 Simulation stochastischer Prozesse

1.5.1 Markovketten

Gegeben sei die Anfangsverteilung \mathbf{p}_0 und die Übergangsmatrix \mathbf{P} .

1. Erzeugen einer Realisierung i_0 von X_0 gemäß \mathbf{p}_0
2. Simulation des Folgezustandes gemäß Übergangsmatrix \mathbf{P}

1.5.2 Poissonprozess

Gegeben sei die Intensität λ .

1. Möglichkeit: Erzeugen einer Folge unabhängig mit λ exponential verteilter Zufallszahlen X_i , $i = 1, 2, \dots$. Poissonprozess:

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0 : T_n \leq t\} \text{ mit } T_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

2. Möglichkeit: Ausnutzung von: Die Ankunftszeiten T_1, T_2, \dots verhalten sich unter der Voraussetzung, dass in $(t_{i-1}, t_i]$ genau k_i Ankünfte eintreten, wie die geordneten Werte X_1, \dots, X_{k_i} auf $(t_{i-1}, t_i]$ gleichmäßig stetig verteilter Zufallsgrößen X_j . Daraus ergibt sich das Verfahren:

1. Zerlegung der Zeitachse in disjunkte Intervalle $(t_{i-1}, t_i]$
2. Erzeugen mit λ poissonverteilter Zufallszahlen k_i für jedes Teilintervall $(t_{i-1}, t_i]$
3. Erzeugen von k_i auf $(t_{i-1}, t_i]$ gleichmäßig stetig verteilter Zufallszahlen

1.5.3 Markovketten mit stetiger Zeit

Gegeben seien \mathbf{p}_0 und die Intensitätsmatrix \mathbf{Q} .

1. Erzeugung einer Realisierung i_0 von X_0 gemäß \mathbf{p}_0
2. Simulation der ersten Zwischenzeit als exponentialverteilte Zufallszahl mit Parameter $\lambda_{i_0} = -q_{i_0 i_0}$
3. Realisierung des Folgezustandes i_1 gemäß der Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markovkette

1.5.4 Semimarkovsche Prozesse

Gegeben seien \mathbf{p}_0 und $m_{ij}(t), i, j \in \mathcal{S}$. Die Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markovkette sind

$$p_{ij} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Y_{n+1} = j, V_{n+1} \leq t \mid Y_n = i) = \lim_{t \rightarrow \infty} m_{ij}(t).$$

1. Erzeugen einer Realisierung i_0 von X_0 gemäß \mathbf{p}_0
2. Erzeugen des Folgezustandes i_1 gemäß Übergangsmatrix der eingebetteten Markovkette
3. Erzeugen der Verweilzeit in i_0 gemäß Verteilung

$$P(V_1 \leq t \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1) = \frac{m_{i_0 i_1}(t)}{p_{i_0 i_1}}$$

Kapitel 2

Einführung in die Theorie der Warteschlangen

2.1 Klassifikation

Ein *Bediensystem* besteht aus drei wichtigen Komponenten:

Der **Input-Prozess** beschreibt den Kundenstrom, d.h. die Ankunft von Aufträgen.

Der **Bedienmechanismus** beschreibt die Abarbeitung von Aufträgen, zum Beispiel durch die Bedienungszeit je Auftrag.

Bedienungsorganisation charakterisiert das Verhalten der Kunden im System bzw. die Behandlung der Kunden durch das System.

Man unterscheidet anhand der Bedienungsorganisation drei Arten von Systemen:

Wartesysteme	kombinierte Wartee- und Verlustsysteme	Verlustsysteme
Kunden warten geduldig, falls Bediengeräte besetzt	Wartekapazität beschränkt	keine Wartepplätze

Ein Bediensystem wird symbolisch in der Form

$$A/B/s/m$$

dargestellt, wobei

- A Kundenstrom
- B Verteilung der Bedienungszeit
- s Zahl der Bediengeräte (Server)
- m Zahl der Wartepplätze

bedeuten. Außerdem macht man folgende Annahmen:

Kundenstrom

- Es kommt jeweils nur ein Kunde an.
- Die Zwischenankunftszeiten τ_i sind unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen.

A Bedeutung

GI	(general independent)	τ_i beliebig verteilt
M	(Markov)	τ_i exponentialverteilt (Poissonscher Kundenstrom)
E_k	(Erlang)	τ_i Erlang-verteilt mit Parameter k
D	(deterministic)	τ_i einpunktverteilt

Bedienprozess

- Alle Bediengeräte sind gleichartig.
- Die Bedienungszeiten B_i sind unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen (und unabhängig von τ_i).

B Bedeutung

G	(general)	B_i beliebig verteilt
M	(Markov)	B_i exponentialverteilt

In Abhängigkeit von m unterscheidet man wie oben

$m = 0$	Verlustsysteme
$m = \infty$	Wartesysteme ($A/B/s/\infty =: A/B/s$)
$0 < m < \infty$	kombinierte Warte- und Verlustsysteme.

Im Folgenden wird dieses Schema häufig durch Angabe der Verteilungsparameter erweitert, z.B. $M(\lambda)/M(\mu)/s/\infty$.

Man geht in der klassischen Warteschlangentheorie davon aus, dass sich im System (näherungsweise) eine stationäre Verteilung eingestellt hat und bestimmt für die stationäre Verteilung z. B. die folgenden Kenngrößen:

- Verteilung der Zahl der Kunden im System
- Verteilung der Warteschlangenlänge
- Verteilung der Wartezeit eines einzelnen Kunden
- Verteilung der Verweilzeit eines Kunden im System
- Verlustwahrscheinlichkeit (für kombinierte Warte- und Verlustsysteme)
- Art des Ausgangstroms.

2.2 Das Modell $M(\lambda)/M(\mu)/1/\infty$

X_t bezeichne die Anzahl der Kunden, die sich zur Zeit t im System (in der Warteschlange oder in Bedienung) befinden, T_i die Ankunftszeit des i -ten Kunden und \tilde{T}_i den Zeitpunkt, zu dem der i -te Kunde nach Beendigung der Bedienung das System verlässt.

