7. Stochastische Prozesse

Original- und Korrelationsfunktionen bzw. Spektralfunktionen

Tafel 1.4 Übersicht zum Zusammenhang von Original- und Korrelationsfunktionen bzw. Spektralfunktionen für die betrachteten Signalarten

stochastisch

Leistungssignal $x(t)$

$$
\begin{array}{ccc}
x_T(t) & \circ\!\!-\!\!\bullet & X_T(f) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\varphi_{xx}(\tau) & \circ\!\!-\!\!\bullet & \Phi_{xx}(f)
\end{array}
$$

mittlere Leistung

$$\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f)\,\mathrm{d}f$$

Original- und Korrelationsfunktionen bzw. Spektralfunktionen

Tafel 1.4 Übersicht zum Zusammenhang von Original- und Korrelationsfunktionen bzw. Spektralfunktionen für die betrachteten Signalarten

stochastisch Leistungssignal $x(t)$	**determiniert** periodisch Leistungssignal $u_p(t)$
$x_T(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ X_T(f)$ $\downarrow \qquad \downarrow$ $\varphi_{xx}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \Phi_{xx}(f)$	$u_p(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ U_p(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} C(\mu)\,\delta(f-\mu f_0)$ $\downarrow \qquad \downarrow$ $\varphi_{pp}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \Phi_{pp}(f)$ $= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \lvert C(\mu)\rvert^2\,\delta(f-\mu f_0)$
mittlere Leistung $\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f)\,df$	mittlere Leistung $\varphi_{pp}(0) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \lvert C(\mu)\rvert^2$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{pp}(f)\,df$

Original- und Korrelationsfunktionen bzw. Spektralfunktionen

Tafel 1.4 Übersicht zum Zusammenhang von Original- und Korrelationsfunktionen bzw. Spektralfunktionen für die betrachteten Signalarten

stochastisch	**determiniert**	
Leistungssignal $x(t)$	periodisch Leistungssignal $u_{\mathrm{p}}(t)$	aperiodisch Energiesignal $u(t)$
$x_{\mathrm{T}}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet X_{\mathrm{T}}(f)$ $\downarrow \qquad \downarrow$ $\varphi_{xx}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \Phi_{xx}(f)$	$u_{\mathrm{p}}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet U_{\mathrm{p}}(f) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} C(\mu)\,\delta(f-\mu f_0)$ $\downarrow \qquad \downarrow$ $\varphi_{\mathrm{pp}}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \Phi_{\mathrm{pp}}(f)$ $= \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \lvert C(\mu)\rvert^2\,\delta(f-\mu f_0)$	$u(t) \circ\!\!-\!\!\bullet U(f)$ $\downarrow \qquad \downarrow$ $\varphi_{uu}^{\mathrm{E}}(\tau) \circ\!\!-\!\!\bullet \Phi_{uu}^{\mathrm{E}}(f)$ $= \lvert U(f)\rvert^2$
mittlere Leistung $\varphi_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{xx}(f)\,\mathrm{d}f$	mittlere Leistung $\varphi_{\mathrm{pp}}(0) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} \lvert C(\mu)\rvert^2$ $= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{\mathrm{pp}}(f)\,\mathrm{d}f$	Energie $\varphi_{uu}^{\mathrm{E}}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_{uu}^{\mathrm{E}}(f)\,\mathrm{d}f$

7.5 Kreuzkorrelationsfunktionen und zugehörige Spektralfunktionen

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

$$\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\}$$

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

$$\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\}$$

$$\boxed{\varphi_{XY}(-\tau) = \varphi_{YX}(\tau) = \mathrm{E}\{Y(t)X(t+\tau)\}}$$

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

$$\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\}$$

$$\boxed{\varphi_{XY}(-\tau) = \varphi_{YX}(\tau) = \mathrm{E}\{Y(t)X(t+\tau)\}}$$

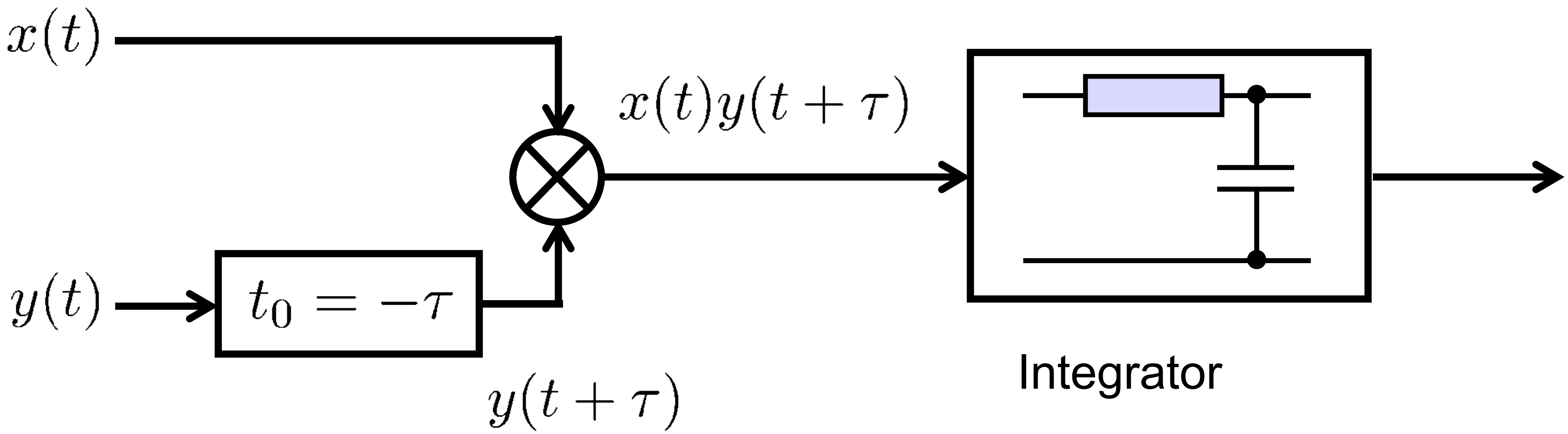
Ergodischer Prozess

$$\begin{aligned}\varphi_{XY}(\tau) &= \overline{x(t)y(t+\tau)} \\ &= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x(t)y(t+\tau)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

Maß für die lineare statistische Abhängigkeit zweier Zufallfunktionen $x(t)$ und $y(t)$ als Realisierungen zweier verschiedener ergodischer Prozess

- mögliche Implementierung:



7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

Zusammenhang KKF <=> Leistung der Einzelsignale

Annahme $x(t), y(t)$ reell

$x(t) \neq \pm y(t+\tau) \Rightarrow$ falls nicht ausgeschlossen $"\geq"$

$$\overline{[x(t) \pm y(t+\tau)]^2} > 0$$

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

Zusammenhang KKF <=> Leistung der Einzelsignale

Annahme $x(t), y(t)$ reell

$x(t) \neq \pm y(t+\tau) \Rightarrow$ falls nicht ausgeschlossen $"\geq"$

$$\overline{[x(t) \pm y(t+\tau)]^2} > 0$$

$$\underbrace{\overline{x^2(t)}} \pm 2 \underbrace{\overline{x(t) y(t+\tau)}} + \underbrace{\overline{y^2(t+\tau)}} > 0$$

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

Zusammenhang KKF <=> Leistung der Einzelsignale

Annahme $x(t), y(t)$ reell

$x(t) \neq \pm y(t+\tau) \Rightarrow$ falls nicht ausgeschlossen $"\geq"$

$$\overline{[x(t) \pm y(t+\tau)]^2} > 0$$

$$\underbrace{\overline{x^2(t)}}_{\varphi_{XX}(0)} \pm 2\,\underbrace{\overline{x(t)y(t+\tau)}}_{\varphi_{XY}(\tau)} + \underbrace{\overline{y^2(t+\tau)}}_{\varphi_{YY}(0)} > 0$$

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

Zusammenhang KKF <=> Leistung der Einzelsignale

Annahme $x(t), y(t)$ reell

$x(t) \neq \pm y(t+\tau) \Rightarrow$ falls nicht ausgeschlossen "$\geq$"

$$\overline{[x(t) \pm y(t+\tau)]^2} > 0$$

$$\underbrace{\overline{x^2(t)}}_{\varphi_{XX}(0)} \pm 2 \underbrace{\overline{x(t)y(t+\tau)}}_{\varphi_{XY}(\tau)} + \underbrace{\overline{y^2(t+\tau)}}_{\varphi_{YY}(0)} > 0$$

$$\pm 2\varphi_{XY}(\tau) > -\varphi_{XX}(0) - \varphi_{YY}(0)$$

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

Zusammenhang KKF <=> Leistung der Einzelsignale

Annahme $x(t), y(t)$ reell

$x(t) \neq \pm y(t+\tau) \Rightarrow$ falls nicht ausgeschlossen $"\geq"$

$$\overline{[x(t) \pm y(t+\tau)]^2} > 0$$

$$\underbrace{\overline{x^2(t)}}_{\varphi_{XX}(0)} \pm 2 \underbrace{\overline{x(t)y(t+\tau)}}_{\varphi_{XY}(\tau)} + \underbrace{\overline{y^2(t+\tau)}}_{\varphi_{YY}(0)} > 0$$

$$\pm 2\varphi_{XY}(\tau) > -\varphi_{XX}(0) - \varphi_{YY}(0)$$

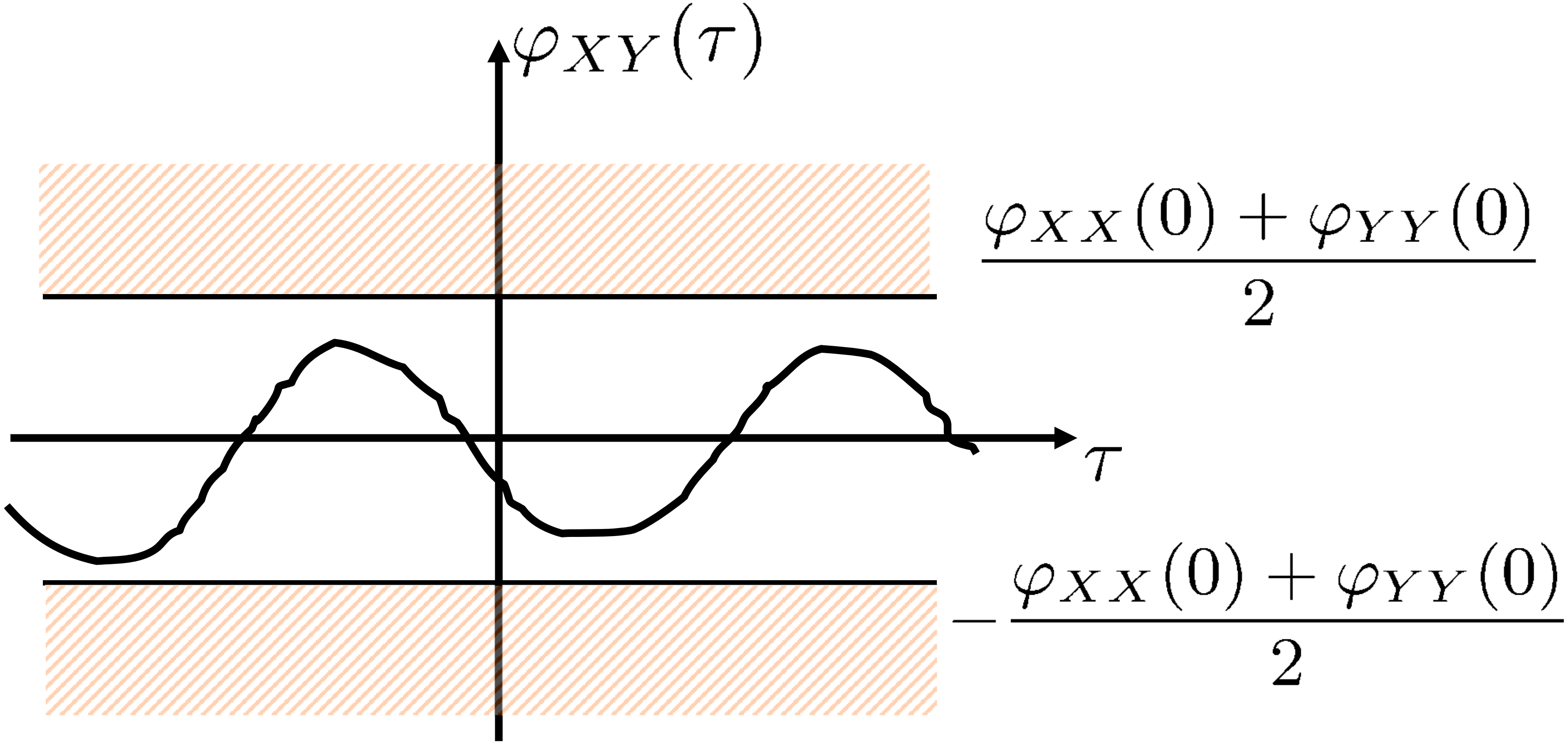
$$\mp\varphi_{XY}(\tau) < \underbrace{\frac{1}{2}[\varphi_{XX}(0) + \varphi_{YY}(0)]}_{>0}$$

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

$$\boxed{|\varphi_{XY}(\tau)| < \frac{1}{2}\left[\varphi_{XX}(0) + \varphi_{YY}(0)\right]}$$

7.5.1 KKF von stochastischen Signalen

$$\boxed{\left|\varphi_{XY}(\tau)\right| < \tfrac{1}{2}\left[\varphi_{XX}(0) + \varphi_{YY}(0)\right]}$$



7.5.2 KKF von deterministischen Signalen

KKF periodischer Zeitfunktionen

Vorausetzung: periodische deterministische Zeitfunktionen $u_{p_1}(t)$ und $u_{p_2}(t)$ haben die gleiche Periode t_p (Sonderfall stochastischer Signale)

$$\boxed{\varphi_{p_{12}}(\tau) = \frac{1}{kt_p} \int_{kt_p} u_{p_1}(t) u_{p_2}(t+\tau) \mathrm{d}t, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$$

periodisch mit t_p [gleiche Periode wie $u_{p_1}(t)$ und $u_{p_2}(t)$]

7.5.2 KKF von deterministischen Signalen

KKF periodischer Zeitfunktionen

Vorausetzung: periodische deterministische Zeitfunktionen $u_{p_1}(t)$ und $u_{p_2}(t)$ haben die gleiche Periode t_p (Sonderfall stochastischer Signale)

$$\varphi_{p_{12}}(\tau) = \frac{1}{kt_p} \int_{kt_p} u_{p_1}(t) u_{p_2}(t+\tau) \mathrm{d}t, \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

periodisch mit t_p [gleiche Periode wie $u_{p_1}(t)$ und $u_{p_2}(t)$]

KKF aperiodischer Zeitfunktionen $u_1(t)$ und $u_2(t)$

analog zur AKF aperiodischer Zeitfunktionen

$$\varphi^{\mathrm{E}}_{u_{12}}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) u_2(t+\tau) \mathrm{d}t \qquad \text{(aperiodisch)}$$

7.5.2 KKF von deterministischen Signalen

wie bei der AKF kann auch die KKF aperiodischer Zeitfunktionen als Faltung ausgedrückt werden

Faltung:

$$u_1(t) * u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) u_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\beta) u_2(t-\beta) \mathrm{d}\beta$$

7.5.2 KKF von deterministischen Signalen

wie bei der AKF kann auch die KKF aperiodischer Zeitfunktionen als Faltung ausgedrückt werden

Faltung:

$$u_1(t) * u_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\tau) u_2(t-\tau) \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\beta) u_2(t-\beta) \mathrm{d}\beta$$

Behauptung:

$$\boxed{\varphi_{u_{12}}^{\mathrm{E}}(\tau) = u_1(-\tau) * u_2(\tau)}$$

7.5.2 KKF von deterministischen Signalen

Beweis:

$$u_1(-\tau) * u_2(\tau) = \int_{z=-\infty}^{z=\infty} u_1(-z)u_2(\tau - z)\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\begin{array}{c} -z = t \\ \mathrm{d}z = -\mathrm{d}t \end{array}}$$

7.5.2 KKF von deterministischen Signalen

Beweis:

$$u_1(-\tau) * u_2(\tau) = \int_{z=-\infty}^{z=\infty} u_1(-z)u_2(\tau - z)\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\begin{aligned} -z &= t \\ \mathrm{d}z &= -\mathrm{d}t \end{aligned}} = \int_{t=\infty}^{t=-\infty} u_1(t)u_2(\tau + t)\,(-\mathrm{d}t)$$

7.5.2 KKF von deterministischen Signalen

Beweis:

$$
\begin{aligned}
u_1(-\tau) * u_2(\tau) &= \int_{z=-\infty}^{z=\infty} u_1(-z)u_2(\tau - z)\mathrm{d}z \\
\boxed{\begin{matrix} -z = t \\ \mathrm{d}z = -\mathrm{d}t \end{matrix}} &= \int_{t=\infty}^{t=-\infty} u_1(t)u_2(\tau + t)\,(-\mathrm{d}t) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t)u_2(t + \tau)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

7.5.2 KKF von deterministischen Signalen

Beweis:

$$\begin{aligned} u_1(-\tau) * u_2(\tau) &= \int_{z=-\infty}^{z=\infty} u_1(-z) u_2(\tau - z) \mathrm{d}z \\ &= \int_{t=\infty}^{t=-\infty} u_1(t) u_2(\tau + t) \, (-\mathrm{d}t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) u_2(t + \tau) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\varphi_{u_{12}}^{\mathrm{E}}(\tau) = u_1(-\tau) * u_2(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) u_2(t + \tau) \mathrm{d}t$$

7.5.2 KKF von deterministischen Signalen

Anwendung: Bildung der KKF durch LTI-Systeme

LTI

$$u_e(t) \longrightarrow \boxed{g(t)} \longrightarrow u_a(t) = u_e(t) * g(t)$$

$$u_e(t) = u_1(-t) \qquad g(t) = u_2(t) \qquad u_a(t) = \varphi^{\mathrm{E}}_{u_{12}}(t)$$

7.5.3 Orthogonalität

2 stochastische Prozesse sind orthogonal, falls

$$\boxed{\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\} = \overline{x(t)y(t+\tau)} = 0}$$

7.5.3 Orthogonalität

2 stochastische Prozesse sind orthogonal, falls

$$\boxed{\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\} = \overline{x(t)y(t+\tau)} = 0}$$

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$ AKF ?

7.5.3 Orthogonalität

2 stochastische Prozesse sind orthogonal, falls

$$\boxed{\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\} = \overline{x(t)y(t+\tau)} = 0}$$

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$ AKF ?

$$\begin{aligned}\varphi_{ZZ}(\tau) &= \mathrm{E}\{Z(t)Z(t+\tau)\} \\ &= \mathrm{E}\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\}\end{aligned}$$

7.5.3 Orthogonalität

2 stochastische Prozesse sind orthogonal, falls

$$\boxed{\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\} = \overline{x(t)y(t+\tau)} = 0}$$

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$ AKF ?

$$\begin{aligned}\varphi_{ZZ}(\tau) &= \mathrm{E}\{Z(t)Z(t+\tau)\} \\ &= \mathrm{E}\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\}\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\mathrm{E}\{X(t)X(t+\tau)\}}_{\varphi_{XX}(\tau)} + \underbrace{\mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\}}_{\varphi_{XY}(\tau)} + \underbrace{\mathrm{E}\{Y(t)X(t+\tau)\}}_{\varphi_{YX}(\tau)\boxed{=\varphi_{XY}(-\tau)}} + \underbrace{\mathrm{E}\{Y(t)Y(t+\tau)\}}_{\varphi_{YY}(\tau)}$$

7.5.3 Orthogonalität

2 stochastische Prozesse sind orthogonal, falls

$$\boxed{\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\} = \overline{x(t)y(t+\tau)} = 0}$$

$$Z(t) = X(t) + Y(t)$$ AKF ?

$$\begin{aligned}\varphi_{ZZ}(\tau) &= \mathrm{E}\{Z(t)Z(t+\tau)\}\\ &= \mathrm{E}\{[X(t)+Y(t)][X(t+\tau)+Y(t+\tau)]\}\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\mathrm{E}\{X(t)X(t+\tau)\}}_{\varphi_{XX}(\tau)} + \underbrace{\mathrm{E}\{X(t)Y(t+\tau)\}}_{\varphi_{XY}(\tau)} + \underbrace{\mathrm{E}\{Y(t)X(t+\tau)\}}_{\varphi_{YX}(\tau)\boxed{=\varphi_{XY}(-\tau)}} + \underbrace{\mathrm{E}\{Y(t)Y(t+\tau)\}}_{\varphi_{YY}(\tau)}$$

$$\underbrace{\varphi_{XY}(\tau) + \varphi_{YX}(\tau)}$$ ist gerade

7.5.3 Orthogonalität

Falls $X(t)$ und $Y(t)$ orthogonal sind,

d.h. $\varphi_{XY}(\tau) = \varphi_{YX}(\tau) = 0$, gilt

$$\boxed{\varphi_{ZZ}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) + \varphi_{YY}(\tau)}$$

7.5.3 Orthogonalität

Falls $X(t)$ und $Y(t)$ orthogonal sind,

d.h. $\varphi_{XY}(\tau) = \varphi_{YX}(\tau) = 0$, gilt

$$\boxed{\varphi_{ZZ}(\tau) = \varphi_{XX}(\tau) + \varphi_{YY}(\tau)}$$

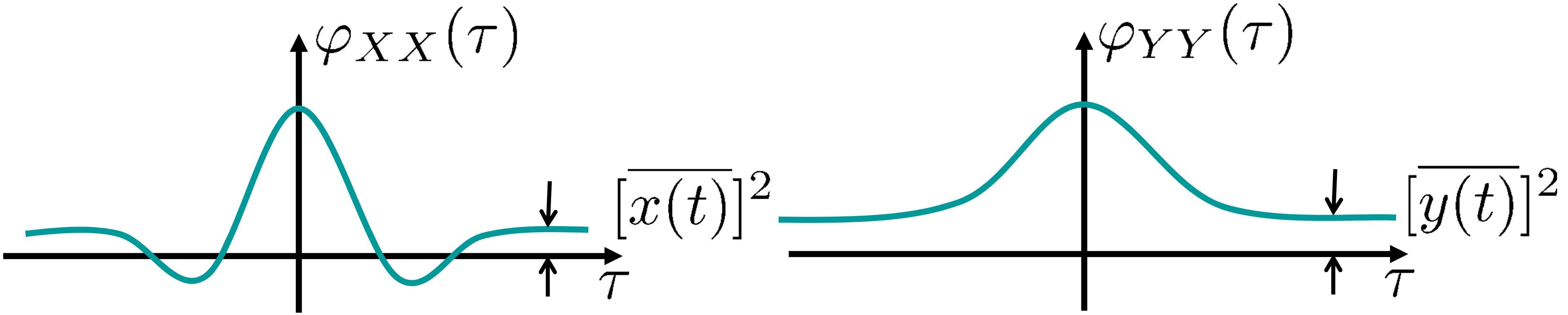
Für $\tau = 0$:

$$\varphi_{ZZ}(0) = \varphi_{XX}(0) + \varphi_{YY}(0)$$

Die Summe der mittleren Leistung der Einzelsignale ist gleich der mittleren Leistung der Vorgangs.

