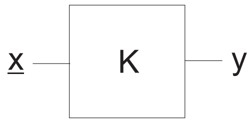
Grundlagen digitaler Schaltungstechnik

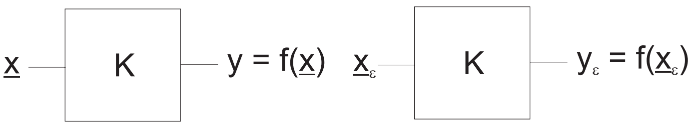
Teil 1: Kombinatorische Schaltungen



K - kombinatorische Schaltung
$x \in X = \{0,1\}$ - Eingangsvariable
$y \in Y = \{0,1\}$ - Ausgangsvariable
$y = f(\underline{x})$ - Schaltfunktion der K

Kombinatorische Schaltungen K mit einem Ausgang y

k- Eingangsvariable $(x_{k-1},...,x_\kappa,...,x_0)$
$\kappa = 0,...,k-1$



e = 2k-Eingangsbelegungen
$\underline{x}_\varepsilon = (x_{\varepsilon k-1},...,...x_{\varepsilon,\kappa},...x_{\varepsilon,0})$
$\varepsilon = 0,...,e-1$

Eingangsbelegungen $\underline{x}_\varepsilon$ als Zeilenvektoren und Matrix:

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ | \\ \underline{x}_0 \\ | \\ \underline{x}_{e-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,k-1} & \dots & x_{0,\kappa} & \dots & x_{0,0} \\ | & & | & & | \\ x_{\varepsilon,k-1} & \dots & x_{\varepsilon,\kappa} & \dots & x_{\varepsilon,0} \\ | & & | & & | \\ x_{e-1,k-1} & \dots & x_{e-1,\kappa} & \dots & x_{e-1,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\varepsilon,\kappa} \end{bmatrix}$$

z. B.: k = 2
$\kappa = 0,1$

ε	x_1	x_0	y_ε
0	0	0	
1	0	1	$\in \{0,1\}$
2	1	0	
3	1	1	

$\underline{x}_\varepsilon = (x_{\varepsilon,1},\ x_{\varepsilon,0})$
$e = 2^k = 4,\ \ \varepsilon = 0,1,2,3$

$$\underline{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \underline{x}_0 \\ \underline{x}_2 \\ \underline{x}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0,1} & x_{0,0} \\ x_{1,1} & x_{1,0} \\ x_{2,1} & x_{2,0} \\ x_{3,1} & x_{3,0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ausgangsbelegungen $y_\varepsilon = f(\underline{x}_\varepsilon)$ für e-Eingangsbelegungen am Ausgang y für eine fest vorgegebene Schaltfunktion $y = f(\underline{x})$.

$$y^f = \begin{bmatrix} y_0 \\ | \\ y_\varepsilon \\ | \\ y_{e-1} \end{bmatrix}$$

$a = 2^e = 2^{2'}$-mögliche Ausgangsfunktionen =
a mögliche unterschiedliche Schaltfunktionen
$\alpha = 0,...,a-1$

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_0 & \cdots & \underline{y}_\alpha & \cdots & \underline{y}_{a-1} \end{bmatrix}$$

Ausgangsfunktionen y_α als Spaltenvektoren und Matrix:

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} \underline{y}_0 & \cdots & \underline{y}_\alpha & \cdots & \underline{y}_{a-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & \cdots & y_{0,\alpha} & \cdots & y_{0,a-1} \\ | & & | & & | \\ y_{\varepsilon,0} & \cdots & y_{\varepsilon,\alpha} & \cdots & y_{\varepsilon,a-1} \\ | & & | & & | \\ y_{e-1,0} & \cdots & y_{e-1,\alpha} & \cdots & y_{e-1,a-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y_{\varepsilon,\alpha} \end{bmatrix}$$

z. B. Antivalenz
$y^f = x_1 \mathrel{\not{+}} x_0$

$$\underline{y}^f = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \underline{y}^f = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$a = 2^e = 2^{2^k} = 2^{2^2} = 16$
$\alpha = 0,...,15$