$(X_t)_{t \geq 0}$ wird als Geburts- und Todesprozess modelliert:

1. Die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig zwei und mehr Kunden ankommen oder das System verlassen, und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Kunde das System betritt, wenn ein anderer Kunde es verlässt, ist jeweils 0 ($P(X = Y) = 0$, falls (X, Y) stetig und unabhängig verteilt). Die Realisierungen des Prozesses weisen daher (mit Wahrscheinlichkeit 1) nur Sprünge der Höhe $+1$ oder -1 auf.
2. Es kann gezeigt werden, dass die "Zwischenzeiten" zwischen den Sprüngen exponentialverteilt und unabhängig sind. $(X_t)_{t \geq 0}$ ist also eine MKSZ.
3. $(X_t)_{t \geq 0}$ ist homogen.
4. Die Gestalt der Übergangintensitäten soll am Beispiel von $q_{i,i+1}$ erläutert werden. Dazu wird zunächst $p_{i,i+1}(t)$ betrachtet.

Im Folgenden bezeichnen B (Bedienungszeit) eine mit dem Parameter μ und τ (Zwischenankunftszeit) eine mit dem Parameter λ exponentialverteilte Zufallsgröße.

Falls $i \geq 1$ gilt, befindet sich ein Kunde in der Bedienungsphase, und die restliche Bedienungszeit ist wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung wie B verteilt. Weiterhin ist die Zeit, die bis zur Ankunft des nächsten Kunden vergeht, wie τ verteilt, und die beiden Zeiten sind unabhängig. Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass im Zeitintervall $(0, t]$ genau ein Kunde hinzukommt, aber kein Kunde das System verlässt, gleich $P(\tau \leq t, B > t)$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei oder mehr Kunden hinzukommen (und eine geeignete Anzahl von Kunden das System verlässt), kann mit $o(t)$ abgeschätzt werden. Somit ergibt sich im Fall $i \geq 1$:

$$\begin{aligned} p_{i,i+1}(t) &= P(\tau \leq t, B > t) + o(t) \\ &= P(\tau \leq t)P(B > t) + o(t) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})e^{-\mu t} + o(t) = e^{-\mu t} - e^{-(\lambda+\mu)t} + o(t), \\ q_{i,i+1} &= \lim_{t \downarrow 0} \frac{e^{-\mu t} - e^{-(\lambda+\mu)t}}{t} = \lim_{t \downarrow 0} \frac{-\mu e^{-\mu t} + (\lambda + \mu)e^{-(\lambda+\mu)t}}{1} = \lambda. \end{aligned}$$

Falls sich kein Kunde im System befindet, beginnt die Bedienungszeit, sobald ein Kunde das System betritt. Der Zeitpunkt \tilde{T} , zu dem dies geschieht, ist wie τ verteilt. Die dann beginnende Bedienungszeit und

die Zeit bis zum Eintreffen des nächsten Kunden sind wie B bzw. τ verteilt. Alle Zeiten sind unabhängig. Zum Zeitpunkt t befindet sich genau ein Kunde im System, wenn die Bedienung des Kunden zum Zeitpunkt t noch nicht abgeschlossen und kein weiterer Kunde hinzugekommen ist oder wenn insgesamt zwei oder mehr Kunden eintreffen (und eine geeignete Anzahl von Kunden das System verlässt). Die Wahrscheinlichkeit für die zweite Möglichkeit kann wieder mit $o(t)$ abgeschätzt werden. Somit ergibt sich für $i = 0$:

$$\begin{aligned} p_{0,1}(t) &= \int_{\theta=0}^t P(B > t - \theta, \tau > t - \theta) f_{\bar{T}}(\theta) d\theta + o(t) \\ &= \int_{\theta=0}^t e^{-\mu(t-\theta)} e^{-\lambda(t-\theta)} \lambda e^{-\lambda\theta} d\theta + o(t) \\ &= \frac{\lambda}{\mu} (e^{-\lambda t} - e^{-(\lambda+\mu)t}) + o(t), \end{aligned}$$

$$q_{i,i+1} = \lambda.$$

In ähnlicher Weise erhält man $q_{i,i-1} = \mu$ und $q_{i,i} = -(\lambda + \mu)$. $(X_t)_{t \geq 0}$ ist damit ein Geburts- und Todesprozess mit Geburtsintensität λ und Todesintensität μ , und man kann die Aussagen zur Existenz einer stationären Verteilung bei Geburts- und Todesprozessen anwenden:

Falls $\varrho := \frac{\lambda}{\mu} < 1$ gilt, existiert eine stationäre Verteilung $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_i, \dots)^T$ mit

$$p_0 = 1 - \varrho, \quad p_i = \varrho^i (1 - \varrho) \quad (\text{geometrische Verteilung})$$

und weiterhin $\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = n) = p_n = \varrho^n (1 - \varrho)$.

ϱ heißt auch *Verkehrsdichte*.

2.3 Das Modell $M(\lambda)/M(\mu)/s/\infty$

Sei $(X_t)_{t \geq 0}$ wieder die Anzahl der Kunden im System. $(X_t)_{t \geq 0}$ ist dann eine MKSZ, die durch die Intensitätsmatrix

$$\mathbf{Q} = (q_{ij}) = \begin{cases} \lambda & j = i + 1, \\ \mu_i & j = i - 1 \\ -(\lambda + \mu_i) & j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit

$$\mu_i = \begin{cases} i\mu & i \leq s \\ s\mu & i > s \end{cases}$$

gekennzeichnet ist.