Bedeutung der Gleichkomponenten

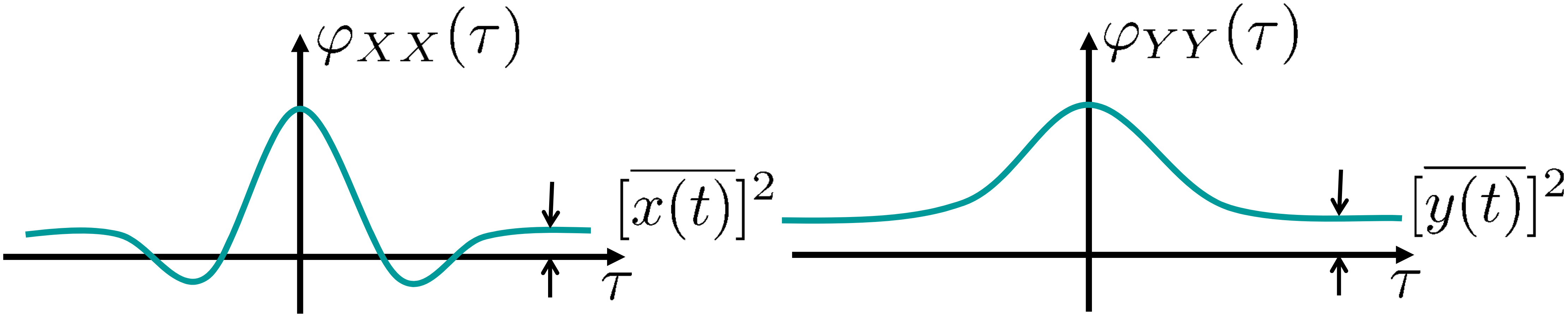
$$\overline{x(t)} = \mathrm{E}\{X(t)\}$$
$$\overline{y(t)} = \mathrm{E}\{Y(t)\}$$



7.5.3 Orthogonalität

Bedeutung der Gleichkomponenten

$$\overline{x(t)} = \mathrm{E}\{X(t)\}$$
$$\overline{y(t)} = \mathrm{E}\{Y(t)\}$$



$$\boxed{\overline{z(t)} = \overline{x(t)} + \overline{y(t)}}$$

7.5.3 Orthogonalität

Unkorrelierte Prozesse

Bei unkorrelierten Prozessen ist die KKF eine Konstante

$$\varphi_{XY}(\tau) = \mathrm{E}\{X(t)\}\mathrm{E}\{Y(t)\} = \overline{x(t)} \cdot \overline{y(t)}$$

orthogonal falls $\overline{x(t)} = 0,\ \overline{y(t)} = 0$

Orthogonalität für periodische deterministische Signale

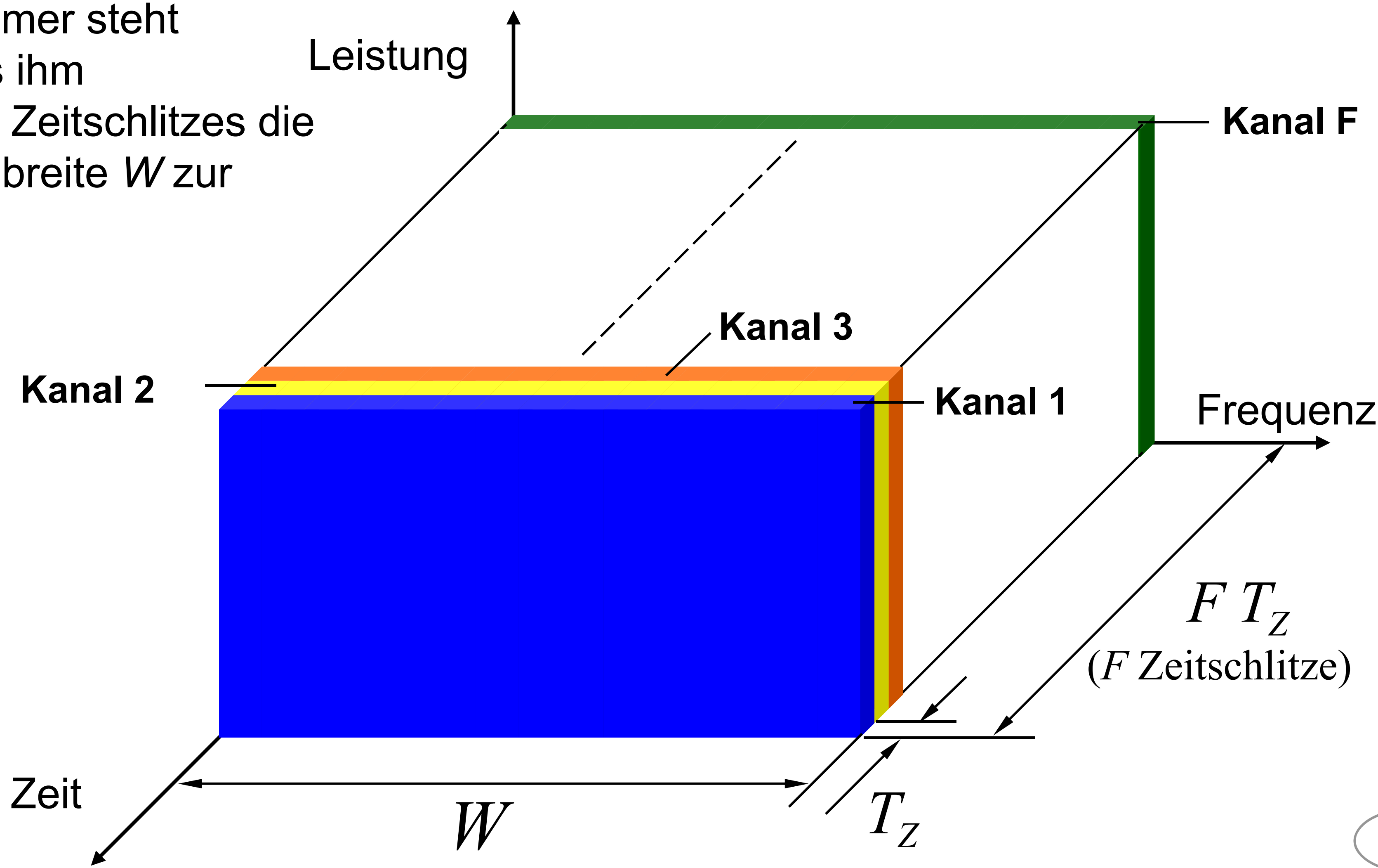
2 periodische deterministische Signale heißen orthogonal, wenn eine schwächere Bedingung

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_{p_{12}}(0) &= \overline{u_{p_1}(t)u_{p_2}(t+0)} \\ &= \frac{1}{t_p}\int_{t_p} u_{p_1}(t)u_{p_2}(t)\mathrm{d}t \\ &= 0 \end{aligned}}$$

erfüllt ist.

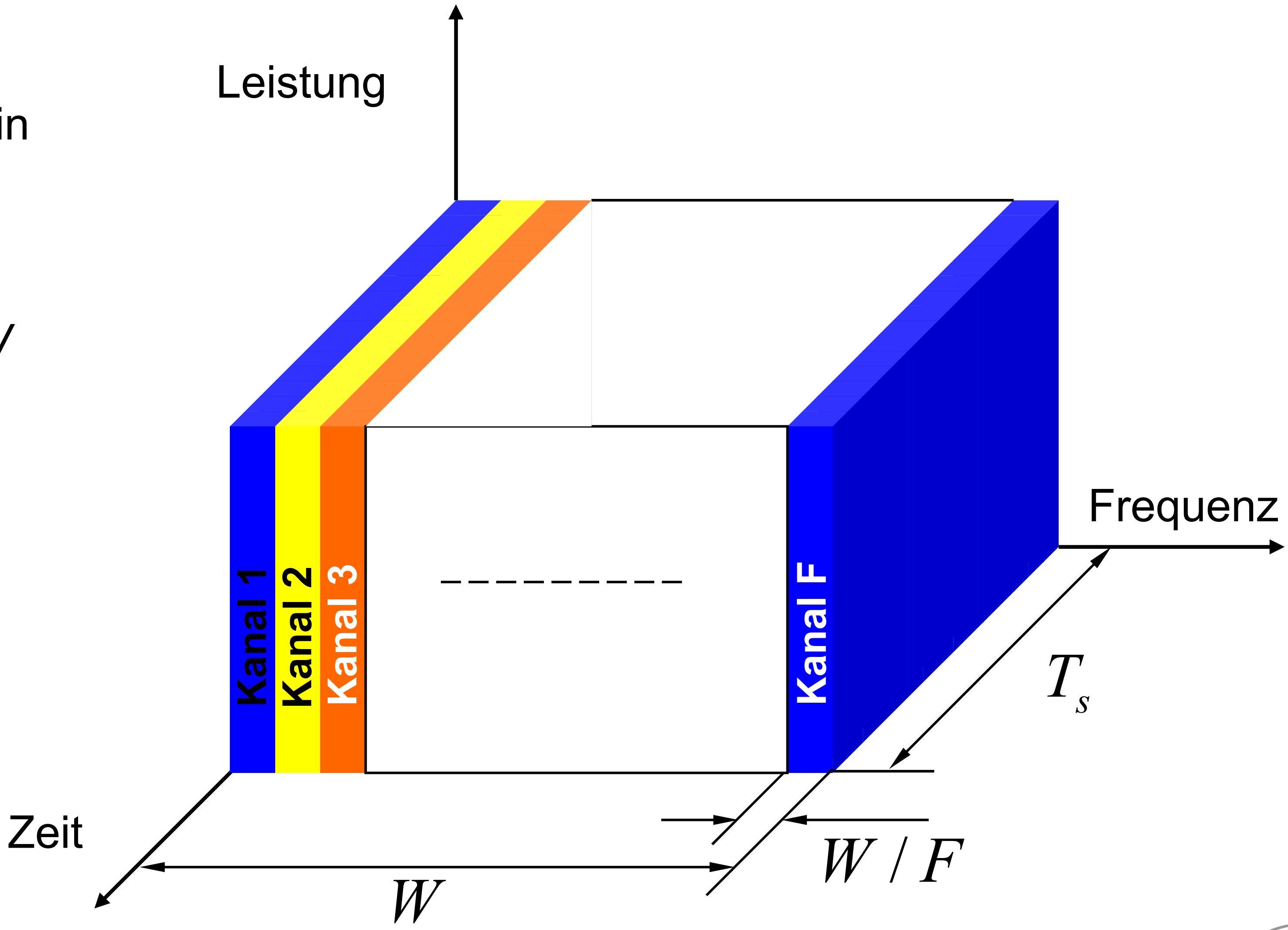
TDMA

- Jedem Teilnehmer steht während eines ihm zugewiesenen Zeitschlitzes die gesamte Bandbreite *W* zur Verfügung



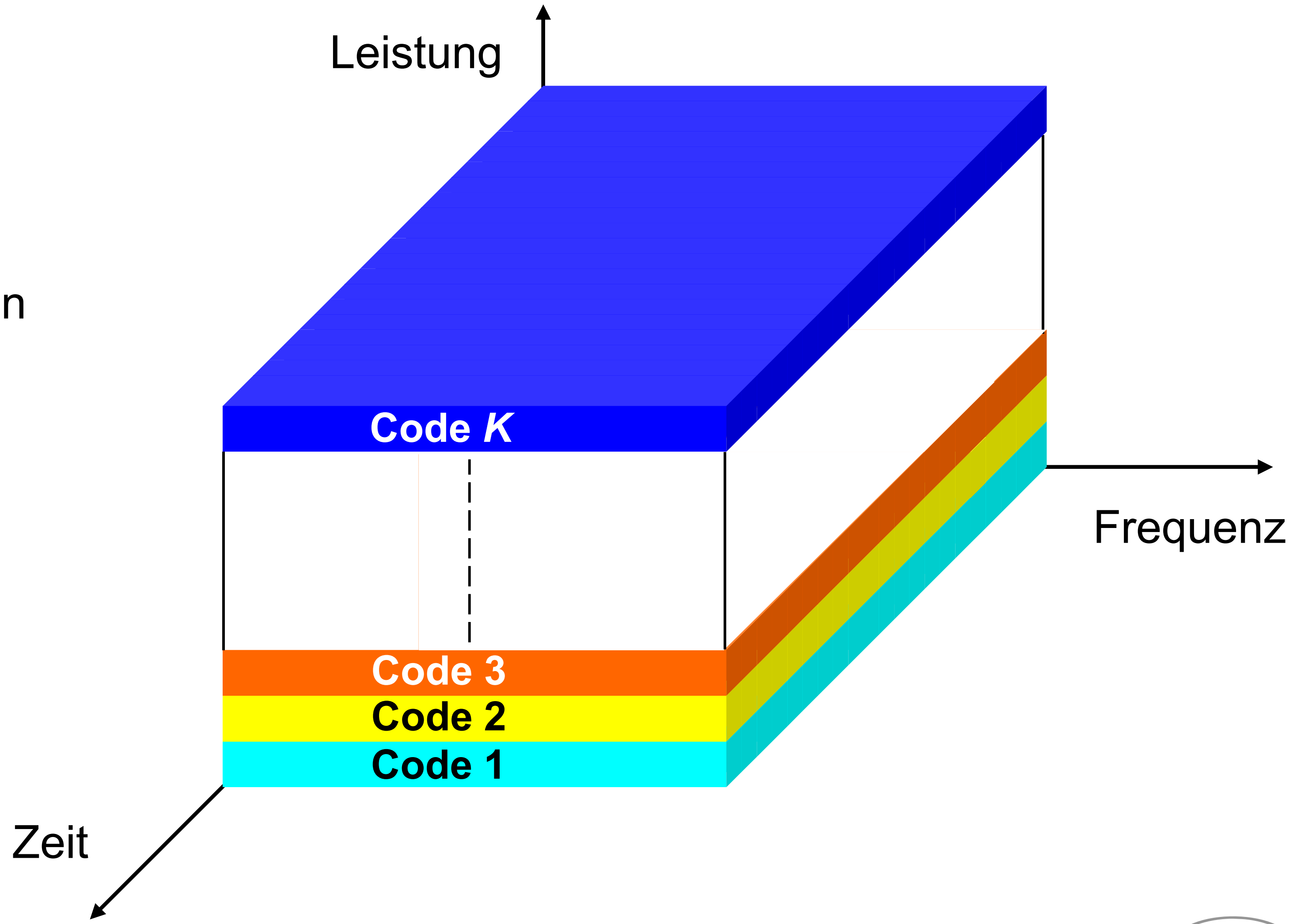
FDMA

- Jedem Teilnehmer steht durchgehend ein begrenztes Frequenzband innerhalb der Gesamtbandbreite *W* zur Verfügung



CDMA

- Zu jeder Zeit steht die gesamte spektrale Bandbreite W zur Verfügung.
- Die Trennung der einzelnen Signale wird durch Verwendung teilnehmerspezifischer Codes ermöglicht.



Technische Universität Ilmenau
Fachgebiet Nachrichtentechnik

7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

Wdh.

Abtastung einer Zeitfunktionen

$$\boxed{\begin{aligned} A_{t_0}\{x(t)\} &= x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_0) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nt_0)\, \delta(t - nt_0) \end{aligned}}$$

Voraussetzung:

- die stochastischen Signale $x(t)$ & $y(t)$ enthalten keine periodischen Komponenten

7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

KKF der abgetasteten Vorgänge (Definition als Zeitmittelwert)

$t_0 \cdot A_{t_0}\{x(t)\}$ und $t_0 \cdot A_{t_0}\{y(t)\}$

$$\boxed{\varphi_{A(xy)}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T t_0 A_{t_0}\{x(t)\} t_0 A_{t_0}\{y(t+\tau)\} \mathrm{d}t}$$

7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

KKF der abgetasteten Vorgänge (Definition als Zeitmittelwert)

$t_0 \cdot A_{t_0}\{x(t)\}$ und $t_0 \cdot A_{t_0}\{y(t)\}$

$$\boxed{\varphi_{A(xy)}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T t_0 A_{t_0}\{x(t)\} t_0 A_{t_0}\{y(t+\tau)\} \mathrm{d}t}$$

mit $A_{t_0}\{y(t+\tau)\} = y(t+\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t+\tau-mt_0)$

7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

KKF der abgetasteten Vorgänge (Definition als Zeitmittelwert)

$t_0 \cdot A_{t_0}\{x(t)\}$ und $t_0 \cdot A_{t_0}\{y(t)\}$

$$\boxed{\varphi_{A(xy)}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_T t_0 A_{t_0}\{x(t)\} t_0 A_{t_0}\{y(t+\tau)\} \mathrm{d}t}$$

mit $A_{t_0}\{y(t+\tau)\} = y(t+\tau) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t+\tau-mt_0)$

$$\varphi_{A(xy)}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{t_0^2}{T} \int_T x(t)\, y(t+\tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-nt_0) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t+\tau-mt_0)\, \mathrm{d}t$$

7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

Bekannt: $u(t)\,\delta(t-nt_0) = u(nt_0)\,\delta(t-nt_0)$

$$\delta(t+\tau-mt_0)\,\delta(t-nt_0) = \delta(nt_0+\tau-mt_0)\,\delta(t-nt_0)$$

$$= \delta\left(\tau - \underbrace{[m-n]}\,t_0\right)\delta(t-nt_0)$$

Substitution: $k = m - n$

7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

Bekannt: $$u(t)\,\delta(t-nt_0) = u(nt_0)\,\delta(t-nt_0)$$

$$\begin{aligned}\delta(t+\tau-mt_0)\,\delta(t-nt_0) &= \delta(nt_0+\tau-mt_0)\,\delta(t-nt_0)\\ &= \delta\left(\tau - \underbrace{[m-n]}\,t_0\right)\delta(t-nt_0)\end{aligned}$$

Substitution: $$k = m-n$$

$$\begin{aligned}\varphi_{A(xy)}(\tau) &= \lim_{T\to\infty}\frac{t_0^2}{T}\int_T\left[x(t)\,y(t+\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_0)\,\delta(\tau-kt_0)\right]\mathrm{d}t\\ &= t_0\cdot\underbrace{\lim_{T\to\infty}\frac{t_0}{T}\int_T\left[\underbrace{x(t)\,y(t+\tau)}_{z(t)}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_0)\right]\mathrm{d}t}_{\bigstar}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\tau-kt_0)\end{aligned}$$

7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

Allgemein: $z(t)$ enthalte keine periodischen Komponenten

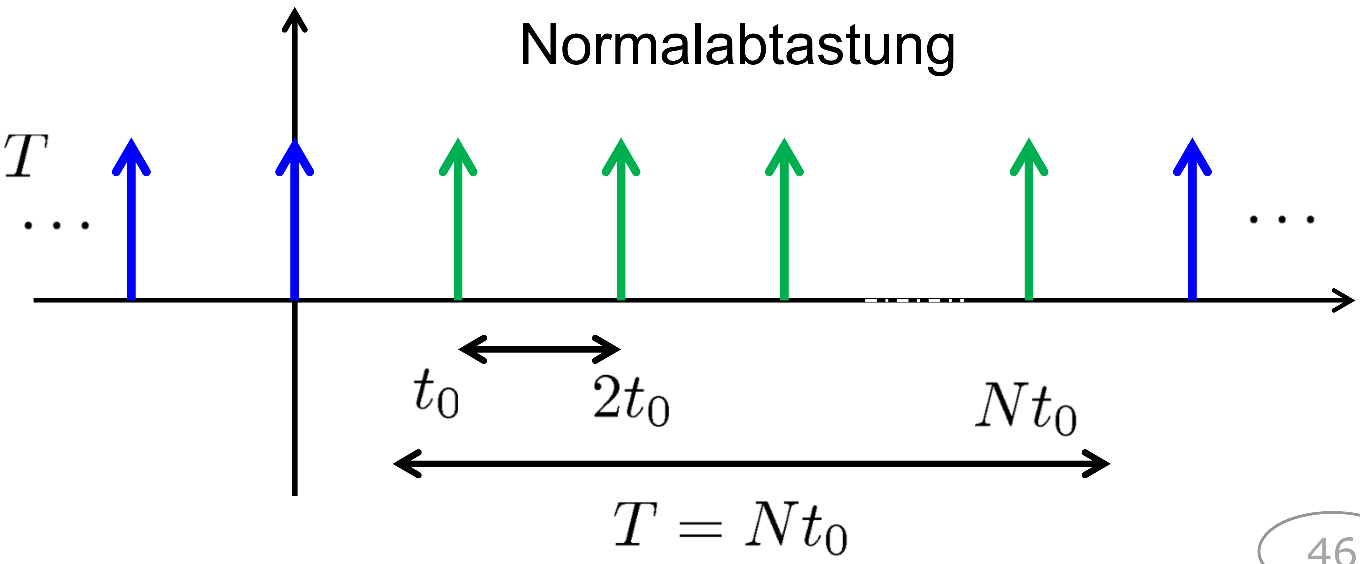
$$\lim_{T\to\infty}\frac{t_0}{T}\int_T z(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nt_0)\,\mathrm{d}t$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{t_0}{T}\int_T \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(nt_0)\,\delta(t-nt_0)\,\mathrm{d}t = \quad \cdots$$

Setze: $T = Nt_0$

Integrationsintervall der Länge T

(N Stöße), z. B.



7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

$$\cdots \quad = \lim_{N\to\infty} \frac{t_0}{N t_0} \int_{\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}+N t_0} \sum_{n=1}^{N} z\left(n t_0\right) \delta\left(t - n t_0\right) \mathrm{d}t$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z\left(n t_0\right) \underbrace{\int_{\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}+N t_0} \delta\left(t - n t_0\right) \mathrm{d}t}_{1}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \tfrac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} z\left(n t_0\right) = \overline{z(t)} = \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{T} \int_T z\left(t\right) \mathrm{d}t$$

Falls $z(t)$ keine periodischen Komponenten enthält, muß das Abtasttheorem nicht erfüllt sein.