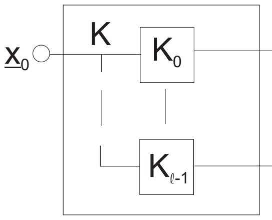
$$\begin{bmatrix} \underline{y}_0 , \underline{y}_1 \cdots \underline{y}_{15} \end{bmatrix}$$

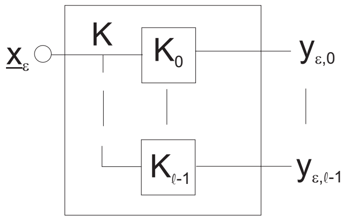
$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & \cdots & y_{0,15} \\ y_{1,0} & y_{1,1} & \cdots & y_{1,15} \\ y_{2,0} & y_{2,1} & \cdots & y_{2,15} \\ y_{3,0} & y_{3,1} & \cdots & y_{3,15} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

Kombinatorische Schaltungen K mit mehr als einem Ausgang

ℓ-Ausgänge y
$\ell = 0,...,\ell\text{-}1$





Schaltfunktionen: $y_\lambda = f_\lambda(\underline{x})$

Zu jeder Eingangsbelegung $\underline{x}_\varepsilon$ gehört eine Ausgangsbelegung $\underline{y}_\varepsilon$ in Form eines Zeilenvektors

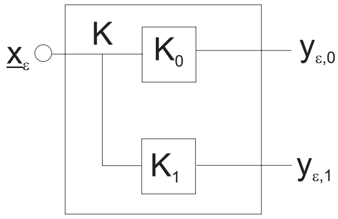
$$\underline{y}_\varepsilon = \begin{bmatrix} y_{\varepsilon,0} & \dots & y_{\varepsilon,\lambda} & \dots & y_{\varepsilon,\ell-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_\varepsilon = \begin{bmatrix} f_0(\underline{x}_\varepsilon) & \dots & f_\lambda(\underline{x}_\varepsilon) & \dots & f_{\ell-1}(\underline{x}_\varepsilon) \end{bmatrix}$$

Für alle e Eingangsbelegungen gibt es e Zeilenvektoren $\underline{y}_\varepsilon$:

$$\underline{Y}^f = \begin{bmatrix} \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \underline{x}_0 \\ \vdots \\ \underline{y}_{e-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & \dots & y_{0,\lambda} & \dots & y_{0,\ell-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{\varepsilon,0} & \dots & y_{\varepsilon,\lambda} & \dots & y_{\varepsilon,\ell-1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{e-1,0} & \dots & y_{e-1,\lambda} & \dots & y_{e-1,\ell-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{\varepsilon,\lambda} \end{bmatrix}$$

z. B. $\ell = 2$, $k = 2$



$y_0 = f_0(\underline{x})$ und $y_1 = f_1(\underline{x})$

ε	x_1	x_0	$y_{\varepsilon,0}$	$y_{\varepsilon,1}$
0	0	0		
1	0	1	$\in\{0,1\}$	$\in\{0,1\}$
2	1	0		
3	1	1		

$$\underline{y}_\varepsilon = \begin{bmatrix} y_{\varepsilon,0} & y_{\varepsilon,1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{Y}^f = \begin{bmatrix} \underline{y}_0 \\ \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \underline{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} \\ y_{1,0} & y_{1,1} \\ y_{2,0} & y_{2,1} \\ y_{3,0} & y_{3,1} \end{bmatrix}$$

Da wiederum a mögliche Ausgangsfunktionen pro Ausgang y_λ definierbar sind, existieren a' solche Matrizen Y^f und damit genauso viele kombinatorische Schaltungen K mit k-Eingängen und ℓ Ausgängen.

$a\ell = 16^2 = 256$ unterschiedliche kombinatorische Schaltungen K

Besitzt eine kombinatorische Schaltung mehr als a Ausgänge ℓ, dann entstehen ℓ-a äquivalente (also redundante) Ausgangsfunktionen.

Deshalb wählt man $\ell \leq a$.