Zunächst überlegen wir uns, ob eine stationäre Verteilung existiert. Dazu stellen wir fest, dass $(X_t)_{t \geq 0}$ ein Geburts- und Todesprozess ist, für dessen Wahrscheinlichkeiten p_k gemäß (1.16) gilt

$$p_k = \frac{\lambda^k}{\mu_1 \cdots \mu_k} p_0 = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k! \mu^k} p_0 & k < s, \\ \frac{\lambda^k}{s! \mu^k s^{k-s}} p_0 & k \geq s. \end{cases}$$

Damit $\mathbf{p} = (p_k)$ eine Verteilung beschreibt, muss die Summe 1 sein. Daraus ergibt sich mit Verkehrsdichte $\varrho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \varrho^k p_0 + \sum_{k=s}^{\infty} \frac{1}{s! s^{k-s}} \varrho^k p_0 \\ &= \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \varrho^k p_0 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{s! s^l} \varrho^{l+s} p_0 \\ &= \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!} \varrho^k + \frac{\varrho^s}{s!} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{s}\right)^l \right] p_0. \end{aligned}$$

Der Klammerausdruck konvergiert für

$$\frac{\varrho}{s} = \frac{\lambda}{s\mu} < 1, \quad (2.1)$$

so dass also eine stationäre Verteilung genau dann existiert, wenn diese Bedingung gilt. Man kann (2.1) so interpretieren, dass die s Server mit durchschnittlicher Bearbeitungszeit $\frac{1}{\mu}$ den Kundenstrom bewältigen können. Wegen

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{s}\right)^l = \frac{1}{1 - \frac{\varrho}{s}} = \frac{s}{s - \varrho}$$

erhält man für die Wahrscheinlichkeiten der stationären Verteilung

$$p_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = k) = \begin{cases} \frac{\varrho^k}{k!} p_0 & 1 \leq k < s, \\ \frac{\varrho^k}{s! s^{k-s}} p_0 & k \geq s \end{cases} \quad (2.2)$$

mit

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varrho^k}{k!} + \frac{\varrho^s}{s!} \cdot \frac{s}{s-\varrho}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varrho^k}{k!} + \frac{\varrho^s}{(s-1)!(s-\varrho)}}. \quad (2.3)$$

Im Folgenden setzen wir (2.1) als erfüllt und t als groß voraus und können deshalb von der stationären Verteilung ausgehen.

2.3.1 Mittlere Anzahl der Kunden im System

Wir kürzen X_t mit X ab und berechnen $E(X)$ unter Annahme der stationären Verteilung, d.h. $P(X = k) = p_k$.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = p_0 \left(\sum_{k=1}^{s-1} \frac{\varrho^k}{(k-1)!} + \sum_{k=s}^{\infty} \frac{k \varrho^k}{s! s^{k-s}} \right) \\
 &= p_0 \left[\varrho \sum_{k=0}^{s-2} \frac{\varrho^k}{k!} + \frac{\varrho^s}{s!} \sum_{l=0}^{\infty} (l+s) \frac{\varrho^l}{s^l} \right] \text{ mit } l = k - s \\
 &= p_0 \left[\varrho \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\varrho^k}{k!} + \frac{\varrho^s}{s!} \frac{s}{s-\varrho} - \frac{\varrho^{s-1}}{(s-1)!} - \frac{\varrho^s}{s!} \frac{s}{s-\varrho} \right)}_{p_0^{-1}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varrho^s}{s!} \left(\sum_{l=0}^{\infty} l \left(\frac{\varrho}{s} \right)^l + s \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{s} \right)^l \right) \right] \\
 &= p_0 \left[\frac{\varrho}{p_0} - \frac{\varrho^s}{(s-1)!} - \frac{\varrho^{s+1}}{s!} \frac{s}{s-\varrho} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varrho^s}{s!} \left(\frac{\varrho s}{(s-\varrho)^2} + s \frac{s}{s-\varrho} \right) \right] \\
 &= p_0 \left[\frac{\varrho}{p_0} + \frac{\varrho^s}{s!} \left(-s - \frac{\varrho s}{s-\varrho} + \frac{\varrho s}{(s-\varrho)^2} + \frac{s^2}{s-\varrho} \right) \right] \\
 &= \varrho + \frac{\varrho^{s+1}}{(s-1)!(s-\varrho)^2} p_0 \tag{2.4}
 \end{aligned}$$

Dabei wurde von der Beziehung

$$\sum_{l=0}^{\infty} l \left(\frac{\varrho}{s} \right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} l \left(\frac{\varrho}{s} \right)^l = \frac{\varrho/s}{(1-\varrho/s)^2} = \frac{\varrho s}{(s-\varrho)^2}$$

Gebrauch gemacht.

2.3.2 Mittlere Warteschlangenlänge

L bezeichne die Länge der Warteschlange zur Zeit t .

$$P(L = k) = \begin{cases} p_0 + \dots + p_s & \text{für } k = 0, \\ p_{k+s} & k > 0 \end{cases}$$

Der Erwartungswert von L ist (Übung)

$$E(L) = \frac{\varrho^{s+1}}{(s-1)!(s-\varrho)^2} p_0.$$

2.3.3 Wartezeit W eines Kunden in der Warteschlange

Die Wartezeit W ist die Zeit vom Eintritt in das System bis zum Beginn der Bedienung.

Für $x > 0$ ist

$$P(W \geq x) = \sum_{k=s}^{\infty} P(W \geq x \mid X = k)p_k,$$

wobei k die Anzahl der Kunden ist, die sich schon im System befinden.

Damit der neu eintreffende Kunde mindestens die Zeit x in der Warteschlange verbleibt, dürfen höchstens $k - s$ der Kunden das System in dieser Zeit verlassen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass l Kunden das System in einem Intervall der Länge x verlassen, wenn sich k Kunden im System befinden, sei $q_l(x, k)$.

$$P(W \geq x \mid X = k) = \sum_{l=0}^{k-s} q_l(x, k).$$

Solange eine Warteschlange existiert (also alle Bediengeräte besetzt sind), ist der Ausgangsstrom ein Poissonprozess mit Intensität $s\mu$, d.h.

$$q_l(x, k) = \frac{(s\mu x)^l}{l!} e^{-s\mu x}.$$

$$\begin{aligned} P(W \geq x) &= \sum_{k=s}^{\infty} \left[\left(\sum_{l=0}^{k-s} \frac{(s\mu x)^l}{l!} e^{-s\mu x} \right) \frac{\varrho^k}{s! s^{k-s}} p_0 \right] \\ &= \frac{e^{-s\mu x} s^s p_0}{s!} \sum_{k=s}^{\infty} \left[\left(\frac{\varrho}{s} \right)^k \sum_{l=0}^{k-s} \frac{(s\mu x)^l}{l!} \right] \\ &= \frac{e^{-s\mu x} s^s p_0}{s!} \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(s\mu x)^l}{l!} \sum_{k=s+l}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{s} \right)^k \right] \\ &= \frac{e^{-s\mu x} s^s p_0}{s!} \left(\frac{\varrho}{s} \right)^s \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(s\mu x)^l}{l!} \left(\frac{\varrho}{s} \right)^l \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varrho}{s} \right)^k \right] \\ &= \frac{e^{-s\mu x} p_0}{s!} \varrho^s \sum_{l=0}^{\infty} \left[\frac{(\varrho\mu x)^l}{l!} \cdot \frac{s}{s - \varrho} \right] \\ &= \frac{e^{-s\mu x} p_0}{s!} \varrho^s \cdot \frac{s}{s - \varrho} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^l}{l!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\varrho^s p_0 s}{s!(s-\varrho)} e^{-s\mu x} e^{-\lambda x} \\
 &= \underbrace{\frac{\varrho^s p_0}{(s-1)!(s-\varrho)}}_{=: p_b} e^{-(s\mu-\lambda)x}
 \end{aligned}$$