7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

$$\cdots = \lim_{T\to\infty} \frac{t_0}{T} \int_T \underbrace{x(t)\,y(t+\tau)}_{z(t)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nt_0)\,\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \underbrace{x(nt_0)\,y(nt_0+\tau)}_{z(nt_0)}$$

$$= \varphi_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)} = \lim_{T\to\infty} \tfrac{1}{T} \int_T x(t)\,y(t+\tau)\,\mathrm{d}t$$

$$\varphi_{A(xy)}(\tau) = t_0 \underbrace{\varphi_{xy}(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - kt_0)}$$

$$= \quad t_0 \quad \cdot \quad A_{t_0}\{\varphi_{xy}(\tau)\}$$

7.6 Abgetastete stochastische Vorgänge

KKF:

$$\boxed{\varphi_{A(xy)}(\tau) = t_0 \cdot A_{t_0}\{\varphi_{xy}(\tau)\} = t_0\ \varphi_{xy}(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau - kt_0\right)}$$

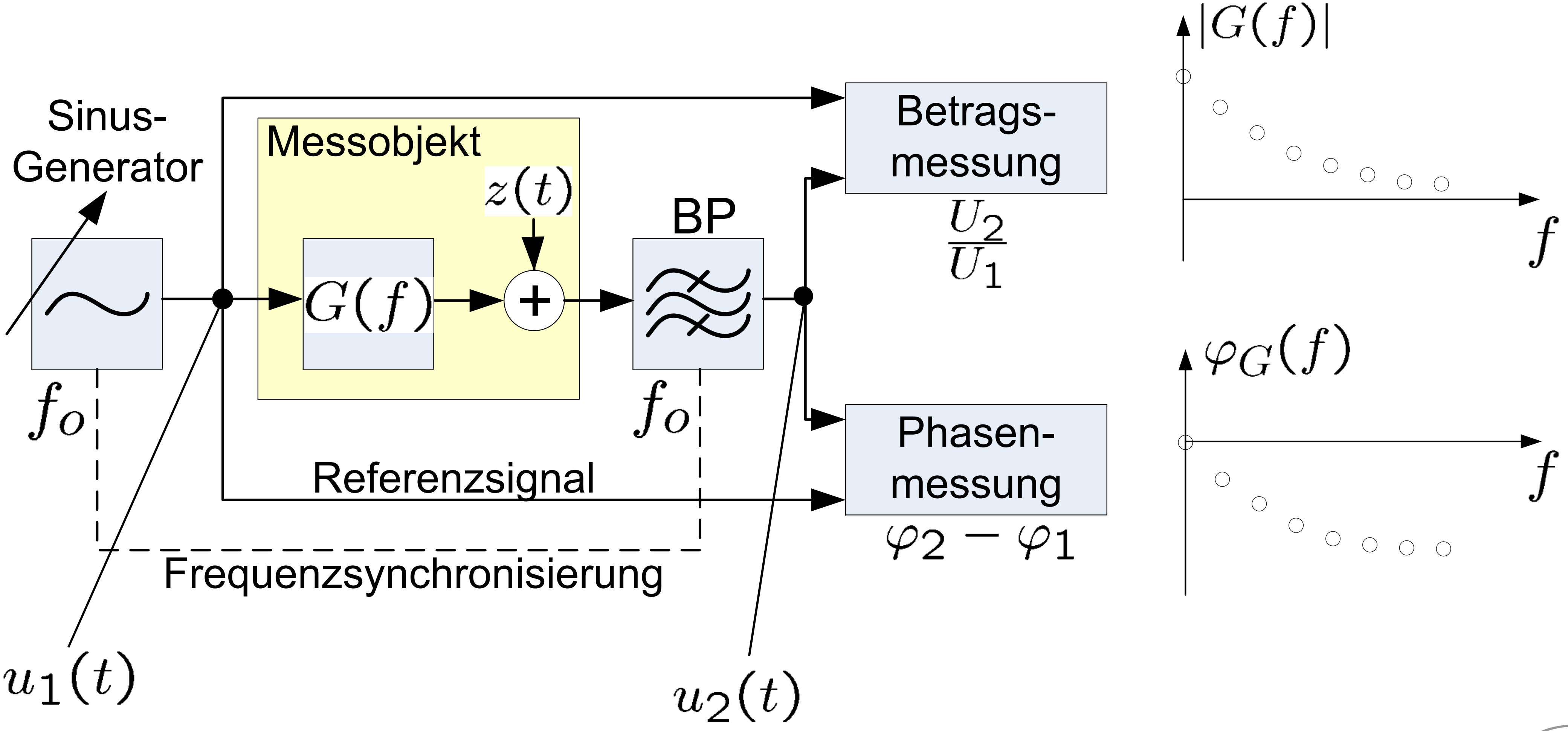
AKF:

$$\boxed{\varphi_{A(xx)}(\tau) = t_0 \cdot A_{t_0}\{\varphi_{xx}(\tau)\} = t_0\ \varphi_{xx}(\tau) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\tau - kt_0\right)}$$

- $\Rightarrow$ Die Korrelationsfunktionen der abgetasteten kontinuierlichen Zeitfunktionen sind gleich den Abgetasteten der Originalfunktionen
- $\Rightarrow$ Abtastung von Zeitfunktionen korrespondiert zur Abtastung der zugehörigen Korrelationsfunktionen

8. Stochastische Signale und LTI Systeme

Sinusmeßtechnik (1)



Sinusmeßtechnik (2)

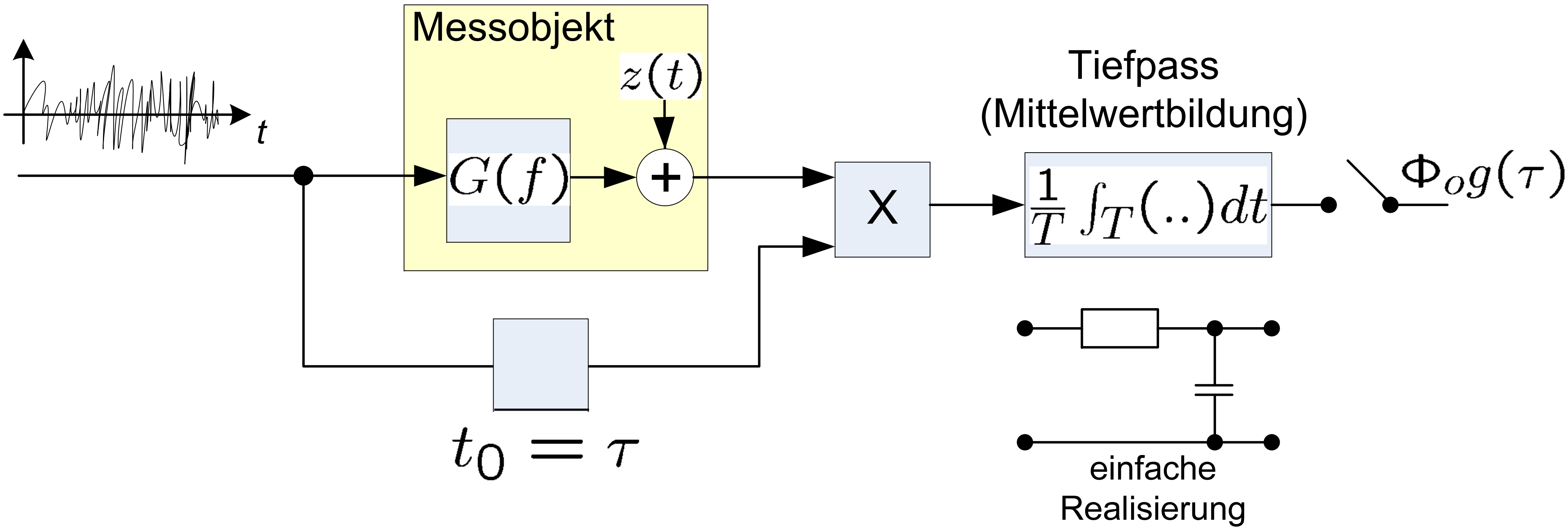
- Meßsignal ist ein deterministisches Schmalbandsignal

$$u_1(t) = U_1 \cdot \sin(2\pi f_o t + \varphi_1)$$
$$u_2(t) = U_2 \cdot \sin(2\pi f_o t + \varphi_2)$$

- Meßgröße in Abhängigkeit von f_0
- Bestimmung von $G(f)$
- $G(f_0)$ wird punktweise bestimmt
- prinzipiell ist eine totale Störunterdrückung möglich

  (Restfehler, da die Bandbreite des Bandpasses > 0)

Korrelationsmeßtechnik (1)



Korrelationsmeßtechnik (2)

- Meßsignal ist ein breitbandiges Zufallssignal

$x(t) \sim$ weißes Rauschen

- Autokorrelationsfunktion (AKF)

$$\varphi_{xx}(\tau) = \Phi_o\,\delta(\tau)$$

$$\Phi_{xx}(f) = \Phi_o = const.$$

- Meßgröße in Abhängigkeit von $t_0 = \tau$
- Bestimmung von *g(t)*
- $g(t_0) = g(\tau)$ wird punktweise bestimmt
- prinzipiell ist eine totale Störunterdrückung möglich

(Restfehler, da Integrationszeit < ∞ : endliche Meßzeit)

alternative Breitbandmessung

- Ermittlung von *g(t)* im Zeitbereich mit einmaligem (bzw. in der technischen Ausführung periodisch wiederholtem) Stoß als deterministischem Meßsignal

  - **Vorteil:** geringe Meßzeit

    g(t) kann direkt auf einem Oszilloskop dargestellt werden

  - **Nachteil:** fehlende Störunterdrückung, da keine Mittelwertbildung

Korrelationsmeßtechnik mit farbigem Meßsignal

$$\Phi_{xx}(f) \neq \Phi_o = const.$$

$$\Phi_{xy}(f) = G(f) \cdot \Phi_{xx}(f)$$

$$G(f_o) = \frac{\Phi_{xy}(f_o)}{\Phi_{xx}(f_o)}\text{, falls } \Phi_{xx}(f_o) \neq 0$$

➔ Entzerrung erforderlich

9. Komplexe Signale und Systeme

9.1 Komplexe stochastische Prozesse

z.B. wichtig bei komplexer Basisbandbeschreibung modulierter Signale

Definition

$$\boxed{Z(t) = X(t) + jY(t)}$$

ist ein komplexwertiger (kurz: komplexer) stochastischer Prozess, wenn sowohl *X(t)* als auch *Y(t)* reellwertige Zufallsprozesse sind.

9.1 Komplexe stochastische Prozesse

z.B. wichtig bei komplexer Basisbandbeschreibung modulierter Signale

Definition

$$\boxed{Z(t) = X(t) + jY(t)}$$

ist ein komplexwertiger (kurz: komplexer) stochastischer Prozess, wenn sowohl *X(t)* als auch *Y(t)* reellwertige Zufallsprozesse sind.

Die gemeinsamen Dichten der Zufallsvariablen

$$Z(t_n);\ n = 1, 2, \ldots, N,$$

sind durch die gemeinsamen Dichten der Komponentenprozesse von $\begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}$

bestimmt.

$$f_{XY}(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_N}; y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots, y_{t_N})$$

Autokorrelationsfunktion (1)

$$\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) = E\{Z^*(t_1)Z(t_2)\}$$

Autokorrelationsfunktion (1)

$$\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) = E\{Z^*(t_1)Z(t_2)\}$$
$$= E\{[X(t_1) - jY(t_1)][X(t_2) + jY(t_2)]\}$$

Autokorrelationsfunktion (1)

$$\begin{aligned}\varphi_{ZZ}(t_1,t_2) &= E\{Z^*(t_1)Z(t_2)\}\\ &= E\{[X(t_1)-jY(t_1)][X(t_2)+jY(t_2)]\}\\ &= \varphi_{XX}(t_1,t_2)+\varphi_{YY}(t_1,t_2)\dots\\ &\qquad \dots + j\,[\varphi_{XY}(t_1,t_2)-\varphi_{YX}(t_1,t_2)]\end{aligned}$$

Autokorrelationsfunktion (2)

Falls $X(t)$ und $Y(t)$ gemeinsam schwach stationär sind ➔ $Z(t)$ ist schwach stationär

Autokorrelationsfunktion (2)

Falls *X(t)* und *Y(t)* gemeinsam schwach stationär sind ➔ *Z(t)* ist schwach stationär

$$\boxed{\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) = \varphi_{ZZ}(t_2 - t_1) = \varphi_{ZZ}(\tau) = E\{Z^*(t)Z(t+\tau)\}}$$

$$\tau = t_2 - t_1$$

Autokorrelationsfunktion (2)

Falls *X(t)* und *Y(t)* gemeinsam schwach stationär sind ➔ *Z(t)* ist schwach stationär

$$\boxed{\varphi_{ZZ}(t_1,t_2) = \varphi_{ZZ}(t_2 - t_1) = \varphi_{ZZ}(\tau) = E\{Z^*(t)Z(t+\tau)\}}$$

$$\tau = t_2 - t_1$$

$$\varphi^*_{ZZ}(\tau) \;=\; E\{Z(t)Z^*(t+\tau)\}$$

Autokorrelationsfunktion (2)

Falls *X(t)* und *Y(t)* gemeinsam schwach stationär sind ➔ *Z(t)* ist schwach stationär

$$\boxed{\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) = \varphi_{ZZ}(t_2 - t_1) = \varphi_{ZZ}(\tau) = E\{Z^*(t)Z(t+\tau)\}}$$

$$\tau = t_2 - t_1$$

$$\begin{aligned} \varphi^*_{ZZ}(\tau) &= E\{Z(t)Z^*(t+\tau)\} \\ &= E\{Z(t'-\tau)Z^*(t')\} \qquad \text{mit} \quad t' = t + \tau \end{aligned}$$

Autokorrelationsfunktion (2)

Falls *X(t)* und *Y(t)* gemeinsam schwach stationär sind ➔ *Z(t)* ist schwach stationär

$$\boxed{\varphi_{ZZ}(t_1, t_2) = \varphi_{ZZ}(t_2 - t_1) = \varphi_{ZZ}(\tau) = E\{Z^*(t)Z(t+\tau)\}}$$

$$\tau = t_2 - t_1$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ZZ}^*(\tau) &= E\{Z(t)Z^*(t+\tau)\} \\ &= E\{Z(t'-\tau)Z^*(t')\} \qquad \text{mit } t' = t+\tau \\ &= E\{Z^*(t')Z(t'-\tau)\} \\ &= \varphi_{ZZ}(-\tau) \end{aligned}$$

Autokorrelationsfunktion (3)

Falls *X(t)* und *Y(t)* gemeinsam schwach stationär sind ➔ *Z(t)* ist schwach stationär

$$\begin{aligned}\varphi_{ZZ}(\tau) = E\{Z^*(t)Z(t+\tau)\} \\ = \varphi_{XX}(\tau) + \varphi_{YY}(\tau)\ldots \\ \ldots + j\left[\varphi_{XY}(\tau) - \varphi_{YX}(\tau)\right]\end{aligned}$$

Autokorrelationsfunktion (4)

Sonderfall: $X(t)$ und $Y(t)$ sind mittelwertfrei, unkorreliert und gemeinsam stationär

Autokorrelationsfunktion (4)

Sonderfall: *X(t)* und *Y(t)* sind mittelwertfrei, unkorreliert und gemeinsam stationär

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi_{ZZ}(\tau) &= \varphi_{XX}(\tau) + \varphi_{YY}(\tau) \\ \Phi_{ZZ}(f) &= \Phi_{XX}(f) + \Phi_{YY}(f)\end{aligned}}$$

beide: gerade & reell

Kreuzkorrelationsfunktion (1)

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$
$$W(t) = U(t) + jV(t)$$

Kreuzkorrelationsfunktion (1)

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$
$$W(t) = U(t) + jV(t)$$

$$\varphi_{ZW}(t_1, t_2) = E\{Z^*(t_1)W(t_2)\}$$

Kreuzkorrelationsfunktion (1)

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$
$$W(t) = U(t) + jV(t)$$

$$\begin{aligned}\varphi_{ZW}(t_1, t_2) &= E\{Z^*(t_1)W(t_2)\} \\ &= E\{[X(t_1) - jY(t_1)][U(t_2) + jV(t_2)]\}\end{aligned}$$

Kreuzkorrelationsfunktion (1)

$$Z(t) = X(t) + jY(t)$$
$$W(t) = U(t) + jV(t)$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{ZW}(t_1, t_2) &= E\{Z^*(t_1)W(t_2)\} \\
&= E\{[X(t_1) - jY(t_1)][U(t_2) + jV(t_2)]\} \\
&= \varphi_{XU}(t_1, t_2) + \varphi_{YV}(t_1, t_2) \ldots \\
&\qquad \ldots + j[\varphi_{XV}(t_1, t_2) - \varphi_{YU}(t_1, t_2)]
\end{aligned}$$

Kreuzkorrelationsfunktion (2)

Falls $Z(t)$ und $W(t)$ gemeinsam stationär sind ➔

Kreuzkorrelationsfunktion (2)

Falls *Z(t)* und *W(t)* gemeinsam stationär sind ➔

$$\boxed{\varphi_{ZW}(t_1, t_2) = \varphi_{ZW}(\tau) = E\{Z^*(t)W(t+\tau)\}}$$

$$\tau = t_2 - t_1$$

Kreuzkorrelationsfunktion (2)

Falls *Z(t)* und *W(t)* gemeinsam stationär sind ➔

$$\boxed{\varphi_{ZW}(t_1, t_2) = \varphi_{ZW}(\tau) = E\{Z^*(t)W(t+\tau)\}}$$

$$\tau = t_2 - t_1$$

$$\varphi^*_{ZW}(\tau) \; = \; E\{Z(t)W^*(t+\tau)\}$$

Kreuzkorrelationsfunktion (2)

Falls *Z(t)* und *W(t)* gemeinsam stationär sind ➔

$$\boxed{\varphi_{ZW}(t_1, t_2) = \varphi_{ZW}(\tau) = E\{Z^*(t)W(t+\tau)\}}$$

$$\tau = t_2 - t_1$$

$$\begin{aligned}\varphi^*_{ZW}(\tau) &= E\{Z(t)W^*(t+\tau)\}\\ &= E\{Z(t'-\tau)W^*(t')\} \quad \text{mit} \quad t' = t+\tau\end{aligned}$$

Kreuzkorrelationsfunktion (2)

Falls *Z(t)* und *W(t)* gemeinsam stationär sind ➔

$$\boxed{\varphi_{ZW}(t_1, t_2) = \varphi_{ZW}(\tau) = E\{Z^*(t)W(t+\tau)\}}$$

$$\tau = t_2 - t_1$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{ZW}^*(\tau) &= E\{Z(t)W^*(t+\tau)\} \\
&= E\{Z(t'-\tau)W^*(t')\} \quad \text{mit} \quad t' = t + \tau \\
&= E\{W^*(t')Z(t'-\tau)\} \\
&= \varphi_{WZ}(-\tau)
\end{aligned}$$

Signalraumdiagramme für digitale PAM Signale

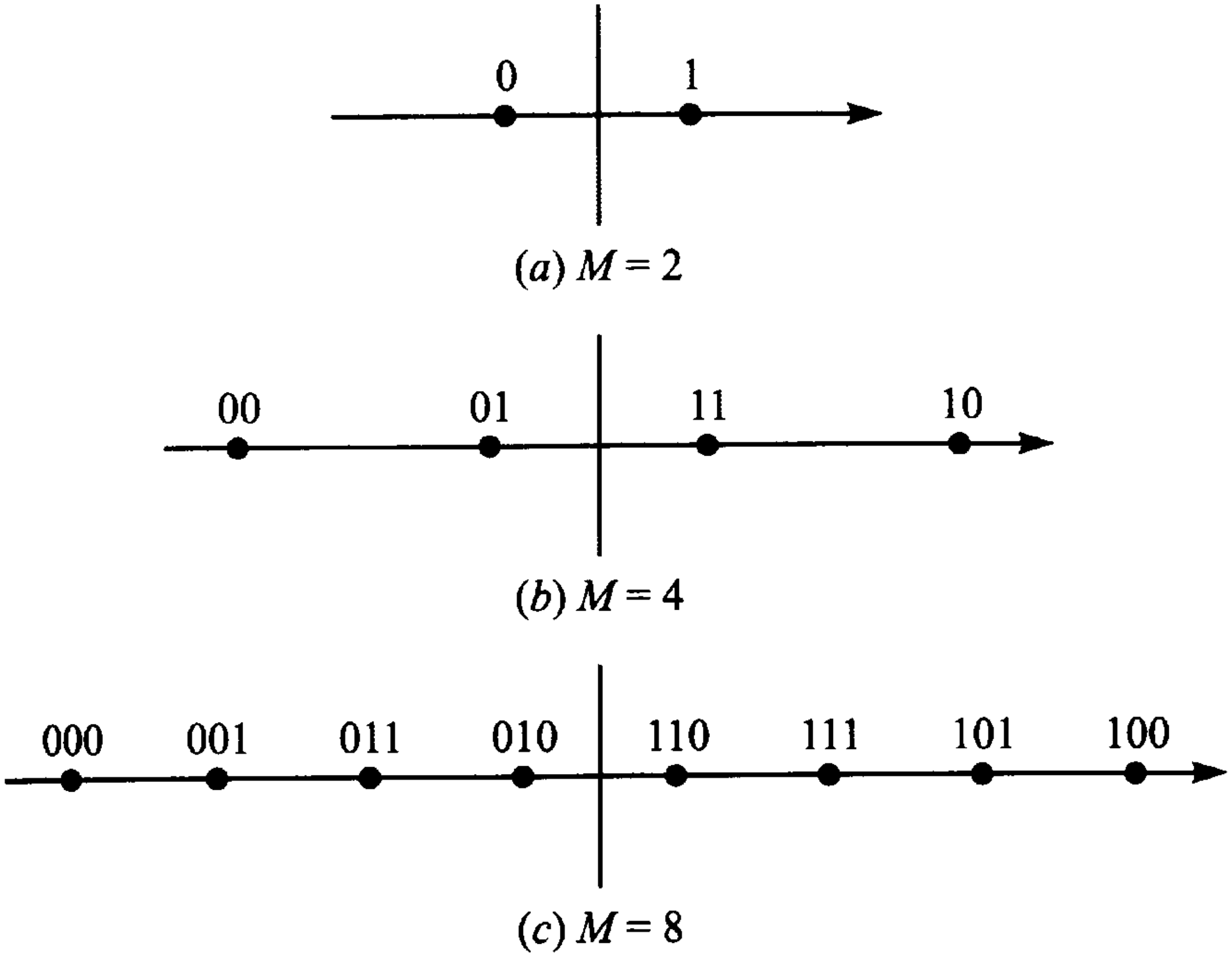
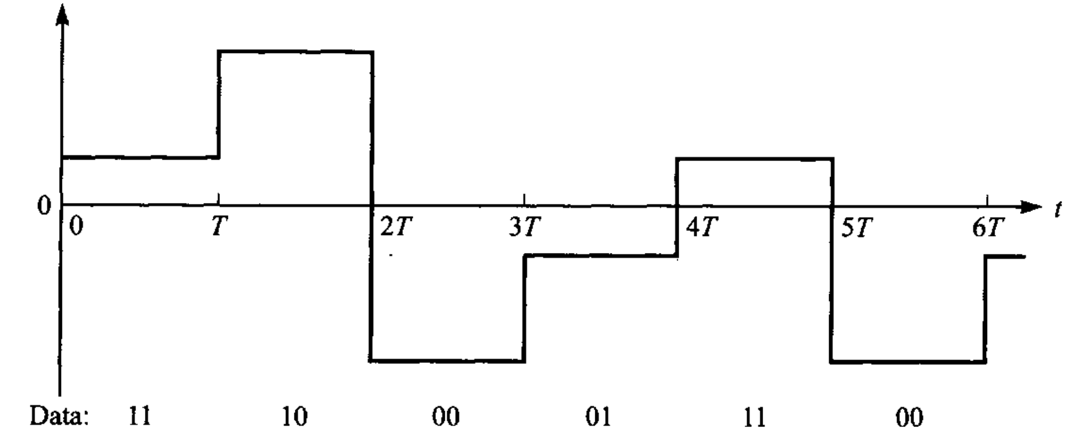


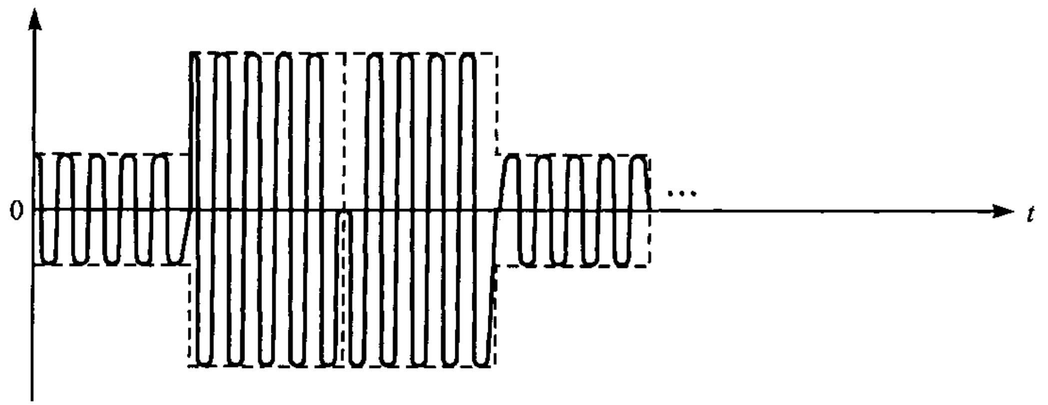
FIGURE 4.3–1
Signal space diagram for digital PAM signals.

Quelle: J. G. Proakis, Digital Communications, McGraw-Hill, 4th edition, 2000.

Basisband und Bandpass PAM Signale



(a) Baseband PAM signal



(b) Bandpass PAM signal

FIGURE 4.3–2
Baseband and band-pass PAM signals.

Quelle: J. G. Proakis, Digital Communications, McGraw-Hill, 4th edition, 2000.

Signalraumdiagramme für QAM

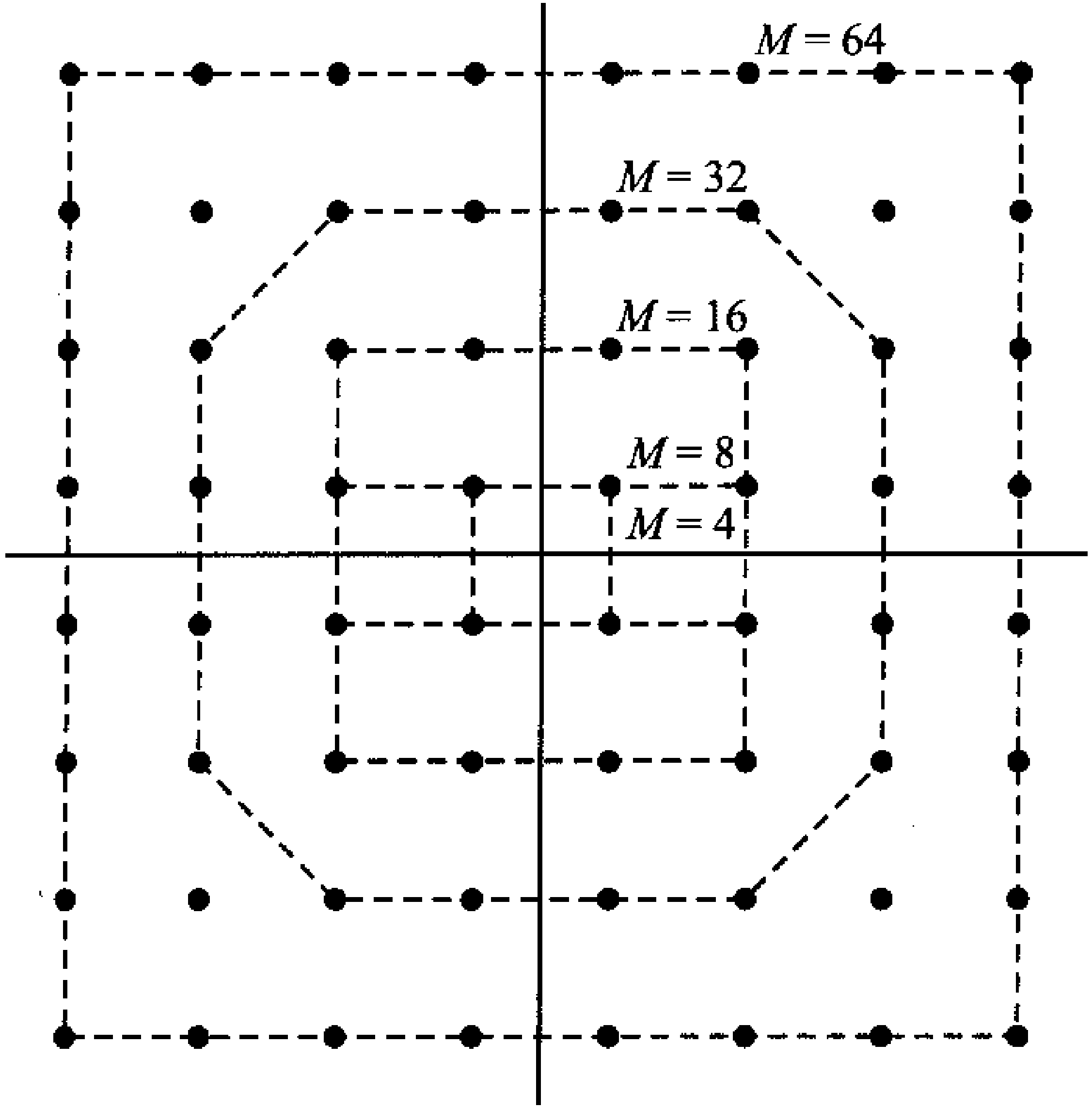
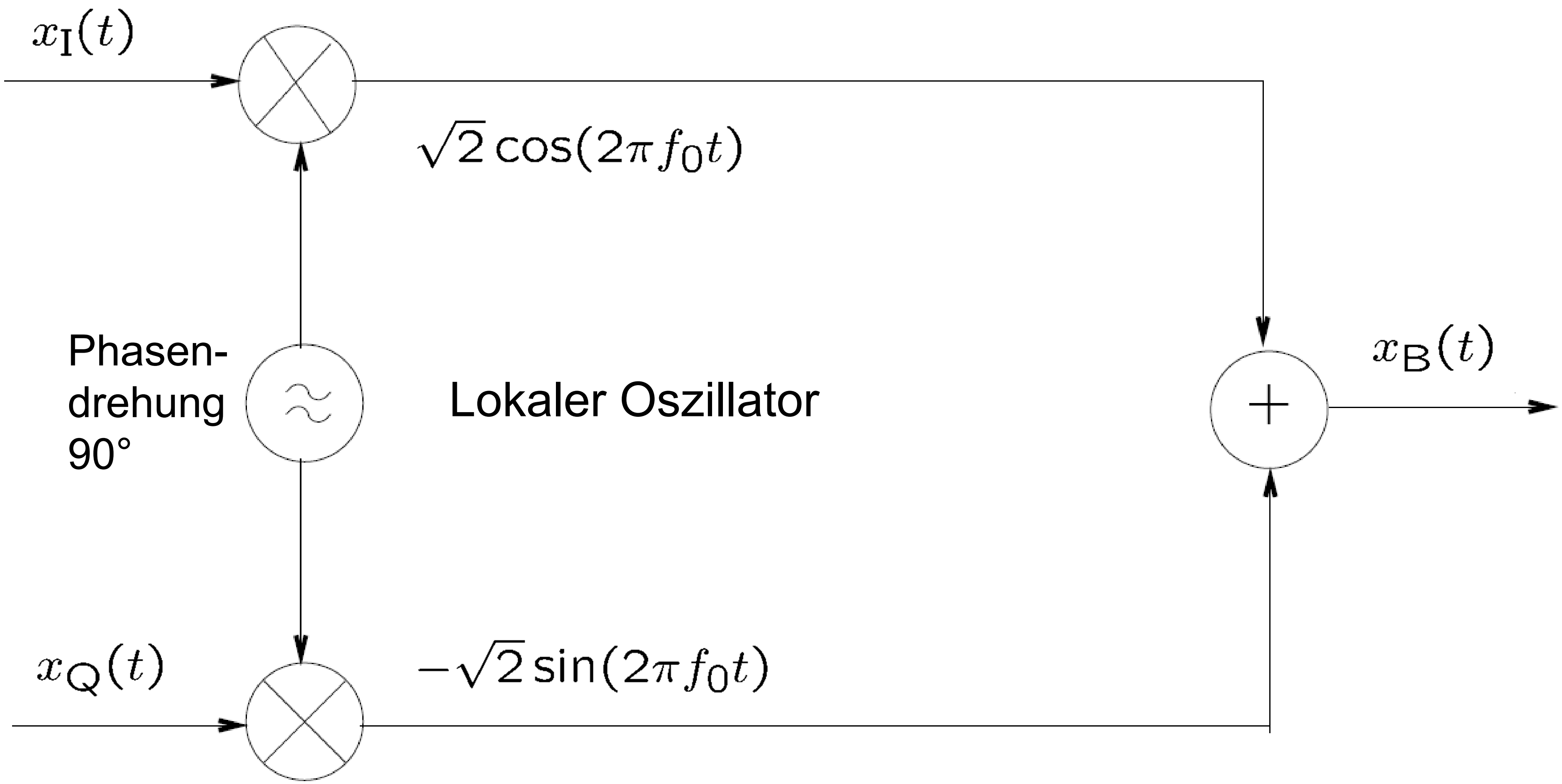


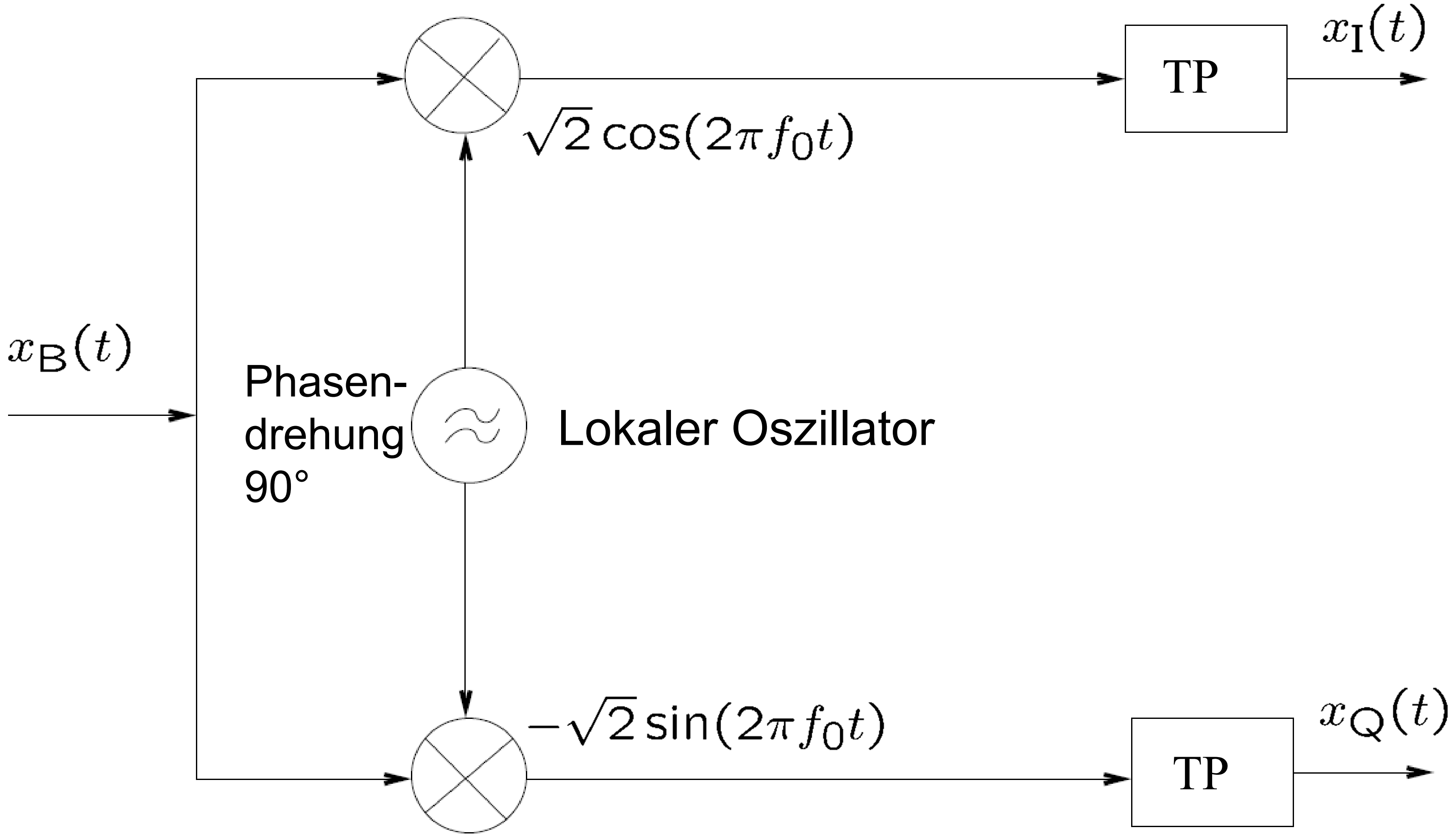
FIGURE 4.3–5
Several signal space diagrams for rectangular QAM.

Quelle: J. G. Proakis, Digital Communications, McGraw-Hill, 4th edition, 2000.

Quadraturmodulator



Quadraturdemodulator



9.5 Spektrale Leistungsdichte linear modulierter Signale

Rechteckimpuls
und dessen spektrale Energiedichte

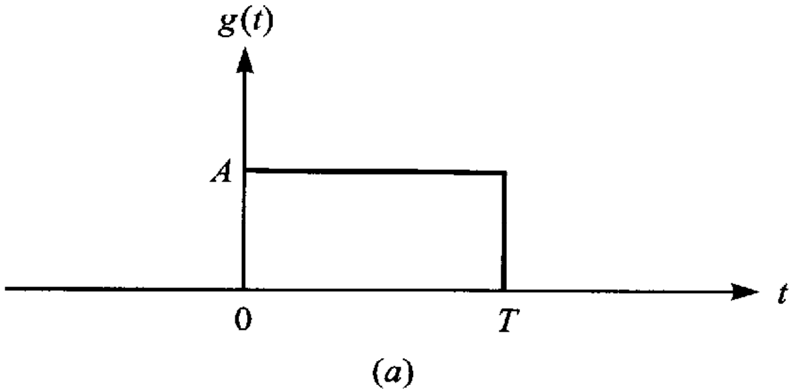


FIGURE 4.4–1
Rectangular pulse and its energy density spectrum $|G(f)|^2$.

Quelle: John G. Proakis , "Digital Communications" , 2001.

Rechteckimpuls
und dessen spektrale Energiedichte

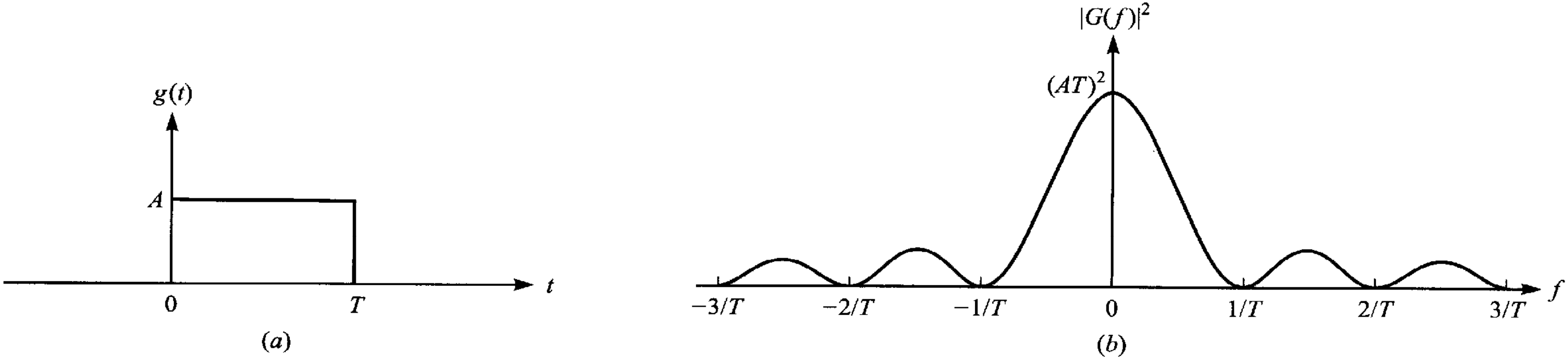


FIGURE 4.4–1
Rectangular pulse and its energy density spectrum $|G(f)|^2$.

Quelle: John G. Proakis , "Digital Communications" , 2001.

Kosinus-Roll-Off-Impuls (β = 1) im Zeitbereich und dessen spektrale Energiedichte

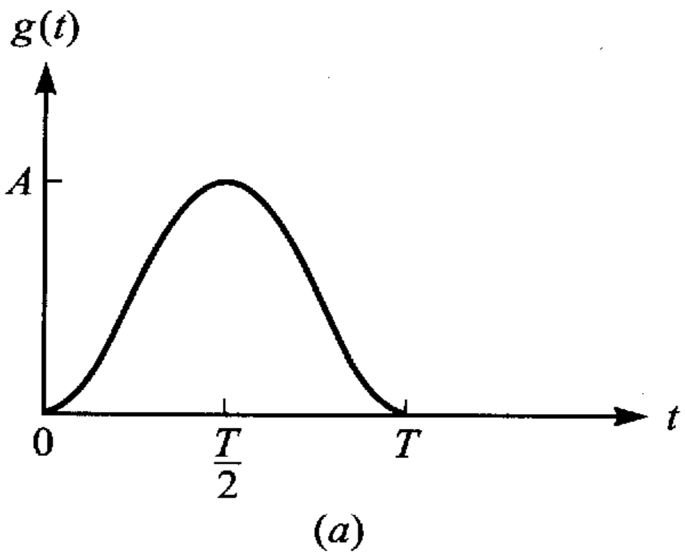


FIGURE 4.4–2
Raised cosine pulse and its energy density spectrum $|G(f)|^2$.

Quelle: John G. Proakis , "Digital Communications" , 2001.

Kosinus-Roll-Off-Impuls (β = 1) im Zeitbereich und dessen spektrale Energiedichte

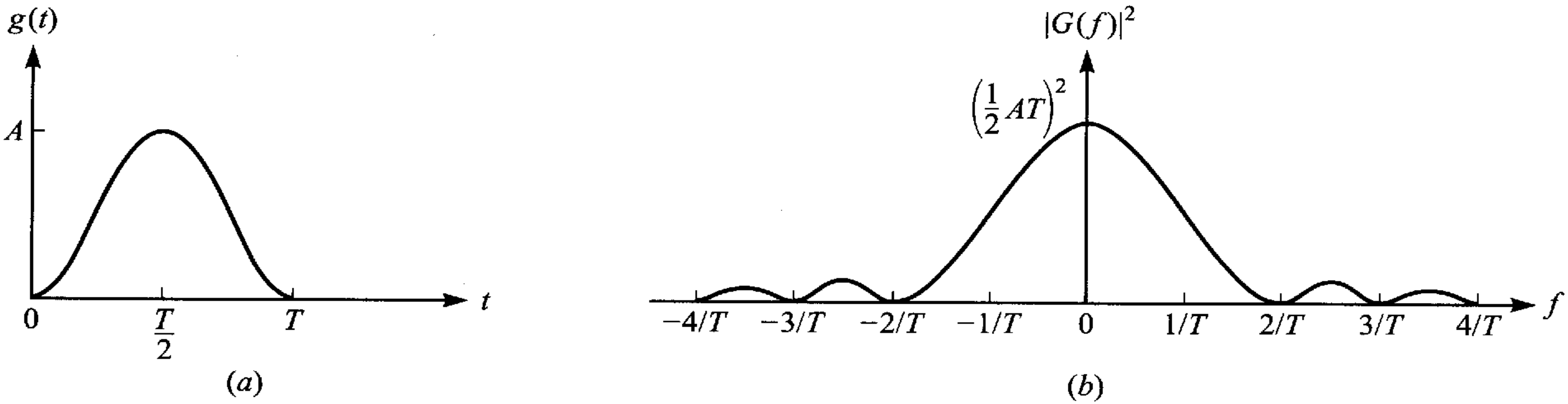


FIGURE 4.4–2
Raised cosine pulse and its energy density spectrum $|G(f)|^2$.

Quelle: John G. Proakis , "Digital Communications" , 2001.