Wegen

$$P(W = 0) = \lim_{x \downarrow 0} P(W < x) = 1 - \lim_{x \downarrow 0} P(W > x) = 1 - p_b$$

heißt p_b *Besetztwahrscheinlichkeit*. Somit gilt für die Verteilungsfunktion

$$F_W(x) = \begin{cases} 1 - p_b e^{-(s\mu-\lambda)x} & x \geq 0, \\ 0 & x < 0. \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion ergibt sich also als Mischung aus zwei Verteilungsfunktionen: $F_W(x) = (1 - p_b)F_1(x) + p_b F_2(x)$, wobei F_1 die Verteilungsfunktion einer Einpunktverteilung im Nullpunkt bezeichnet und F_2 durch die Dichtefunktion

$$f_2(x) = \begin{cases} (s\mu - \lambda)e^{-(s\mu-\lambda)x} & x > 0, \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

charakterisiert werden kann. Der Erwartungswert von W kann damit wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned}
 E(W) &= (1 - p_b)0 \cdot P(W = 0) + p_b \int_0^\infty x(s\mu - \lambda)e^{-(s\mu-\lambda)x} dx \\
 &= \frac{p_b}{s\mu - \lambda} = \frac{E(L)}{\lambda}. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Bemerkung 2.3.1.

1. Die Beziehung $E(L) = \lambda E(W)$ gilt allgemeiner sogar für $GI/G/s/\infty$ -Systeme und wird häufig in der Form

$$L = \lambda W \quad (\text{Formel von Little})$$

geschrieben, wobei λ die mittlere Ankunftsrate ($\frac{1}{\lambda} = E(\tau_i)$) ist.

2. Eine zu (2.5) analoge Beziehung gilt auch für die Anzahl der Kunden im System X und die Verweilzeit V eines beliebig ausgewählten Kunden. Es gilt

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \varrho + E(L) = \frac{\lambda}{\mu} + E(L) \\
 E(V) &= E(W) + E(\text{Verarbeitungszeit}) = E(W) + \frac{1}{\mu}
 \end{aligned}$$

und daher

$$E(X) = \lambda E(V).$$

Veranschaulichung: Ein ankommender Kunde findet im Mittel die gleiche Anzahl von Kunden vor, die er auch beim Verlassen zurücklässt. Alle Kunden, die er zurücklässt, sind während seiner Verweilzeit angekommen. Im Mittel kommen während der Zeit $E(V)$ $\lambda E(V)$ Kunden an.

3. Analog zu obiger Herleitung für $M/M/s/\infty$ kann man die stationäre Verteilung und abgeleitete Formeln für das $M/M/s/r - s$ -System ($r \geq s$) bestimmen.

Die Intensitätsmatrix \mathbf{Q} ist die Intensitätsmatrix eines Geburts- und Todesprozesses mit endlich vielen Zuständen. Eine stationäre Verteilung existiert stets. Sie hat die Gestalt

$$p_0 = \begin{cases} \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^s}{s!} \frac{1 - (\rho/s)^{r-s+1}}{1 - \rho/s} \right]^{-1} & \text{für } \frac{\rho}{s} \neq 1 \\ \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^s}{s!} (r - s + 1) \right]^{-1} & \text{für } \frac{\rho}{s} = 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

$$p_k = \begin{cases} \frac{\rho^k}{k!} p_0 & 0 \leq k < s \\ \frac{\rho^k}{s! s^{k-s}} p_0 & s \leq k \leq r. \end{cases} \quad (2.7)$$

Man kann weiterhin zeigen, dass $E(L) = \lambda^* E(W)$ gilt, wobei $\lambda^* = (1 - p_r)\lambda$. Die in das System eintretenden Kunden bilden einen Poissonprozess mit Parameter λ^* (abgewiesene Kunden: Poissonprozess mit Parameter $\lambda p_r = \lambda - \lambda^*$).

4. Speziell für das $M/M/s/0$ -System folgt

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^s \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1} \quad (2.8)$$

$$p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0,$$

insbesondere gilt

$$p_s = \frac{\frac{\rho^s}{s!}}{\sum_{k=0}^s \frac{\rho^k}{k!}} \quad (\text{Erlangsche Verlustformel})$$

die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Kunde abgewiesen wird.

Die stationäre Verteilung (2.8) heißt auch *gestutzte (truncated) Poissonverteilung* oder *Erlangsche Verlustverteilung*. Diese Verteilung ergibt sich auch für das $M/G/s/0$ -System, wobei für die Bedienungszeit ein endlicher Erwartungswert $\frac{1}{\mu}$ existieren muss.

2.4 Die Methode der eingebetteten Markovkette

Bei der Betrachtung allgemeinerer Modelle versucht man, die günstigen Eigenschaften der Markovketten zu retten. Eine Möglichkeit ist die *Methode der eingebetteten Markovkette*. Diese wurde von Kendall eingeführt und besteht aus 4 Schritten:

1. Bestimmung einer geeigneten Folge von Zeitpunkten $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die es gestattet, eine eingebettete Markovkette zu konstruieren
2. Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeiten der eingebetteten Markovkette
3. Berechnung der stationären Verteilung für die eingebettete Markovkette
4. Umrechnung der unter 3. erhaltenen Verteilungsergebnisse in die gesuchten Systemgrößen, insbesondere $(X_t)_{t \neq t_i}$

2.4.1 Das Modell $M/G/1/\infty$

Annahme: Die Bedienungszeiten B_n seien stetig identisch verteilt mit Dichtefunktion f , und $E(B_n)$ existiere.