10. Nachrichtenübertragung über Kanäle mit additiven Rauschstörungen

1. Nyquist-Bedingung:
ISI-Freiheit in benachbarten Abtastzeitpunkten (1)

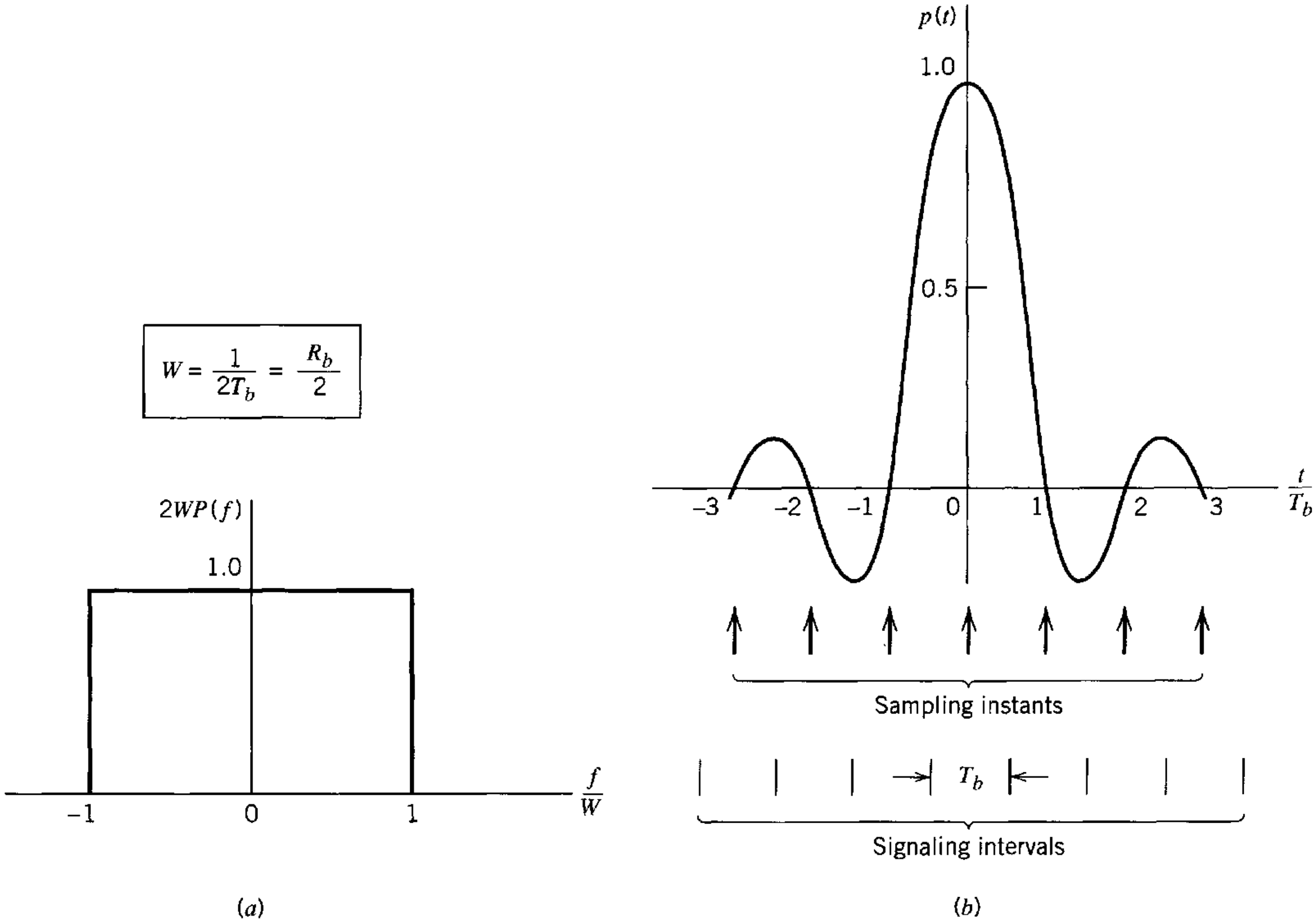
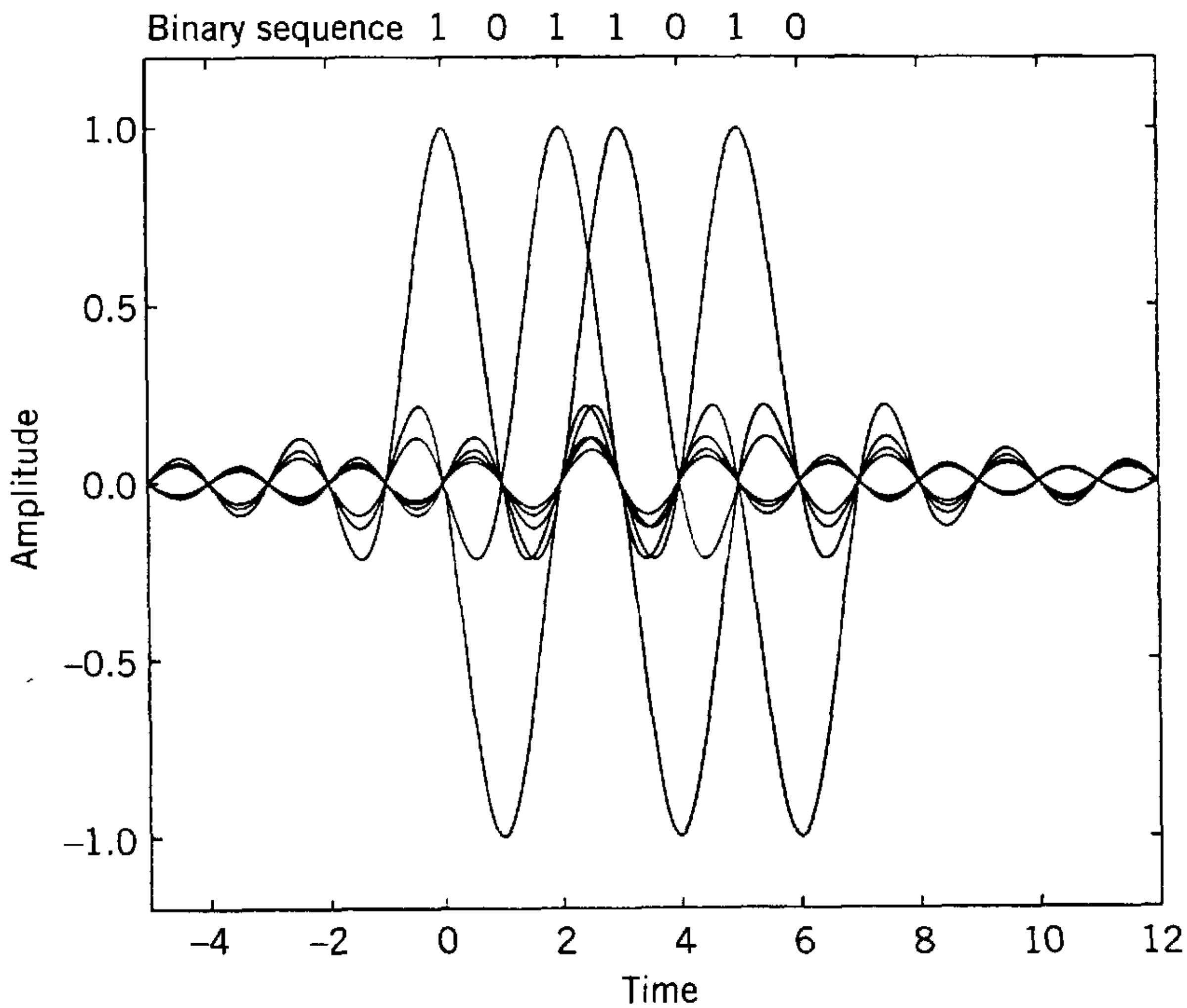


Figure 4.8 (*a*) Ideal magnitude response. (*b*) Ideal basic pulse shape.

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems, Wiley, 2000.

1. Nyquist-Bedingung:
ISI-Freiheit in benachbarten Abtastzeitpunkten (2)



Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," Wiley, 2000.

FIGURE 4.9 A series of sinc pulses corresponding to the sequence 1011010.

Signalraumdiagramme für QAM

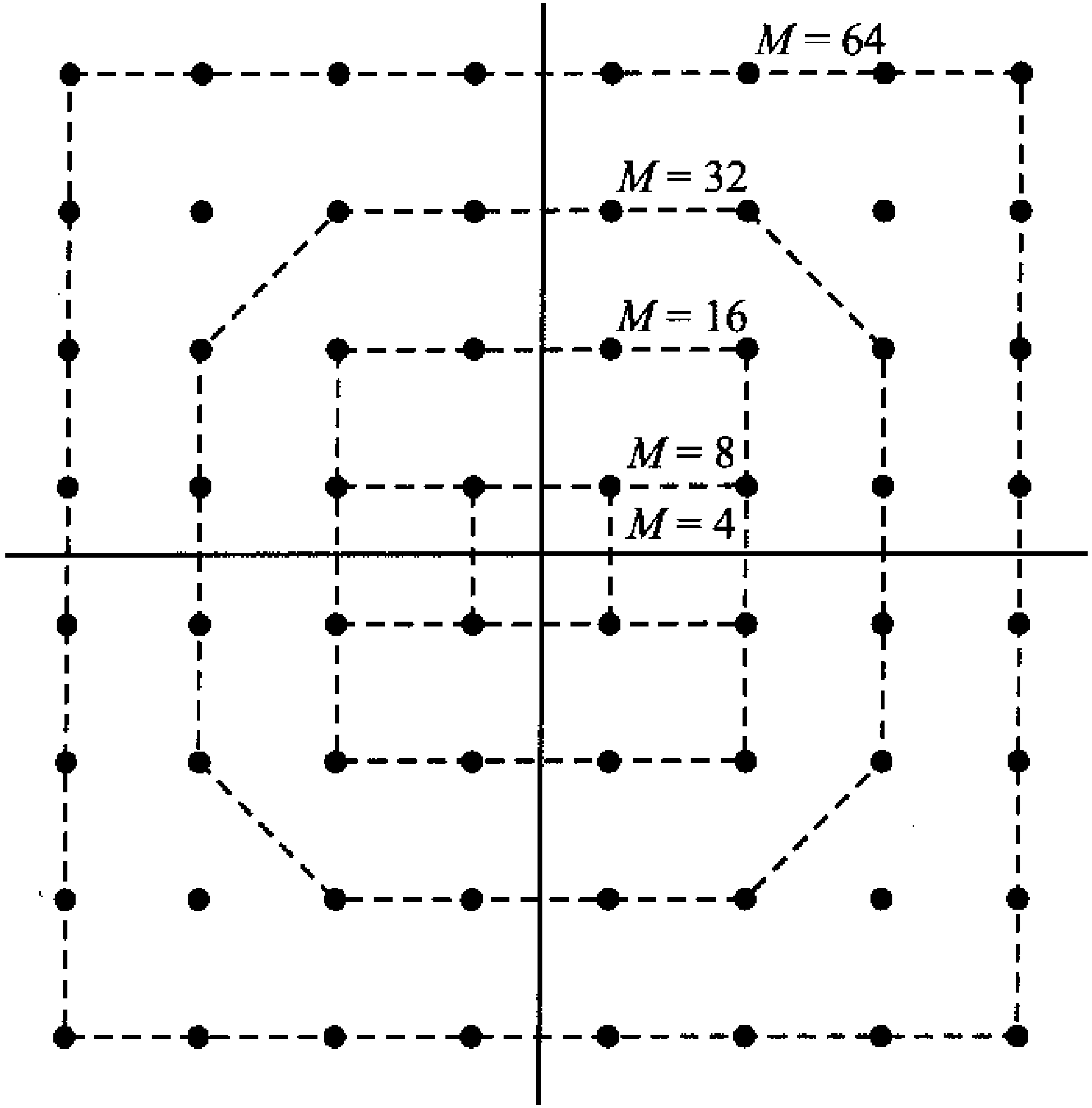
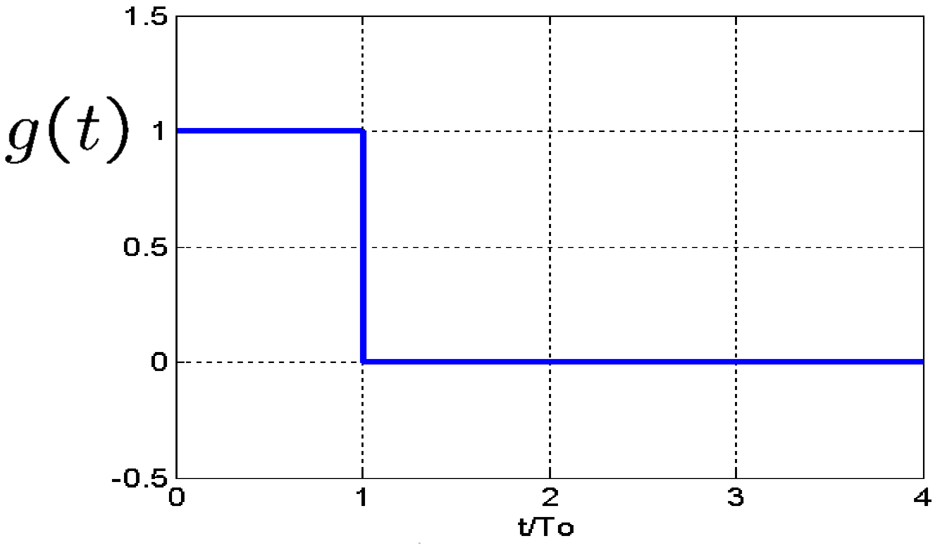
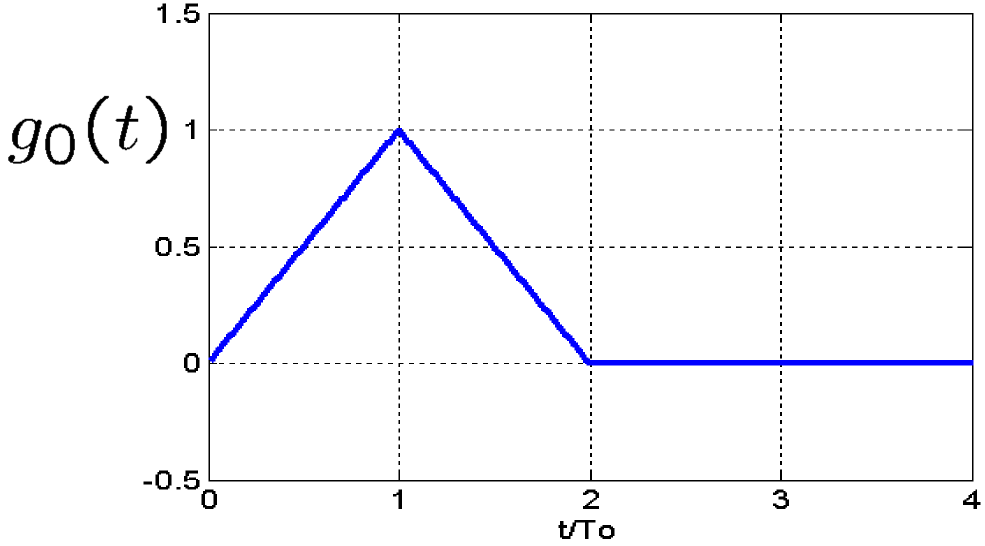


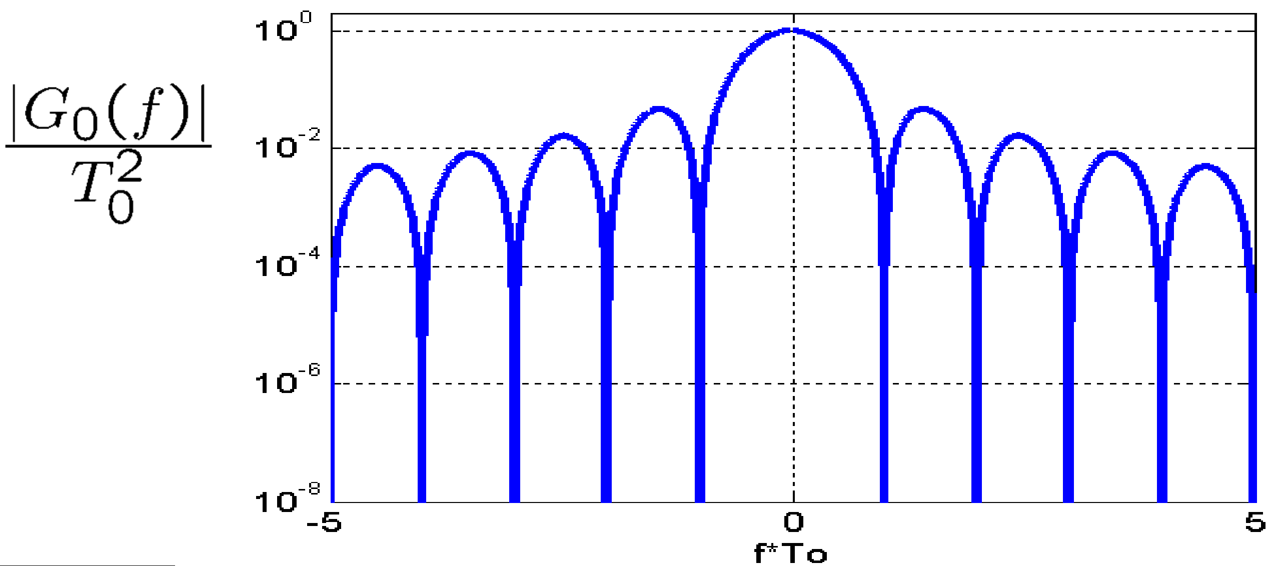
FIGURE 4.3–5
Several signal space diagrams for rectangular QAM.

Quelle: J. G. Proakis, Digital Communications, McGraw-Hill, 4th edition, 2000.

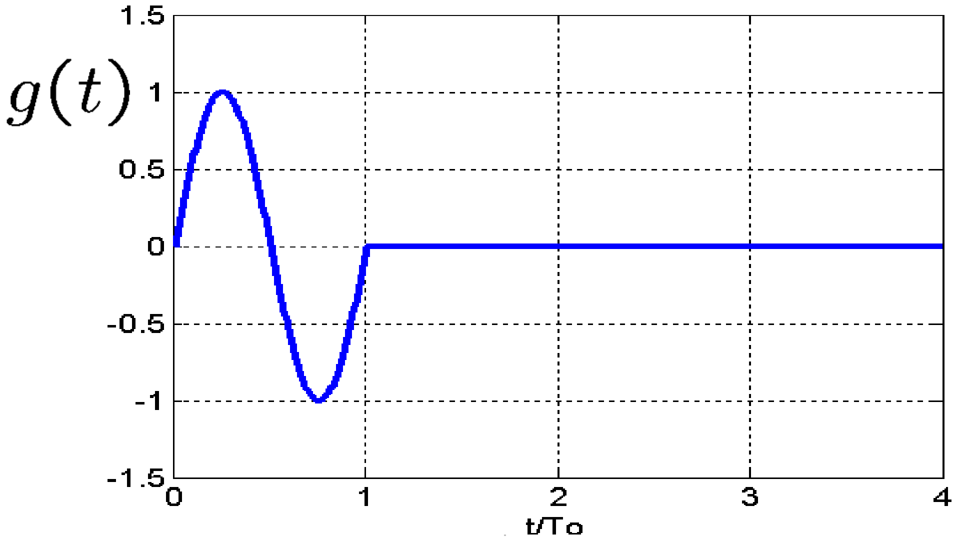
Rechteckimpuls *g(t)*

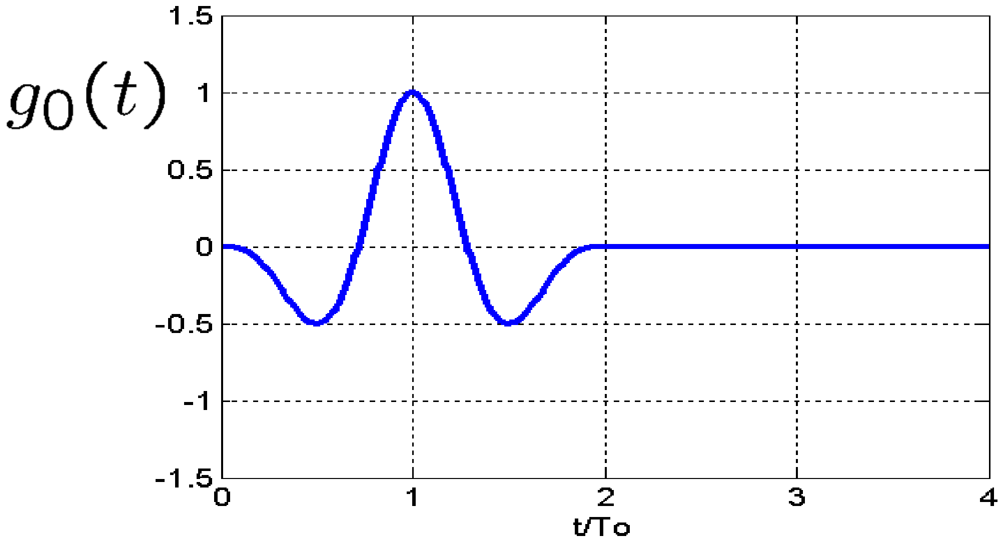


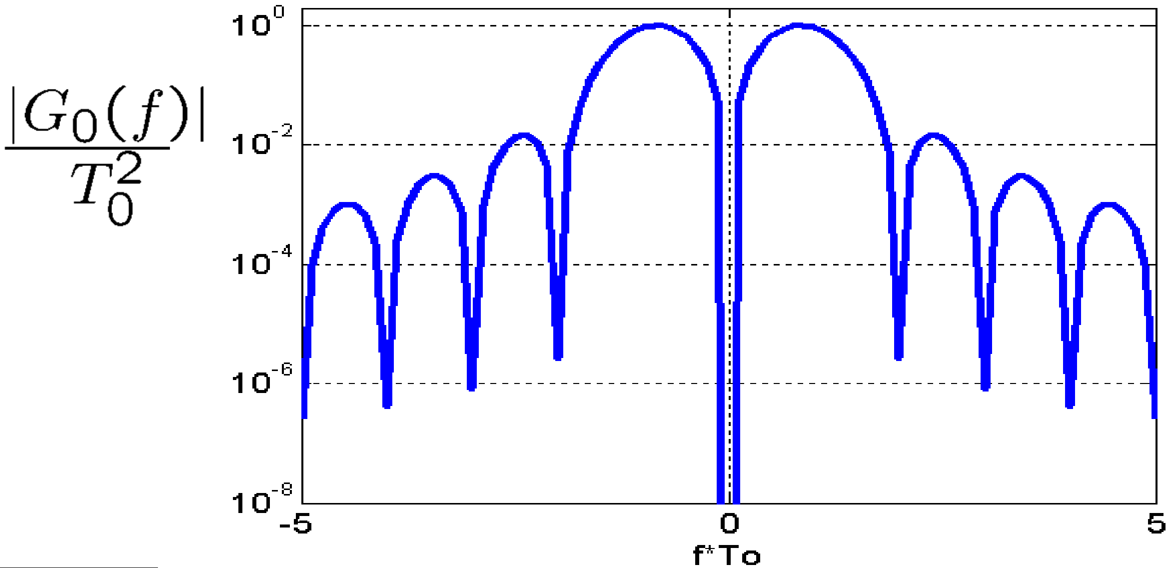




Zeitbegrenzter Sinusimpuls *g(t)*







Kosinus-Roll-Off-Filter

- Werden in der Praxis oft zur Impulsformung eingesetzt
  - Wurzel-Kosinus-roll-off Charakteristiken (root raised cosine) für Sende- und Empfangsfilter
- β...roll-off-Faktor
- $\beta \cdot 100\%$...excess bandwidth (zusätzliche Bandbreite gegenüber idealem Tiefpaß)

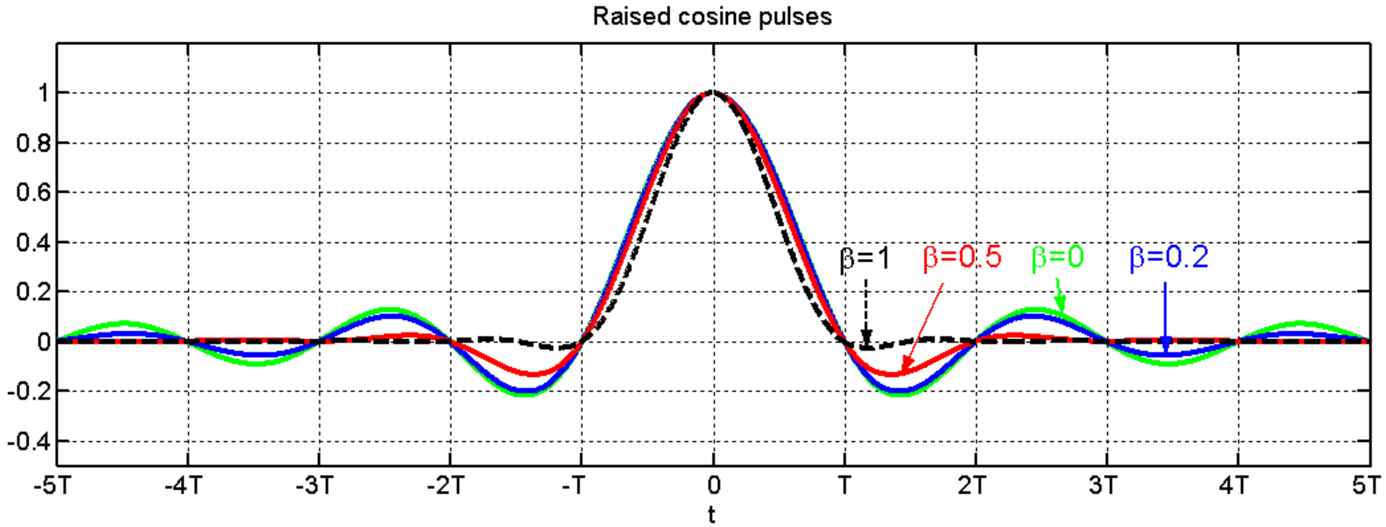
Nichtkausale Formulierung:

$$G_{o_{\mathrm{RC}}}(f) = \begin{cases} T & , 0 \leq |f| \leq \frac{1-\beta}{2T} \\ \frac{T}{2}\left\{1 + \cos\left[\frac{\pi T}{\beta}\left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right)\right]\right\}, & \frac{1-\beta}{2T} < |f| < \frac{1+\beta}{2T} \\ = T \cdot \cos^2\left[\frac{\pi T}{2\beta}\left(|f| - \frac{1-\beta}{2T}\right)\right] & \\ 0 & , |f| \geq \frac{1+\beta}{2T} \end{cases}$$

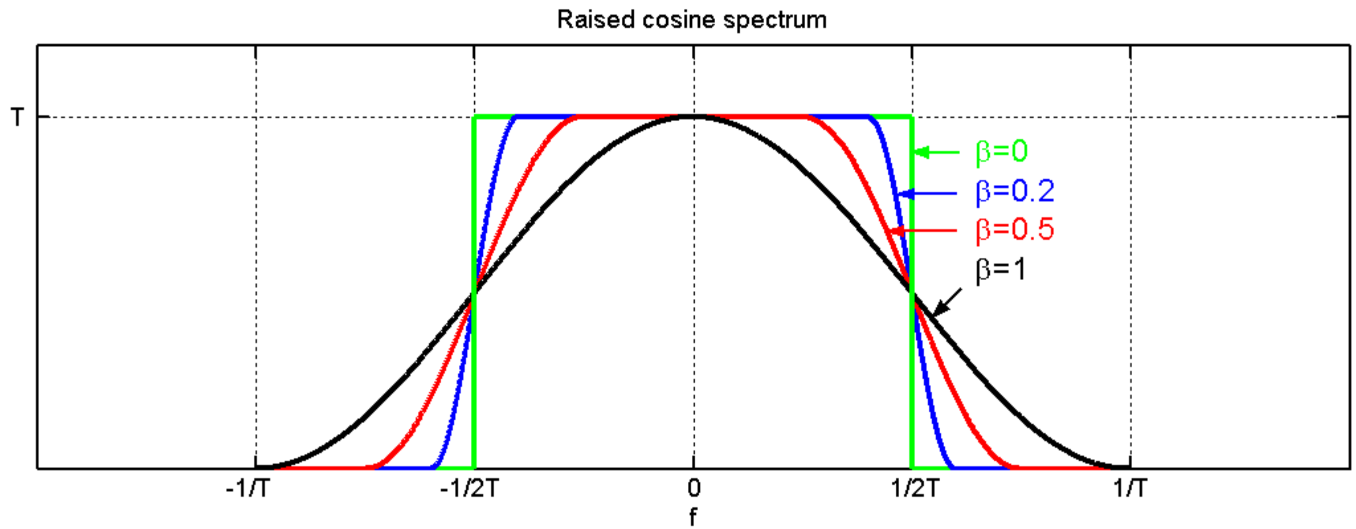
$$g_{o_{\mathrm{RC}}}(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\pi \beta t}{T}\right)}{1 - \frac{4\beta^2 t^2}{T^2}}$$

Kosinus-Roll-Off-Impuls

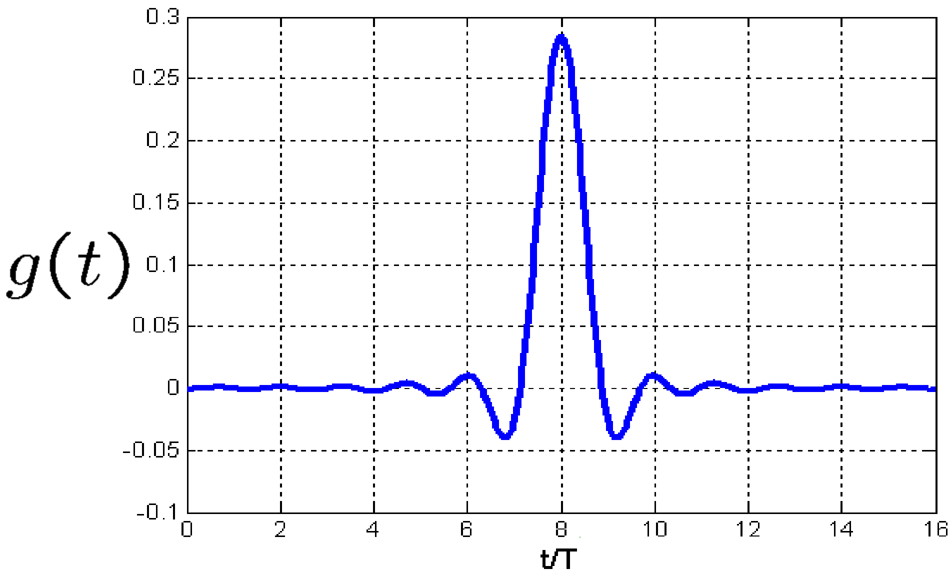
$g_{0_{RC}}(t)$

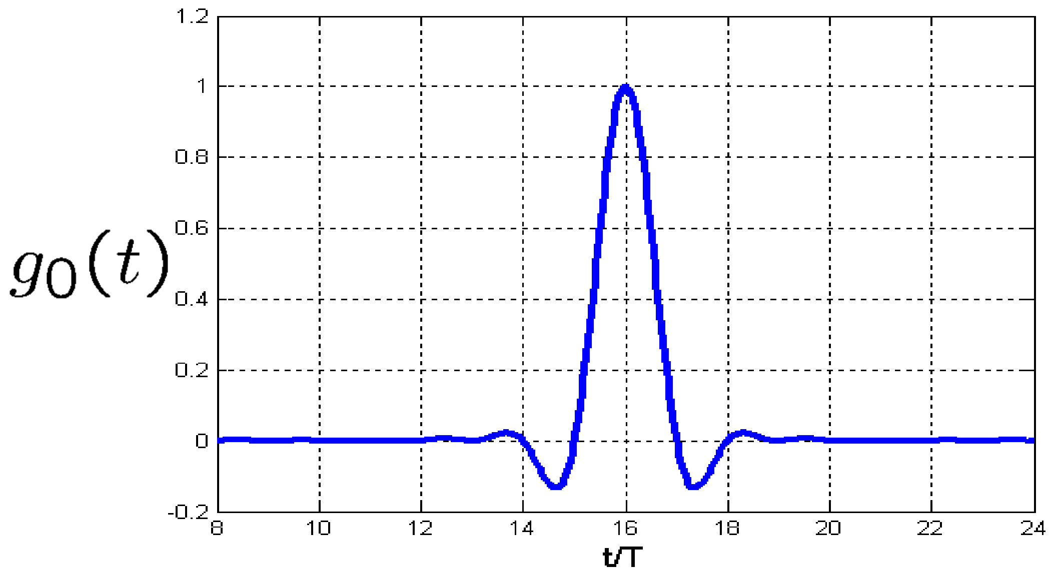


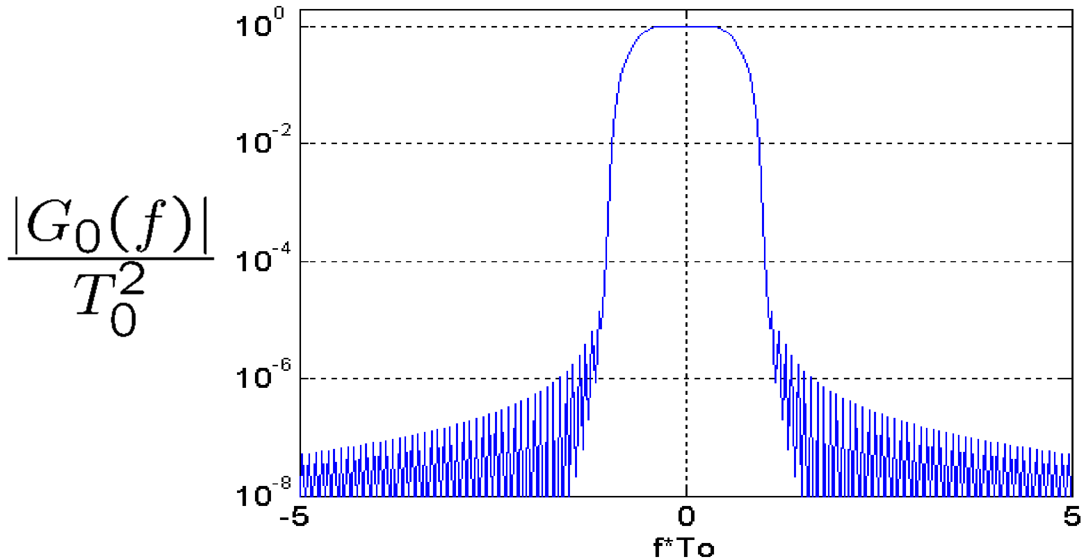
$G_{0_{RC}}(f)$



Zeitbegrenzter Wurzel-Kosinus-Roll-Off-Impuls (β = 0.5)

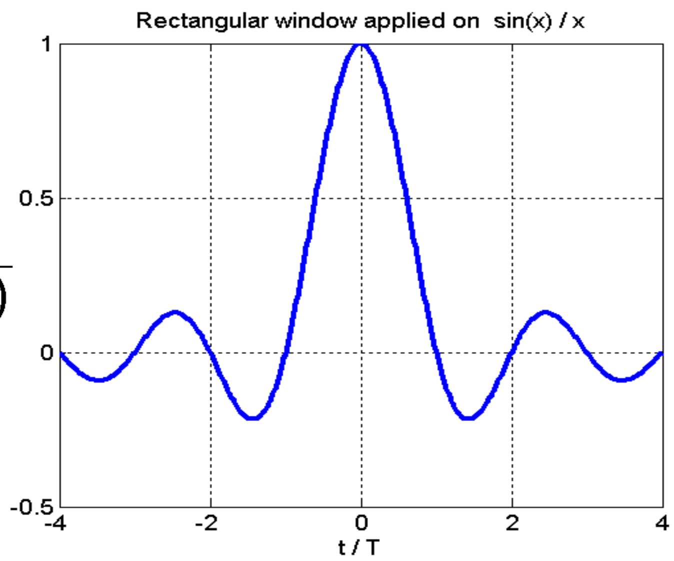




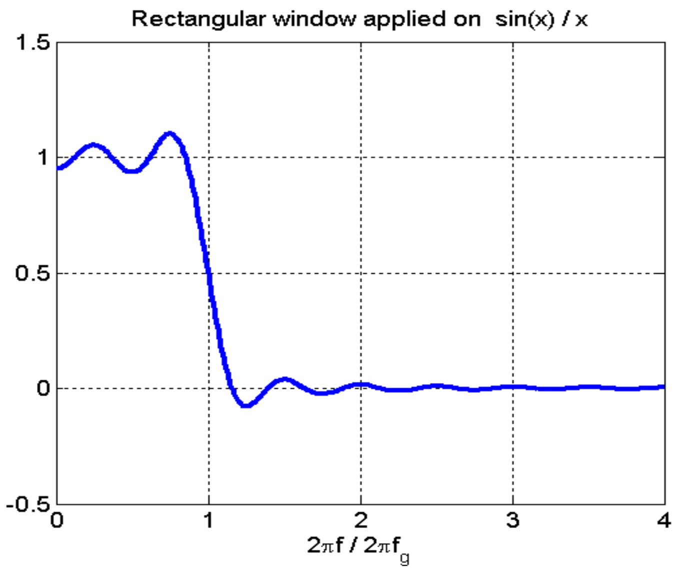


Gefensterte Impulsantworten ($2\,t_o = 8\,T = 4\,/\,f_g$)

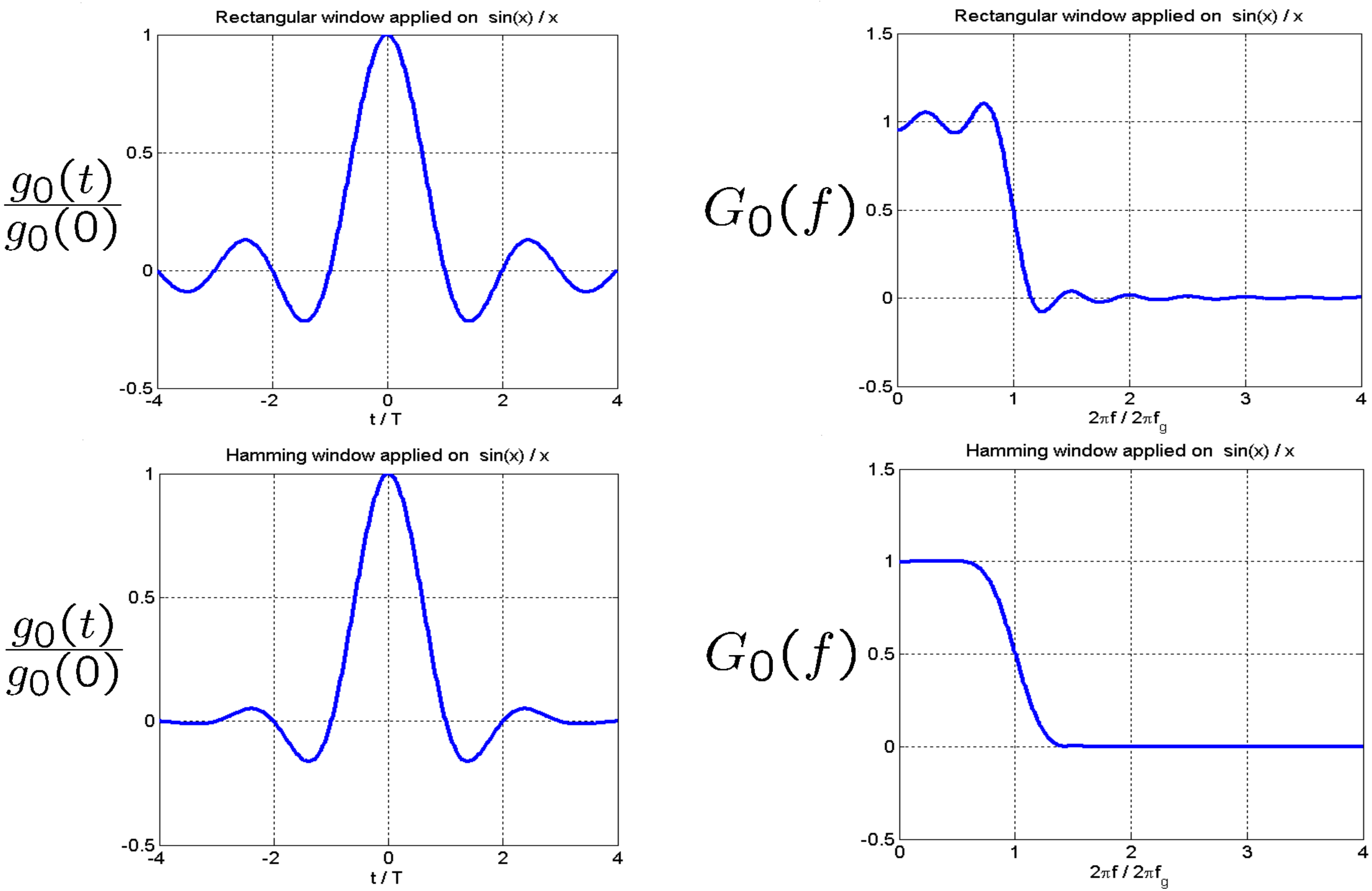
$$\frac{g_0(t)}{g_0(0)}$$



$$G_0(f)$$



Gefensterte Impulsantworten ($2\, t_o = 8\, T = 4 / f_g$)



Nachrichtenübertragung mittels orthogonaler Basisfunktionen: Implementierung des Detektors als Bank signalangepaßter Filter

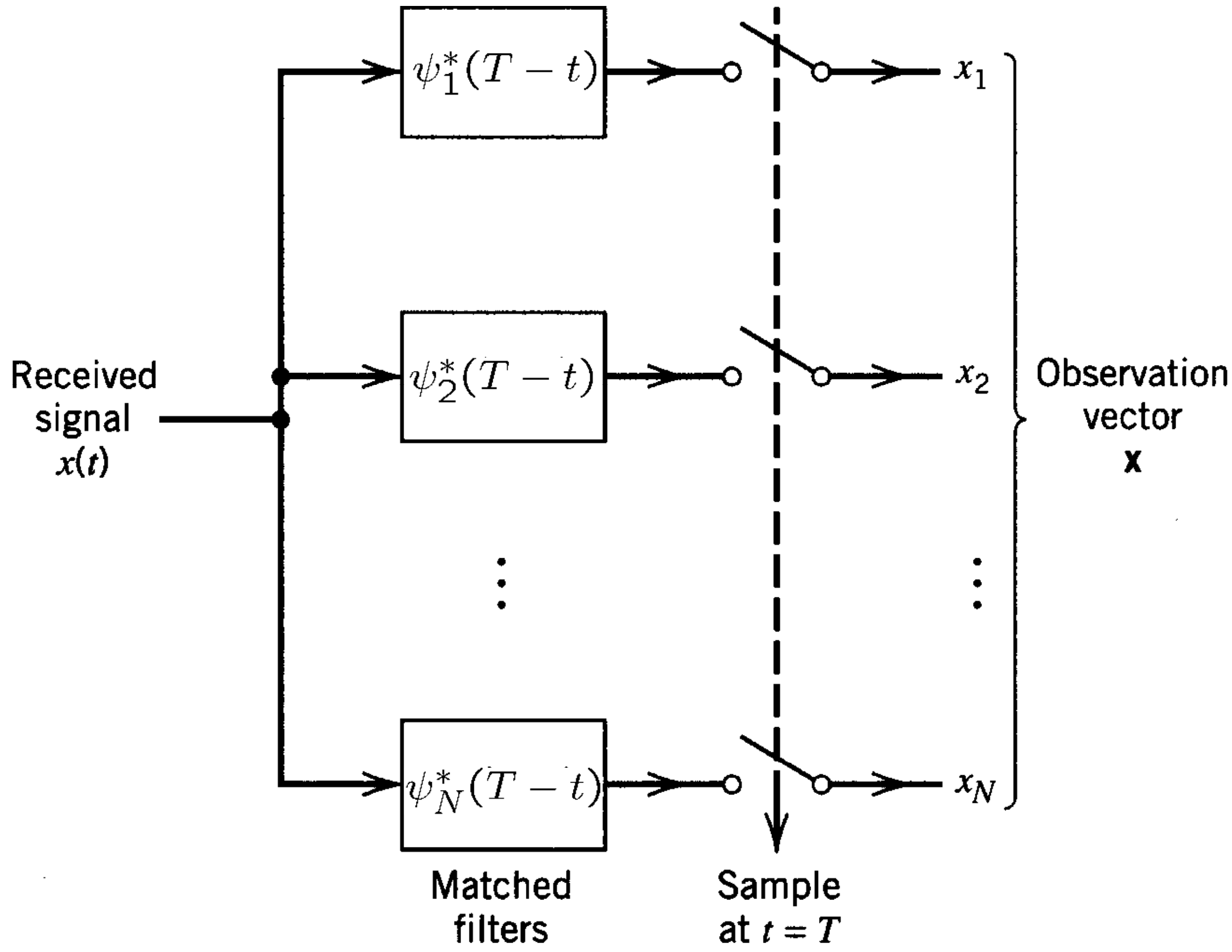


FIGURE 5.10 Detector part of matched filter receiver; the signal transmission decoder is as shown in Fig. 5.9*b*.

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," 2000.

Detektor und Decoder bei der Übertragung von Signalen im Signalraum: Nachrichtenübertragung mittels orthogonaler Signale

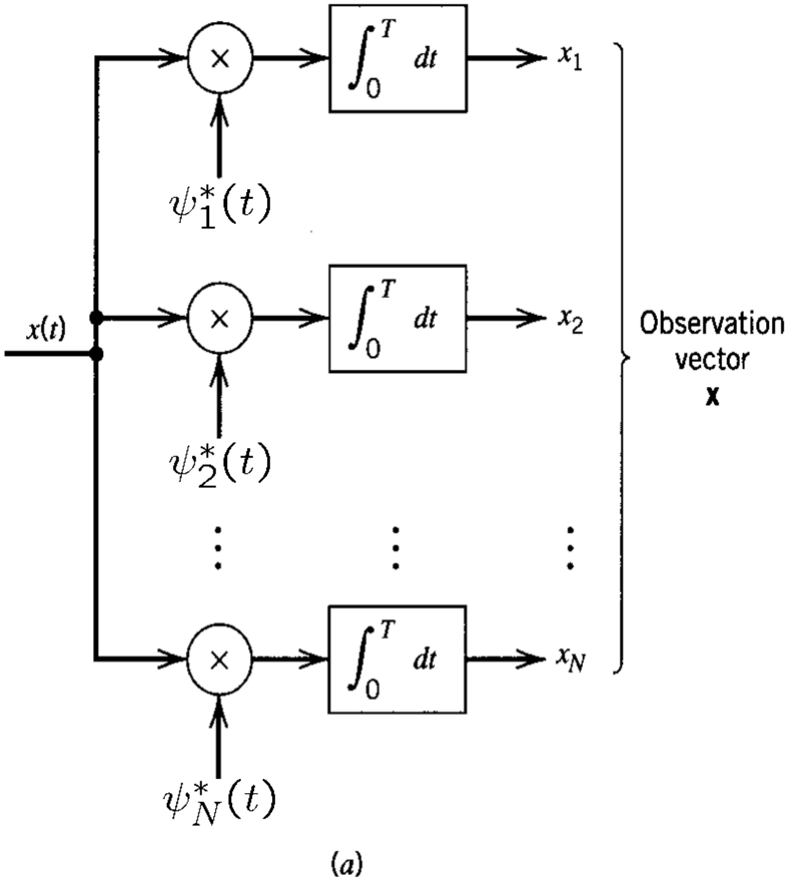


FIGURE 5.9 (*a*) Detector or demodulator. (*b*) Signal transmission decoder

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," 2000.

Detektor und Decoder bei der Übertragung von Signalen im Signalraum: Nachrichtenübertragung mittels orthogonaler Signale

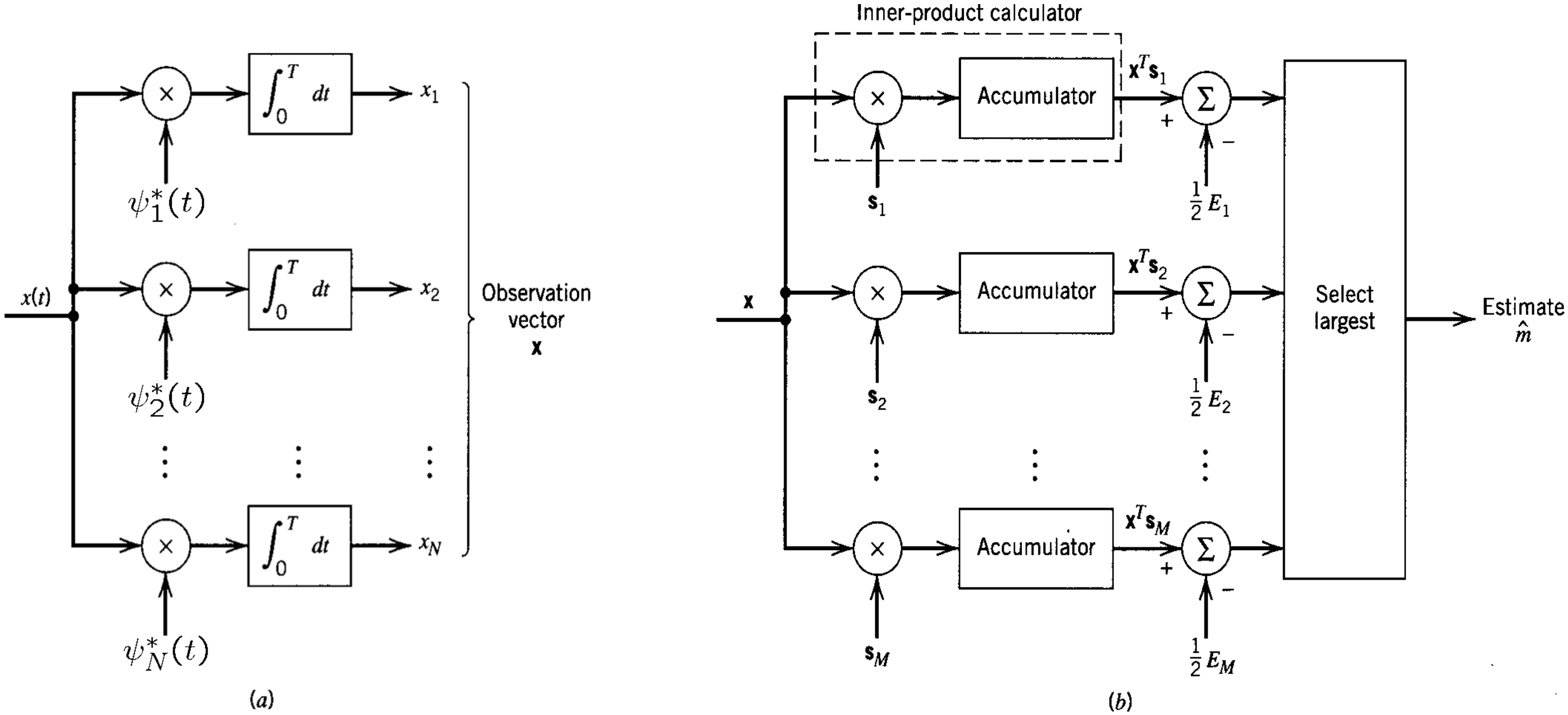


FIGURE 5.9 (*a*) Detector or demodulator. (*b*) Signal transmission decoder

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," 2000.