Im Folgenden bezeichnen

\tilde{T}_n	den Endpunkt der Bedienungszeit des n -ten Kunden (Kunde verlässt das System,)
$D_n := X_{\tilde{T}_n+0}$	die Anzahl der Kunden, die der n -te Kunde im System zurücklässt,
Y_n	die Anzahl der Kunden, die während der Bedienungszeit des n -ten Kunden ankommen.

Offenbar gilt für D_n die Beziehung

$$D_n = \begin{cases} D_{n-1} + Y_n - 1 & D_{n-1} > 0, \\ Y_n & D_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Für die Verteilung der ankommenden Kunden gilt

$$\begin{aligned} P(Y_n = j) &= \int_0^\infty P(Y_n = j \mid B_n = x) f(x) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^j}{j!} e^{-\lambda x} f(x) dx \\ &=: h_j. \end{aligned}$$

Man erkennt, dass alle Y_n identisch verteilt sind und dass für alle $j \in N_o$ die Beziehung $h_j > 0$ erfüllt ist. Außerdem sind die Y_n untereinander unabhängig, denn es gilt

$$\begin{aligned} & P(Y_n = i, Y_{n+1} = j) \\ &= \int_{x=0}^{\infty} \int_{y=0}^{\infty} \underbrace{P(Y_n = i, Y_{n+1} = j \mid B_n = x, B_{n+1} = y)}_{\frac{(\lambda x)^i}{i!} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda y)^j}{j!} e^{-\lambda y}} f(x) f(y) dx dy \\ &= \int_{x=0}^{\infty} P(Y_n = i \mid B_n = x) f(x) dx \int_{y=0}^{\infty} P(Y_{n+1} = j \mid B_{n+1} = y) f(y) dy \\ &= P(Y_n = i) \cdot P(Y_{n+1} = j). \end{aligned}$$

Nach Satz 1.2.7 über die rekursive Konstruktion von Markovketten bildet $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine homogene Markovkette. Die Übergangsmatrix \mathbf{P} hat die Gestalt

$$p_{ij} := P(D_{n+1} = j \mid D_n = i) = \begin{cases} h_j & i = 0, j \geq 0 \\ h_{j-i+1} & i \geq 1 \text{ und } j \geq i - 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Somit hat \mathbf{P} die Form

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots \\ h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & \cdots \\ 0 & h_0 & h_1 & h_2 & \cdots \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Die Kette ist irreduzibel und aperiodisch, und man kann zeigen, dass die Kette ergodisch ist, wenn $\lambda E(B) < 1$ gilt.

Stationäre Verteilung \mathbf{p} für $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$p_k := \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n = k)$$

Aus $\mathbf{p}^T \mathbf{P} = \mathbf{p}$ erhält man

$$p_k = \sum_{i=0}^k h_i p_{k-i+1} + h_k p_0$$

sowie

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1.$$

Lösung des Gleichungssystems mit der „Methode der erzeugenden Funktionen“ ergibt

$$\begin{aligned}
 p_0 &= 1 - \lambda E(B) \\
 p_k &= \sum_{i=0}^k h_i p_{k-i+1} + h_k p_0.
 \end{aligned}
 \tag{2.10}$$

Verteilung bei Ankunft eines neuen Kunden

Es soll nun gezeigt werden, dass die Verteilung der Zahl der Kunden, die ein ankommender Kunde im System vorfindet, mit der Verteilung der Zahl der Kunden, die ein Kunde beim Verlassen zurücklässt, übereinstimmt. Dazu werden die folgenden, z.T. bereits eingeführten Bezeichnungen verwendet:

T_n	Zeitpunkt der Ankunft des n -ten Kunden
\tilde{T}_n	Zeitpunkt des Weggangs des n -ten Kunden
$A_n := X_{T_n-0}$	Anzahl der Kunden im System, die der n -te Kunde vorfindet
$D_n := X_{\tilde{T}_n+0}$	Anzahl der Kunden, die der n -te Kunde im System zurücklässt

Satz 2.4.1. *Es sei $(X_t)_{t \geq 0}$ ein stochastischer Prozess, dessen Realisierungen (fast alle) Sprungfunktionen mit Sprüngen der Höhe ± 1 sind. Wenn dann für alle $k \in N_0$ entweder*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \leq k) \text{ oder } \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n \leq k)$$

existiert, dann existiert auch der andere Grenzwert, und beide stimmen überein.

Beweis. Es sei $X_0 = i$. Es wird gezeigt, dass für alle $n \in N$, $i \in N_0$, $k \in N_0$, die folgenden Beziehungen gelten:

1. $D_{n+i} \leq k \Rightarrow A_{n+k+1} \leq k$ und
2. $A_{n+k+1} \leq k \Rightarrow D_{n+i} \leq k$.

Aus 1. folgt $P(D_{n+i} \leq k) \leq P(A_{n+k+1} \leq k)$ und aus 2. entsprechend $P(D_{n+i} \leq k) \geq P(A_{n+k+1} \leq k)$. Also gilt dann

$$\begin{aligned}
 P(D_{n+i} \leq k) &= P(A_{n+k+1} \leq k) \\
 \text{und weiter } \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_{n+i} \leq k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_{n+k+1} \leq k) \\
 \text{sowie } \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n \leq k) &= \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n \leq k).
 \end{aligned}$$

zu 1.:

Angenommen, es sei $D_{n+i} = j \leq k$. Dann gab es $n+j$ Ankünfte vor dem Weggang des $(n+i)$ -ten Kunden, und der nächste Kunde kommt nach dem Weggang des $(n+i)$ -ten Kunden an. Dieser Kunde findet höchstens j Kunden vor, da seit dem Weggang des $(n+i)$ -ten Kunden weitere Kunden das System verlassen haben können, also $A_{n+j+1} \leq j$. $k-j$ Ankünfte später können höchstens $k-j$ Kunden mehr da sein, also $A_{n+k+1} \leq k$.

zu 2.:

Angenommen, es sei $A_{n+k+1} = j \leq k$. Dann müssen $n + i + k - j$ Kunden das System vor dem Ankunftszeitpunkt T_{n+k+1} des $(n + k + 1)$ -ten Kunden verlassen haben. Der letzte Kunde, der das System vor T_{n+k+1} verließ, hat höchstens j Kunden zurückgelassen, denn bis T_{n+k+1} können weitere Kunden eingetroffen sein, also $D_{n+i+k-j} \leq j$. $k - j$ "Abgangszeitpunkte" vorher können sich höchstens $k - j$ Kunden mehr im System befunden haben, also $D_{n+i} \leq k$.