Matched Filter vs. Integrate-and-Dump Empfänger

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," 2000.

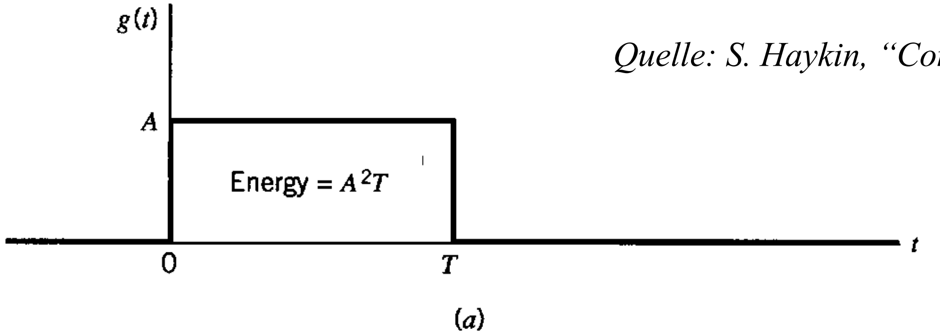


FIGURE 4.2 (*a*) Rectangular pulse. (*b*) Matched filter output. (*c*) Integrator output.

Matched Filter vs. Integrate-and-Dump Empfänger

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," 2000.

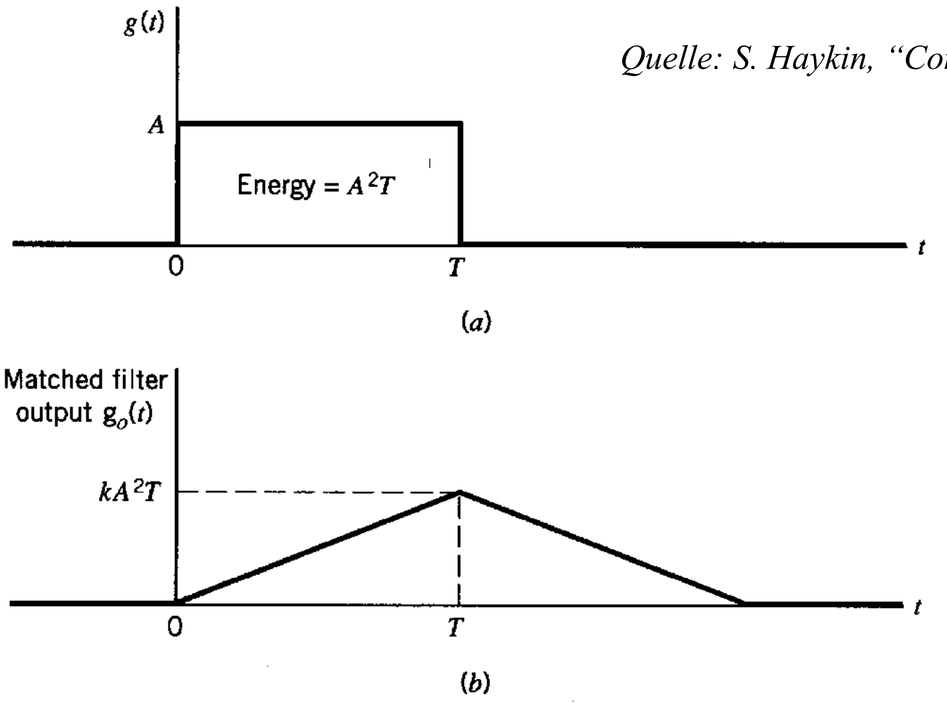


FIGURE 4.2 (a) Rectangular pulse. (b) Matched filter output. (c) Integrator output.

Matched Filter vs. Integrate-and-Dump Empfänger

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," 2000.

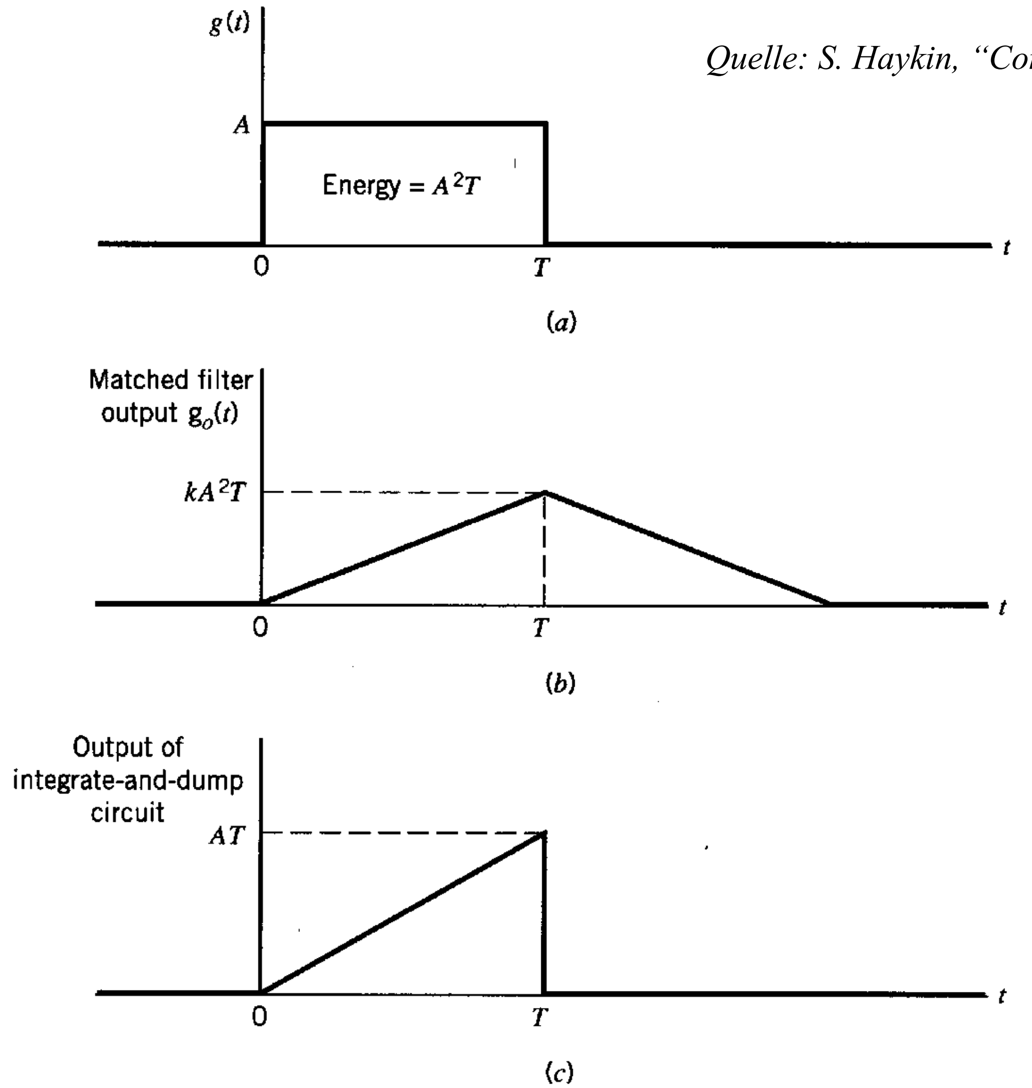


FIGURE 4.2 (*a*) Rectangular pulse. (*b*) Matched filter output. (*c*) Integrator output.

Signalraum-Diagramm für kohärentes QPSK

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," 2000.

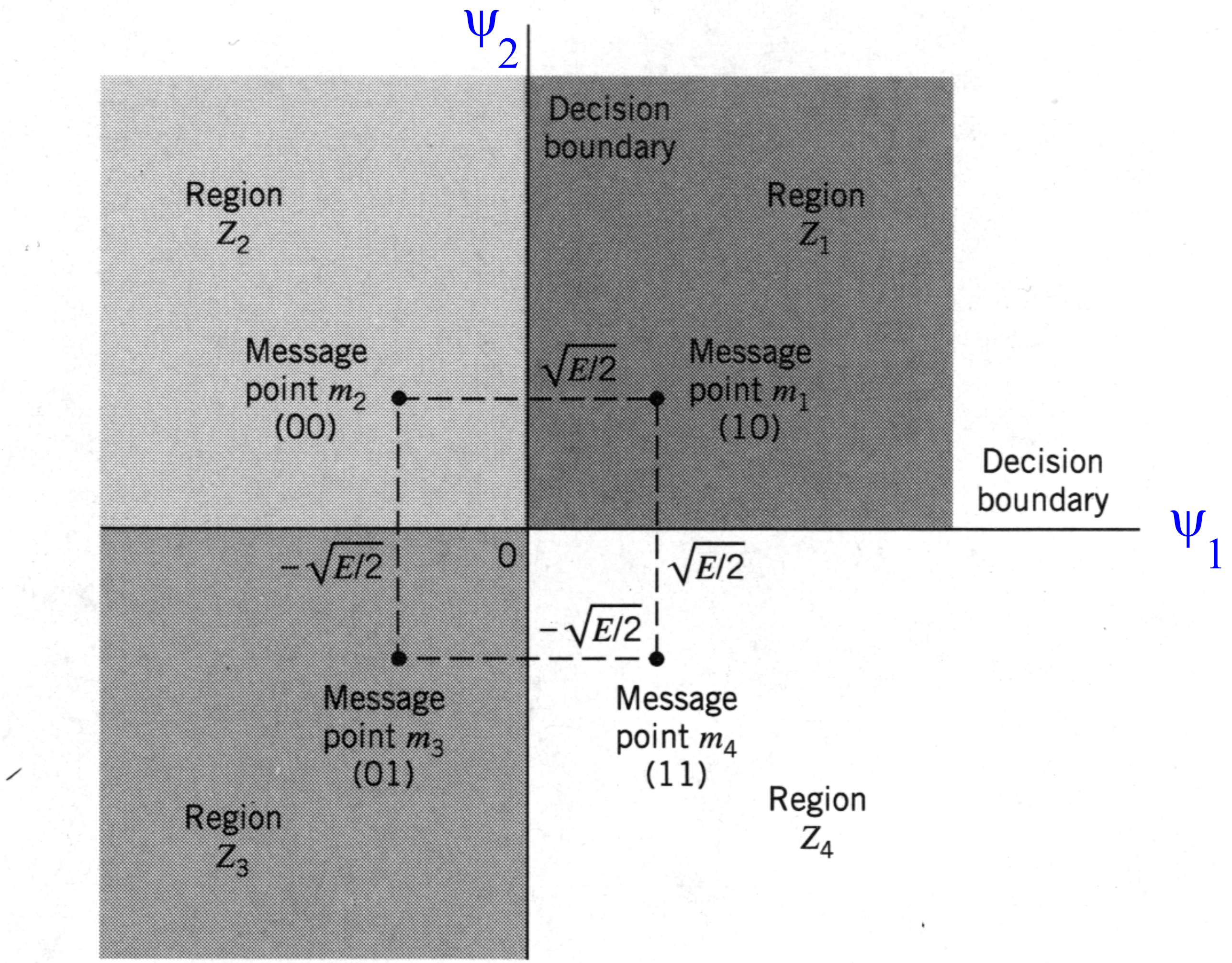
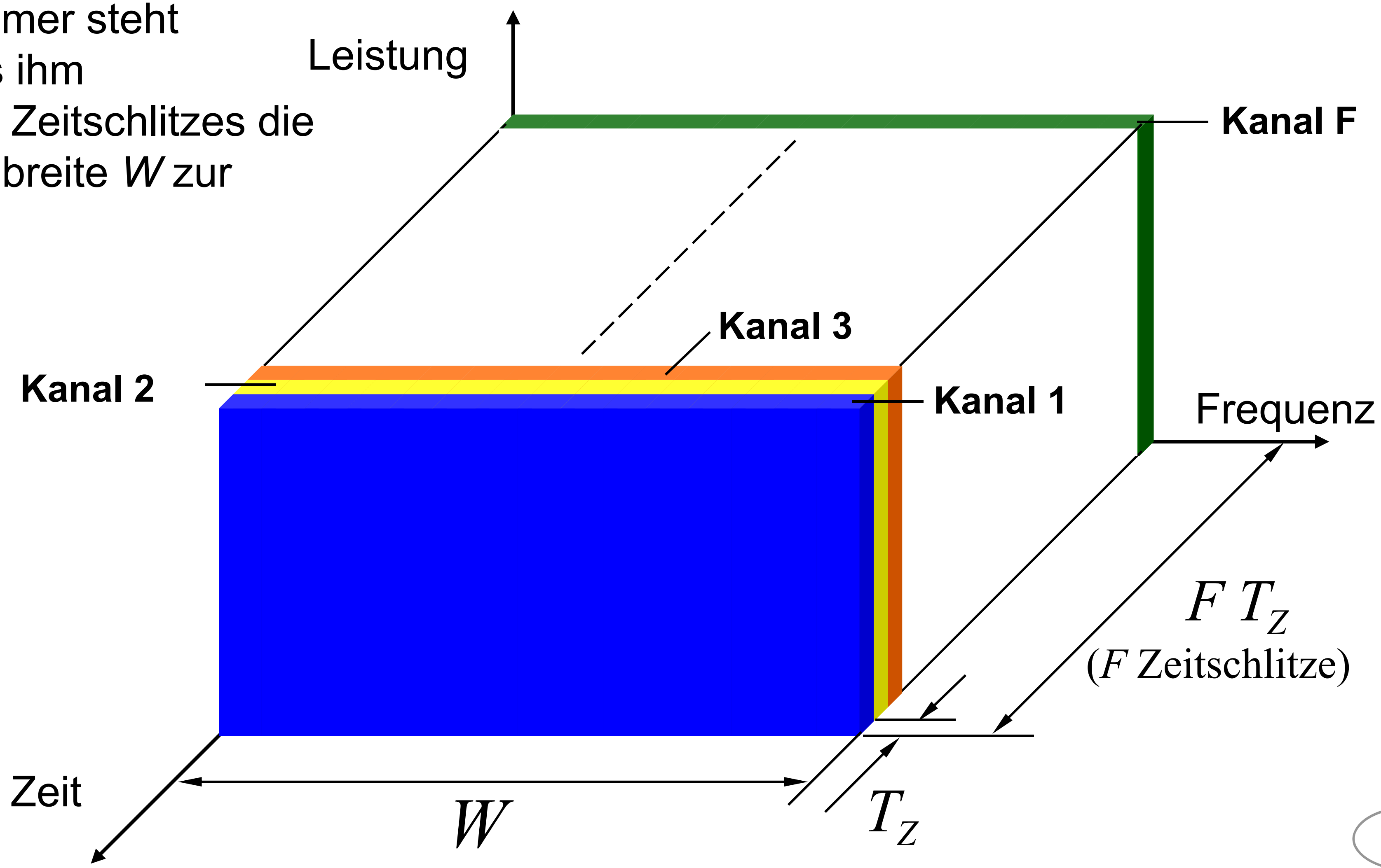


FIGURE 6.6 Signal-space diagram of coherent QPSK system.

11. Vielfachzugriffsverfahren

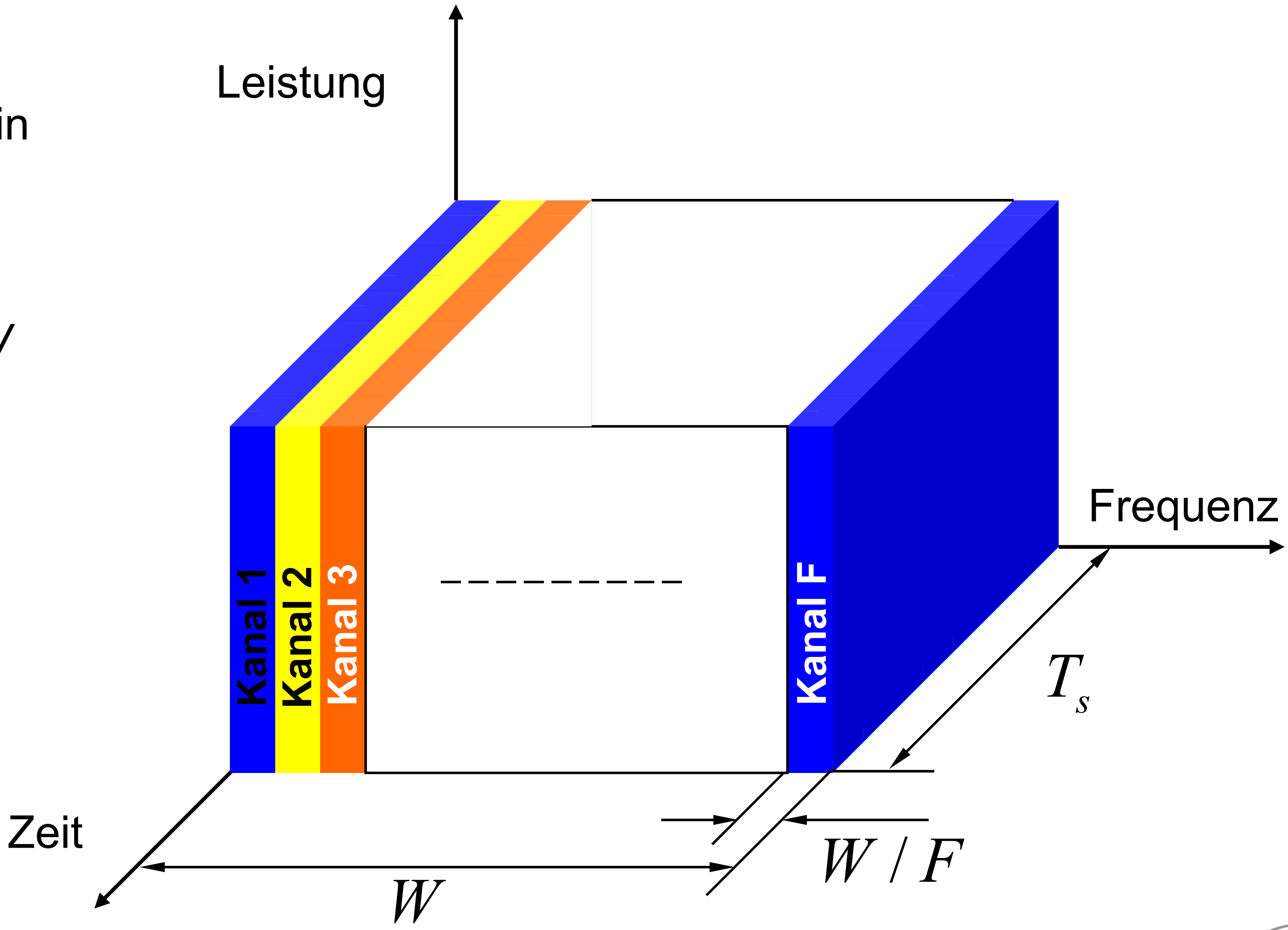
TDMA

- Jedem Teilnehmer steht während eines ihm zugewiesenen Zeitschlitzes die gesamte Bandbreite *W* zur Verfügung



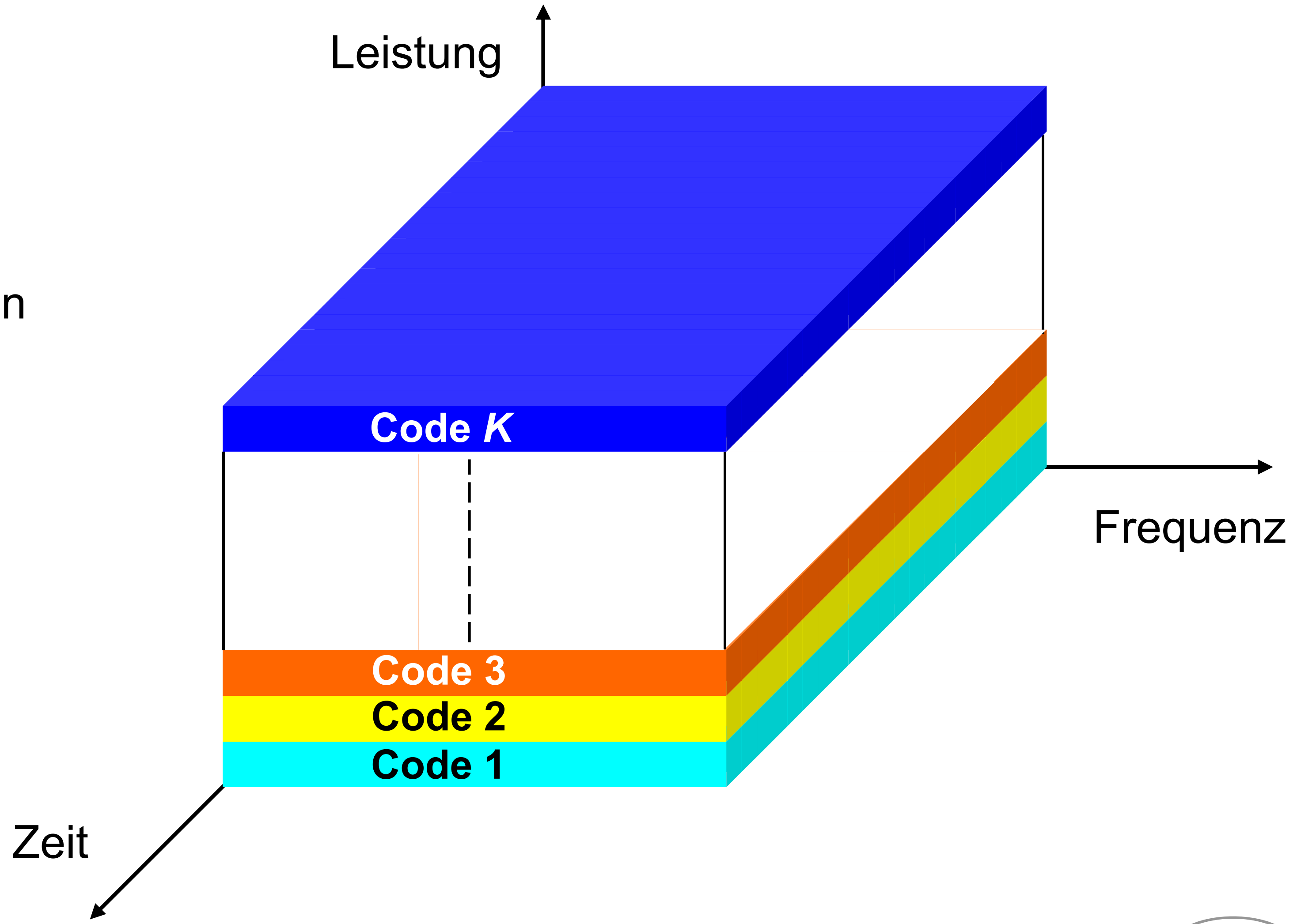
FDMA

- Jedem Teilnehmer steht durchgehend ein begrenztes Frequenzband innerhalb der Gesamtbandbreite *W* zur Verfügung



CDMA

- Zu jeder Zeit steht die gesamte spektrale Bandbreite *W* zur Verfügung.
- Die Trennung der einzelnen Signale wird durch Verwendung teilnehmerspezifischer Codes ermöglicht.