□

Folgerung 2.4.2. Falls für $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine stationäre Verteilung $\mathbf{p} = (p_i)_{i \in \mathcal{S}}$ existiert, gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(X_t = j) = p_j.$$

Mittlere Anzahl Kunden im System

$E(X)$ kann im stationären Zustand aus der stationären Verteilung der eingebetteten Markovkette berechnet werden (z.B. über die Methode der Wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen). Es gilt

$$E(X) = \lambda E(B) + \frac{\lambda^2 E(B^2)}{2(1 - \lambda E(B))}. \quad (2.11)$$

Außerdem ist die mittlere Länge L der Warteschlange

$$\begin{aligned} E(L) &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) p_{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} p_{k+1} \\ &= E(X) - \sum_{k=1}^{\infty} p_k \\ &= E(X) - (1 - p_0) \\ &= \frac{\lambda^2 E(B^2)}{2(1 - \lambda E(B))}. \end{aligned}$$

Mittlere Wartezeit (in Warteschlange)

Formel von Little: $E(L) = \lambda E(W)$

$$\Rightarrow E(W) = \frac{\lambda E(B^2)}{2(1 - \lambda E(B))} \quad (2.12)$$

2.4.2 Das Modell $GI/M(\mu)/1/\infty$

Annahme: Die Zwischenankunftszeiten τ_i sind mit Dichte g verteilt und es ist $E(\tau_i) = \frac{1}{\lambda}$.

Wir betrachten $X_{T_n-0} = A_n$, also die Anzahl der Kunden im System, die der n -te Kunde vorfindet. Man kann zeigen:

$(A_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ist eine homogene Markovkette, für die im Fall $\lambda < \mu$ eine stationäre Verteilung existiert. Diese hat die Gestalt

$$p_k = \omega^k(1 - \omega), k \in \mathbb{N}_0,$$

wobei ω Lösung der Fixpunktgleichung

$$\omega = \int_0^\infty e^{-(1-\omega)\mu x} g(x) dx$$

ist. Für $\lambda < \mu$ ist die Lösung $\omega \in (0, 1)$ eindeutig und kann durch Iteration ermittelt werden:

$$\omega_{i+1} = \int_0^\infty e^{-(1-\omega_i)\mu x} g(x) dx, \omega_0 \in (0, 1).$$

Spezialfall: Wenn der bereits bekannte Fall eines Poissonschen Eingangsstromes mit Intensität λ vorliegt, ergibt sich $\omega = \frac{\lambda}{\mu}$, denn es gilt

$$\int_0^\infty e^{-(1-\frac{\lambda}{\mu})\mu x} \lambda e^{-\lambda x} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\mu x} dx = \frac{\lambda}{\mu} \int_0^\infty \mu e^{-\mu x} dx = \frac{\lambda}{\mu}.$$

2.5 Warteschlangennetzwerke

Man unterscheidet zwei Arten von Netzwerken:

Offene Netzwerke : Es existieren eine Quelle, von der neue Kunden in das System gelangen und eine Senke, durch die bediente Kunden das System verlassen.

Geschlossene Netzwerke : Es sind keine Neuzugänge bzw. Abgänge möglich.

2.5.1 Reversibilität und der Satz von Burke

Definition 2.5.1. Ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t \in (-\infty, \infty)}$ heißt *reversibel*, wenn $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_m})$ und $(X_{\tau-t_1}, X_{\tau-t_2}, \dots, X_{\tau-t_m})$ für alle $\tau \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}, t_i \in \mathbb{R}$ dieselbe Verteilung besitzen.

Satz 2.5.2. Eine MKSZ $(X_t)_{t \in (-\infty, \infty)}$ mit $\mathcal{S} = \mathbb{N}_0$ und Intensitätsmatrix Q , die sich im stationären Zustand befindet, ist genau dann reversibel, wenn eine Wahrscheinlichkeitsverteilung $\mathbf{p} = (p_i)_{i \in \mathcal{S}}$ derart existiert, dass gilt

$$p_i q_{ij} = p_j q_{ji} \quad \forall i, j \in \mathcal{S}. \quad (2.13)$$

Beweis. Es wird nur gezeigt, dass für eine reversible MKSZ die Beziehung (2.13) gilt.

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ sei reversibel. Dann folgt

$$P(X_t = i, X_{t+h} = j) = P(X_t = j, X_{t+h} = i), \text{ also}$$

$$P(X_t = i)P(X_{t+h} = j \mid X_t = i) = P(X_t = j)P(X_{t+h} = i \mid X_t = j) \text{ und schließlich}$$

$$\lim_{h \downarrow 0} P(X_t = i) \cdot \frac{P(X_{t+h} = j \mid X_t = i)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} P(X_t = j) \cdot \frac{P(X_{t+h} = i \mid X_t = j)}{h}$$

sowie

$$p_i q_{ij} = p_j q_{ji}. \quad \square$$

Bemerkung 2.5.3.

1. Die im Falle der Gültigkeit von (2.13) existierende Wahrscheinlichkeitsverteilung \mathbf{p} ist die stationäre Verteilung, denn

$$(\mathbf{p}^T Q)_i = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_j q_{ji} = \sum_{j \in \mathcal{S}} p_i q_{ij} = p_i \sum_{j \in \mathcal{S}} q_{ij} = 0 \quad \forall i \in \mathcal{S}.$$

2. Aufgrund des obigen Satzes kann man häufig \mathbf{p} „raten“ und dann (2.13) prüfen.
3. Die Anzahl der Kunden in einem $M/M/s/\infty$ -System im stationären Zustand ist ein reversibler Prozess, denn für die stationäre Verteilung gilt

$$p_i = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} p_0,$$

also

$$p_i q_{i,i+1} = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_i} p_0 \lambda_i = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_i}{\mu_1 \cdots \mu_{i+1}} p_0 \mu_{i+1} = p_{i+1} q_{i+1,i}.$$

Satz 2.5.4 (Satz von Burke, Satz vom Output). Die Zeitpunkte, zu denen ein Kunde ein $M(\lambda)/M(\mu)/s/\infty$ -System im stationären Zustand verlässt, bilden einen Poissonprozess mit Intensität λ .

Beweis. Sei $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ die Anzahl der Kunden im System. Die Punkte, zu denen ein Sprung der Höhe +1 erfolgt, bilden einen Poissonschen Eingangsprozess mit Intensität λ . Da $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ reversibel ist, müssen die Punkte, in denen der Prozess $(X_{\tau-t})_{t \in \mathbb{R}}$ einen Sprung der Höhe +1 aufweist, ebenfalls einen Poissonprozess mit Intensität λ bilden. Diese Punkte sind gerade die Punkte, zu denen ein Kunde das System verlässt. \square

2.5.2 Jackson-Netzwerke

Im Folgenden bezeichnen

$$\begin{aligned} S_i & \text{ Bediensystem Nr. } i, 1 \leq i \leq J, \\ X_t^{(i)} & \text{ Anzahl Kunden im Bediensystem } i \end{aligned}$$

Realisierungen des Vektors $(X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(J)})$ werden mit $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}_0^J$ bezeichnet und es sei \mathbf{e}_i der i -te Einheitsvektor.

Es werden die folgenden Übergangsmöglichkeiten in Betracht gezogen (S_{J+1} ist ein zusätzliches System, das die „Außenwelt“ darstellt):

- Übergang von S_i nach S_j

$$q_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \mu_{ij}(\mathbf{x}), \text{ falls } \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j,$$

- Ankunft (von außen) bei S_i

$$q_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \lambda_i(\mathbf{x}), \text{ falls } \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}_i,$$

- Abgang (nach außen) von S_i

$$q_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} = \mu_{i, J+1}(\mathbf{x}), \text{ falls } \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{e}_i.$$

Weiterhin wird die Abkürzung

$$\mu_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{J+1} \mu_{ij}(\mathbf{x})$$

eingeführt.

Definition 2.5.5. Ein (*offenes*) Jackson-Netzwerk ist eine MKSZ $(\mathbf{x}_t)_{t \geq 0}$, die folgende Voraussetzungen erfüllt:

1. $\lambda_i(\mathbf{x}) = \lambda_i, \quad i = 1, \dots, J,$
und die Ankunftsprozesse von außen an jeder Station sind voneinander unabhängige Poissonprozesse,
2. $\mu_i(\mathbf{x}) = \mu_i(x_i) > 0, \quad i = 1, \dots, J$
(die Bedienrate kann von der Zahl der Kunden im jeweiligen System abhängen, nicht aber von der Zahl der Kunden in anderen Systemen),
3. $\mu_{ij}(\mathbf{x}) = \mu_i(x_i)r_{ij}$, wobei $r_{ij}, \quad i = 1, \dots, J, \quad j = 1, \dots, J+1$, die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, mit der ein Übergang vom System S_i zum System S_j erfolgt,
4. es existieren mindestens ein System, das von außen Aufträge erhält und mindestens ein System, von dem aus Kunden das Netzwerk verlassen können, d. h. $(\exists i : \lambda_i > 0)$ und $(\exists j : r_{j, J+1} > 0)$,

5. mit den Größen

$$r_{J+1,i} := \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^J \lambda_i} \quad \text{und} \quad r_{J+1,J+1} := 0$$

bildet $\mathbf{P} = (r_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, J+1\}}$ die Übergangsmatrix einer irreduziblen Markovkette.

Bemerkung 2.5.6. Insbesondere ist ein Netzwerk aus $M/M/s/\infty$ -Systemen ein offenes Jackson-Netzwerk, falls 1. und 3. bis 5. erfüllt sind.

Bemerkung 2.5.7. Netzwerke, die die obigen Bedingungen mit Ausnahme von Bedingung 2. erfüllen, werden auch Whittle-Netzwerke genannt.

Im Folgenden bezeichne Λ_i die (Gesamt-)Ankunftsrate bei S_i (von außen und von anderen Stationen) in einem System S_i . Die Λ_i erfüllen das lineare Gleichungssystem

$$\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^J \Lambda_j r_{ji} \quad i = 1, \dots, J. \quad (2.14)$$

Für ein Jackson-Netzwerk besitzt (2.14) eine eindeutige Lösung.

Zur Bestimmung der stationären Verteilung wird die Abkürzung

$$P(X^{(i)} = 0) = p_i(0) := \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_i^n}{\mu_i(1) \cdots \mu_i(n)} \right]^{-1}$$

eingeführt (falls die Summe konvergiert).

Satz 2.5.8. *Ein Jackson-Netzwerk besitzt genau dann eine stationäre Verteilung, wenn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda_i^n}{\mu_i(1) \cdots \mu_i(n)}$$

für alle $i \in \{1, \dots, J\}$ konvergiert. Im Falle der Existenz hat die stationäre Verteilung mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_J)$ die Gestalt

$$p(\mathbf{x}) := P(X^{(1)} = x_1, \dots, X^{(J)} = x_J) = p_1(x_1) \cdot p_2(x_2) \cdots p_J(x_J)$$

mit

$$p_i(x_i) := \frac{\Lambda_i^{x_i}}{\mu_i(1) \cdots \mu_i(x_i)} p_i(0) = \frac{\Lambda_i}{\mu_i(1)} \cdots \frac{\Lambda_i}{\mu_i(x_i)} p_i(0)$$

für $x_i \in \mathbb{N}_0$ und $i \in \{1, \dots, J\}$.

Bemerkung 2.5.9. Im Spezialfall eines Netzwerks aus $M/M/1/\infty$ -Systemen ergibt sich

$$P(X^{(1)} = x_1, \dots, X^{(J)} = x_J) = \prod_{j=1}^J \left(1 - \frac{\Lambda_j}{\mu_j}\right) \left(\frac{\Lambda_j}{\mu_j}\right)^{x_j}.$$

Beispiel 5. In einer Verwaltung, die aus vier Abteilungen besteht, treffen Kunden ein, die verschiedene Abteilungen durchlaufen müssen. Die Kunden kommen in den Abteilungen 1 und 2 an, wobei die Ankunftszeitpunkte unabhängige Poissonprozesse mit den Intensitäten $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 6$ bilden. Die Service-Raten in den Abteilungen seien $\mu_1 = \mu_2 = 20$ und $\mu_3 = \mu_4 = 40$. Die Zeiten werden in Stunden gemessen. Die Übergänge zwischen den Abteilungen und nach außen werden durch die Übergangsmatrix \mathbf{P} beschrieben. Die letzte Zeile der Matrix erhält man aus den Eingangsintensitäten.

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Für die (Gesamt-)Ankunftsrate ergibt sich nach der Vorschrift

$$\Lambda_i = \lambda_i + \sum_{j=1}^J \Lambda_j p_{ji} \quad i = 1, \dots, J,$$

das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 2 + && \frac{1}{4}\Lambda_3 + \frac{1}{4}\Lambda_4 \\ \Lambda_2 &= 6 + \frac{1}{2}\Lambda_1 \\ \Lambda_3 &= \frac{1}{2}\Lambda_1 + \Lambda_2 + && \frac{1}{4}\Lambda_4 \\ \Lambda_4 &= && \frac{1}{2}\Lambda_3 + \frac{1}{4}\Lambda_4, \end{aligned}$$

das die Lösung $\Lambda_1 = 15\frac{1}{3}$, $\Lambda_2 = 13\frac{2}{3}$, $\Lambda_3 = 32$, $\Lambda_4 = 21\frac{1}{3}$ besitzt.

Da in allen Abteilungen die Bedienrate nicht von der Zahl der Kunden abhängt, kann man jeweils vom Fall $s = 1$ ausgehen. Wegen $\frac{\Lambda_i}{\mu_i} < 1$, $i = 1, \dots, 4$, existiert eine stationäre Verteilung. Es gilt

$$(p_i(0))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i} \right)^n = \frac{\mu_i}{\mu_i - \Lambda_i},$$

also $p_1(0) = \frac{7}{30}$, $p_2(0) = \frac{19}{60}$, $p_3(0) = \frac{1}{5}$, $p_4(0) = \frac{7}{15}$.

Mit diesen Größen ergibt sich die stationäre Verteilung zu

$$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = p_1(0) \left(\frac{\Lambda_1}{\mu_1} \right)^{x_1} \cdots p_4(0) \left(\frac{\Lambda_4}{\mu_4} \right)^{x_4}.$$

2.5.3 Geschlossene Netzwerke

Im Folgenden bezeichnen

- K Gesamtzahl der Kunden im Netzwerk,
- J Anzahl der Systeme.

Für die Übergänge zwischen den einzelnen Systemen werden die gleichen Annahmen wie bei den Jackson-Netzwerken getroffen. Im Folgenden wird das Vorgehen aber nur an Systemen S_i mit je einem Bediengerät (Bedienrate μ_i) erläutert.

Die Menge

$$Z(J, K) = \{(k_1, \dots, k_J) \mid \sum_{i=1}^J k_i = K\}$$

beschreibt alle möglichen Aufteilungen von K Kunden auf J Systeme. Sie besitzt $\binom{J+K-1}{K}$ Elemente.

Da keine Zugänge und Abgänge erfolgen, hängen die Ankunftsraten an den einzelnen Teilsystemen nur von den Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Systemen ab. Die Ankunftsraten erfüllen das homogene lineare Gleichungssystem

$$\Lambda_i = \sum_{j=1}^J \Lambda_j p_{ji} \quad i = 1, \dots, J.$$

Das Gleichungssystem besitzt keine eindeutige Lösung. Die Λ_i , $i = 1, \dots, J$, sollten so gewählt werden, dass $\Lambda_i < \mu_i$, $i = 1, \dots, J$, gilt. Es existiert stets eine stationäre Verteilung für den Vektor der Anzahlen X_i der Kunden in den Systemen S_i , $i = 1, \dots, J$; sie hat die Gestalt

$$P(X_t^{(1)} = k_1, \dots, X_t^{(J)} = k_J) = \frac{\prod_{i=1}^J \left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i}}{\sum_{\tilde{\mathbf{k}} \in Z(J, K)} \prod_{i=1}^J \left(\frac{\Lambda_i}{\mu_i}\right)^{\tilde{k}_i}}$$

mit $\tilde{\mathbf{k}} = (\tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_J)$.

Beispiel 6. Wir betrachten ein geschlossenes Netzwerk mit $J = 2$ Systemen, $K = 2$ Kunden, der Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und den Bedienraten $\mu_1 = 20$, $\mu_2 = 15$.

Die Ankunftsraten Λ_i , $i = 1, \dots, J$, müssen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{2}\Lambda_1 + \Lambda_2 \\ \Lambda_2 &= \frac{1}{2}\Lambda_1 \end{aligned}$$

erfüllen, das die Bedingung $\Lambda_2 = \frac{1}{2}\Lambda_1$ liefert. Mit der speziellen Lösung $\Lambda_1 = 10, \Lambda_2 = 5$ erhält man $\varrho_1 := \frac{\Lambda_1}{\mu_1} = \frac{1}{2}$, $\varrho_2 := \frac{\Lambda_2}{\mu_2} = \frac{1}{3}$.

Die stationäre Verteilung wird nach der Vorschrift

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = \frac{(1 - \varrho_1)\varrho_1^{k_1} \cdot (1 - \varrho_2)\varrho_2^{k_2}}{(1 - \varrho_1)(1 - \varrho_2)(\varrho_1^2 + \varrho_1\varrho_2 + \varrho_2^2)} = \frac{\varrho_1^{k_1}\varrho_2^{k_2}}{(\varrho_1^2 + \varrho_1\varrho_2 + \varrho_2^2)}$$

bestimmt; es ergibt sich

$$P(X_1 = k_1, X_2 = k_2) = \begin{cases} \frac{9}{19} & k_1 = 2, k_2 = 0 \\ \frac{6}{19} & k_1 = 1, k_2 = 1 \\ \frac{4}{19} & k_1 = 0, k_2 = 2. \end{cases}$$