Code Division Multiple Access (CDMA)

- **Bandspreizverfahren** (*Spread Spectrum*)
  - ⇒ Informationssignal der Bandbreite R_b wird auf die Übertragungsbandbreite $W = R_c >> R_b$ gespreizt
  - ⇒ ursprünglich: militärische Anwendungen
  - ⇒ heute: auch viele kommerzielle Anwendungen, insbesondere im Mobilfunk
  - ⇒ 2 grundlegende Verfahren
    - ***Direct Sequence*** (**DS**), z.B. bei UMTS (WCDMA)
    - ***Frequency Hopping*** (**FH**), z.B. bei Bluetooth
- **Vorteile**
  - ⇒ große Toleranz gegenüber Interferenz
  - ⇒ Störunempfindlichkeit
  - ⇒ Toleranz gegenüber Mehrwegeausbreitung
  - ⇒ vergrößerte Reichweite
  - ⇒ unerwünschte Detektion kaum möglich / Abhörsicherheit (gespreiztes Signal sieht wie Rauschen aus)

Rechteckimpuls
und dessen spektrale Energiedichte

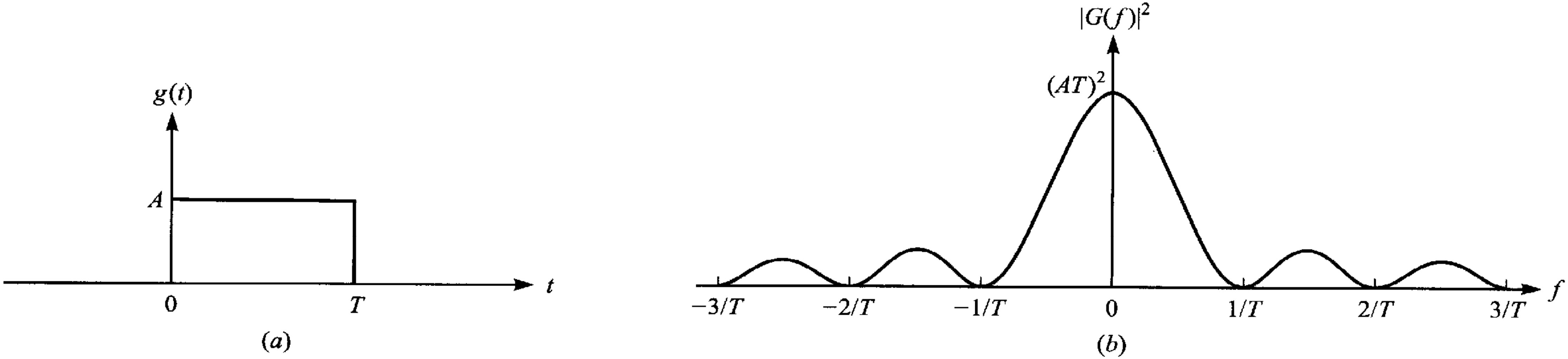
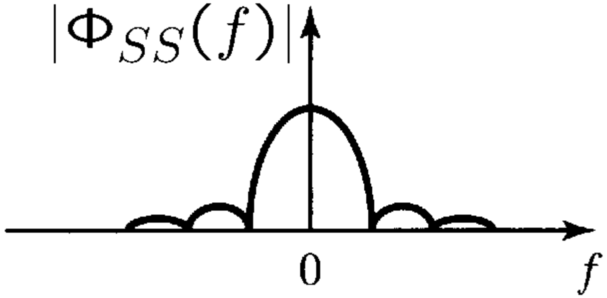


FIGURE 4.4–1
Rectangular pulse and its energy density spectrum $|G(f)|^2$.

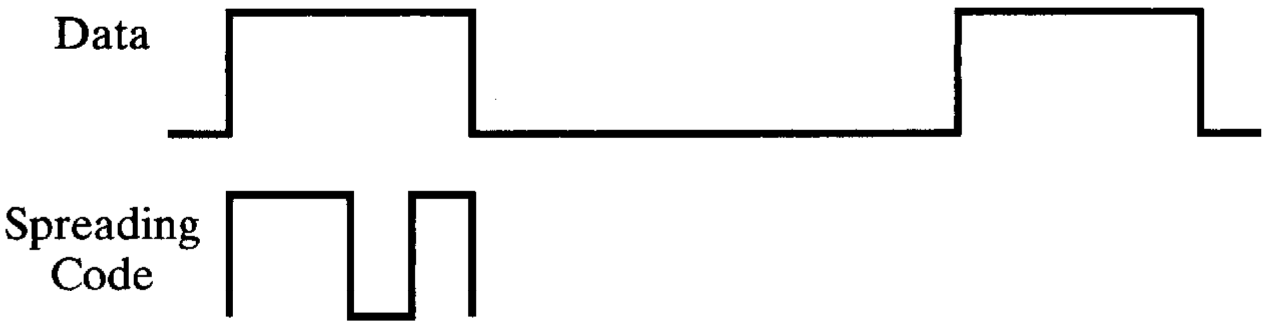
Quelle: John G. Proakis , "Digital Communications " , 2001.

Spreizung mit Q = 4

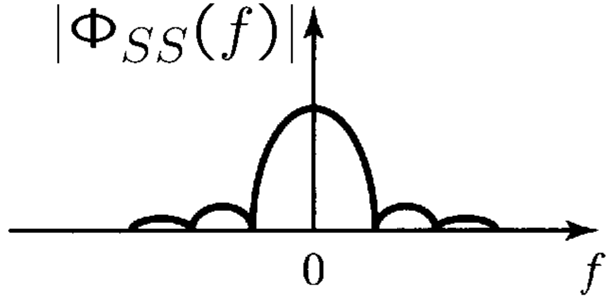
ungespreizt



Spreizung mit $Q = 4$



ungespreizt



Spreizung mit $Q = 4$

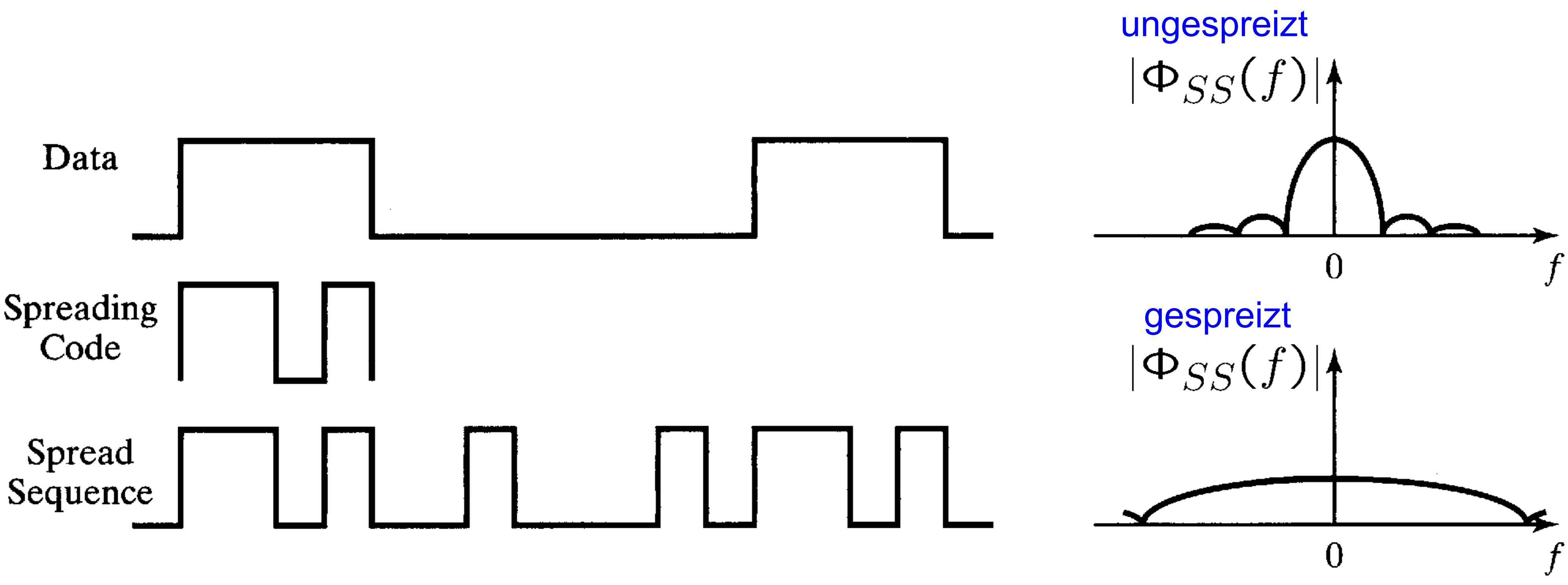


FIGURE 5.1 Spreading by a factor of four in the time and frequency domains.

Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

CDMA Modulator und Demodulator
(MF implementiert als Korrelationsempfänger)

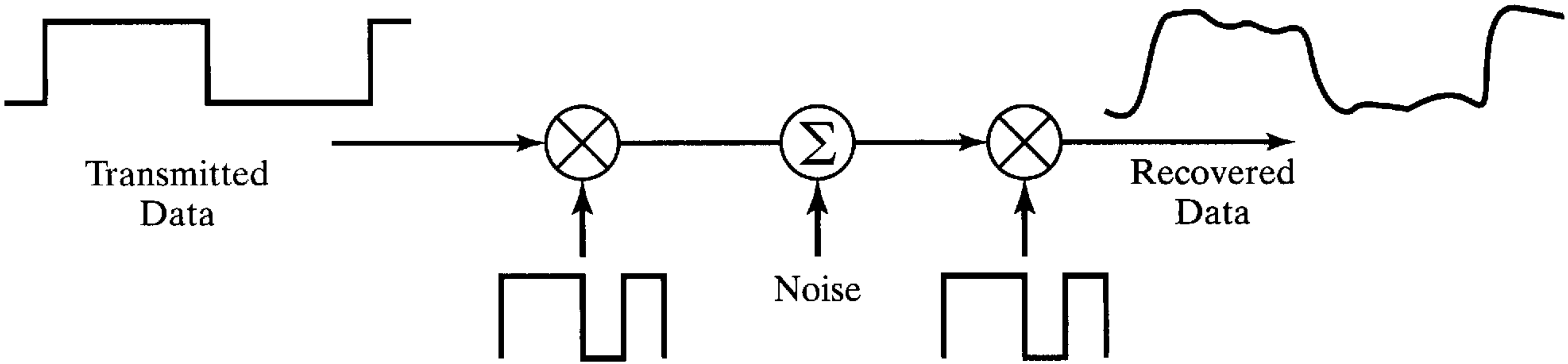


FIGURE 5.2 A simple CDMA modulator and optimum demodulator, with representative waveforms.

Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

Einfluß von Interferenz

SNR am Ausgang eines DS-Empfängers

entspricht

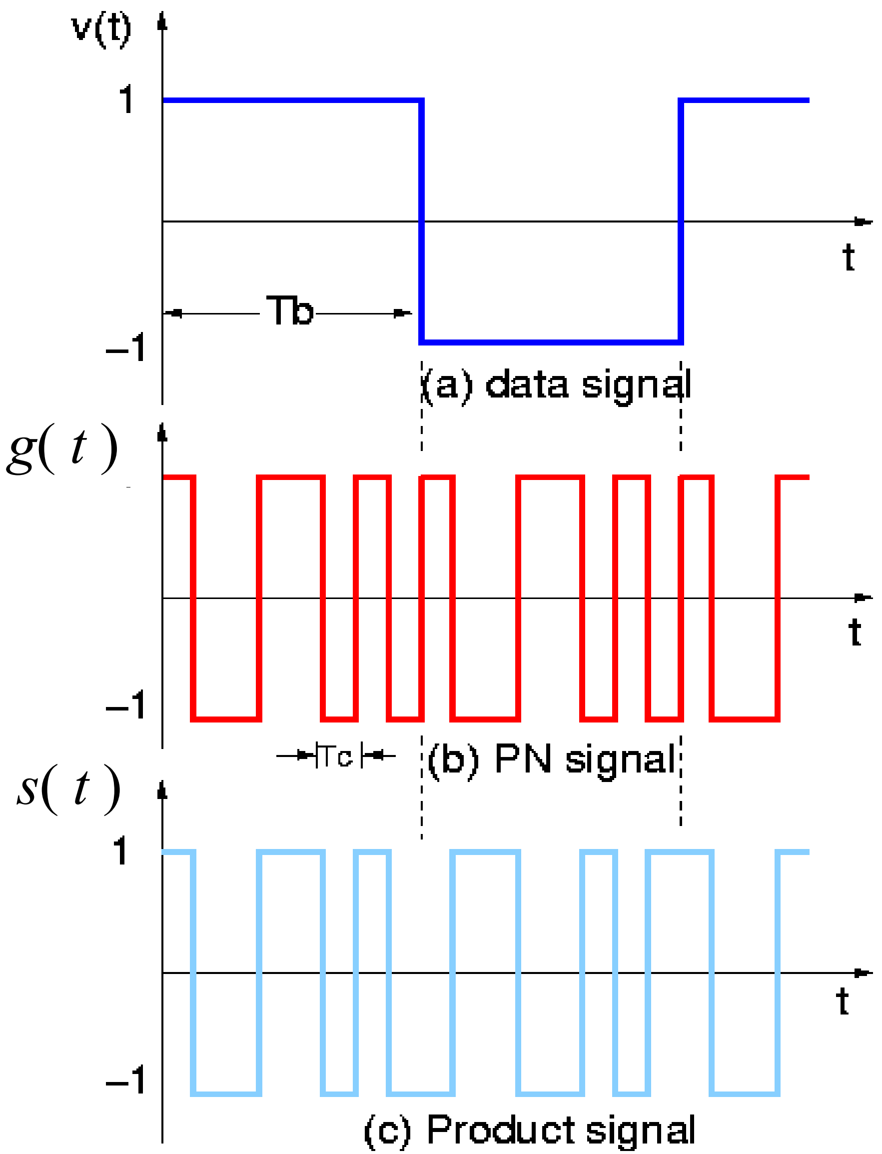
SNR am Ausgang eines Empfängers für nicht-gespreiztes BPSK oder QPSK

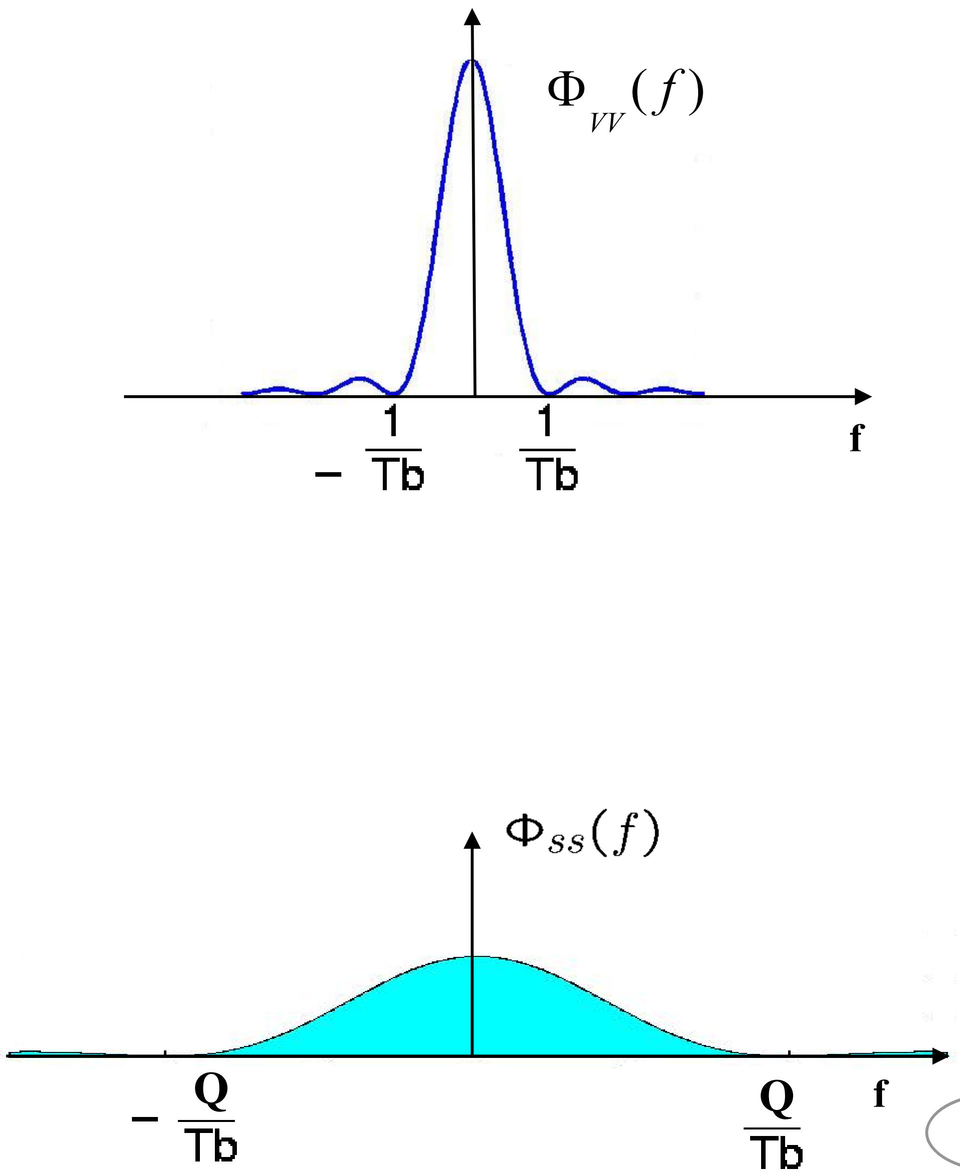
- **Uncodierte Bitfehlerrate** bei kohärenter Detektion

$$\boxed{P_e = \frac{1}{2}\operatorname{erfc}\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)}$$

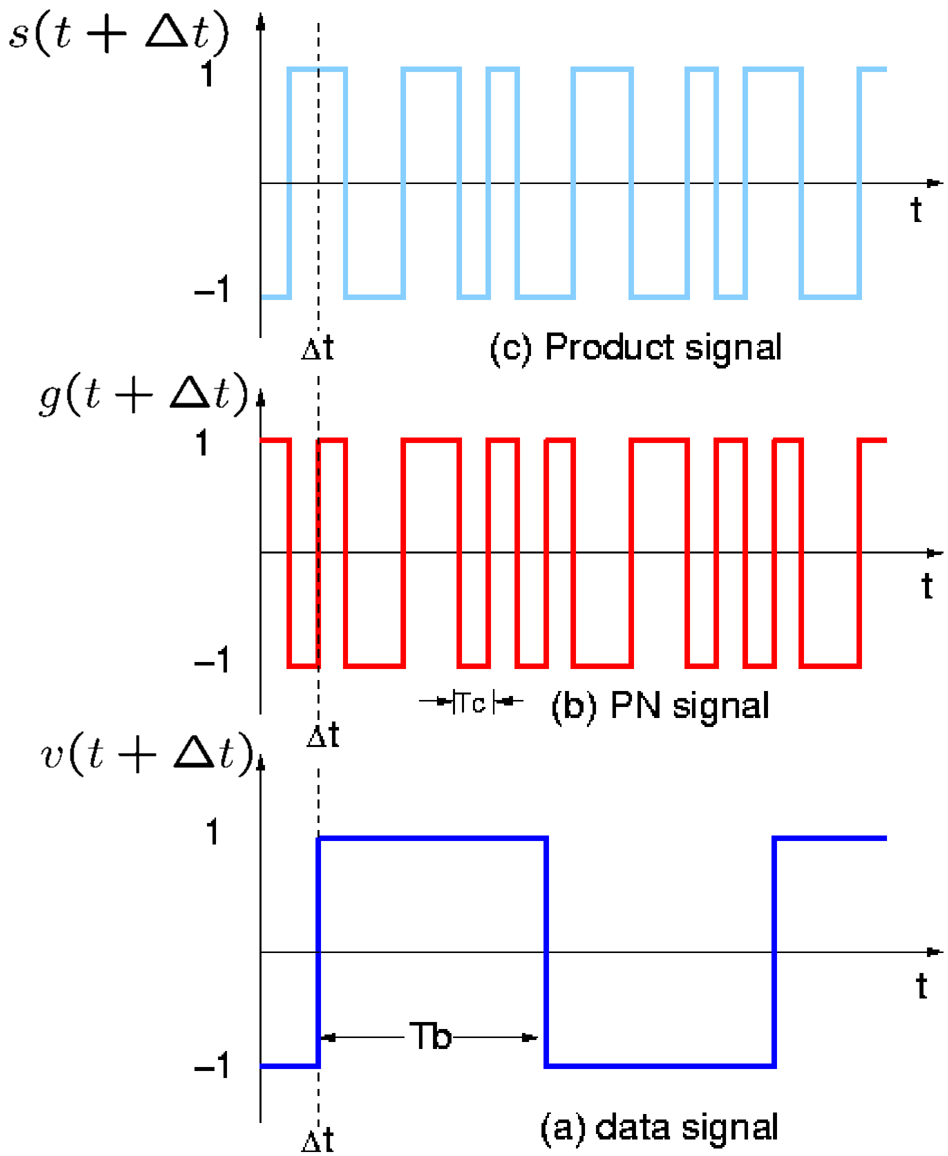
- DS-Empfänger reduziert die Empfindlichkeit gegenüber Interferenz
  $\Rightarrow$ Entspreizung wirkt als Spreizung auf Signale, auf die sie nicht angepaßt ist

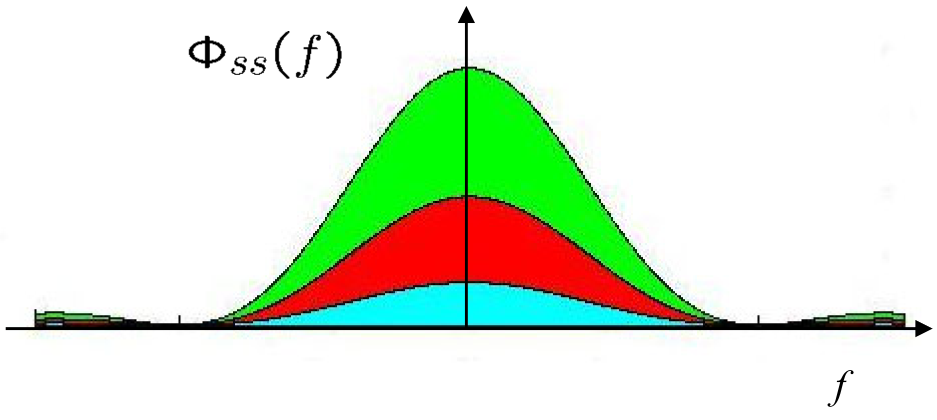
Erzeugung eines DS-CDMA Signals

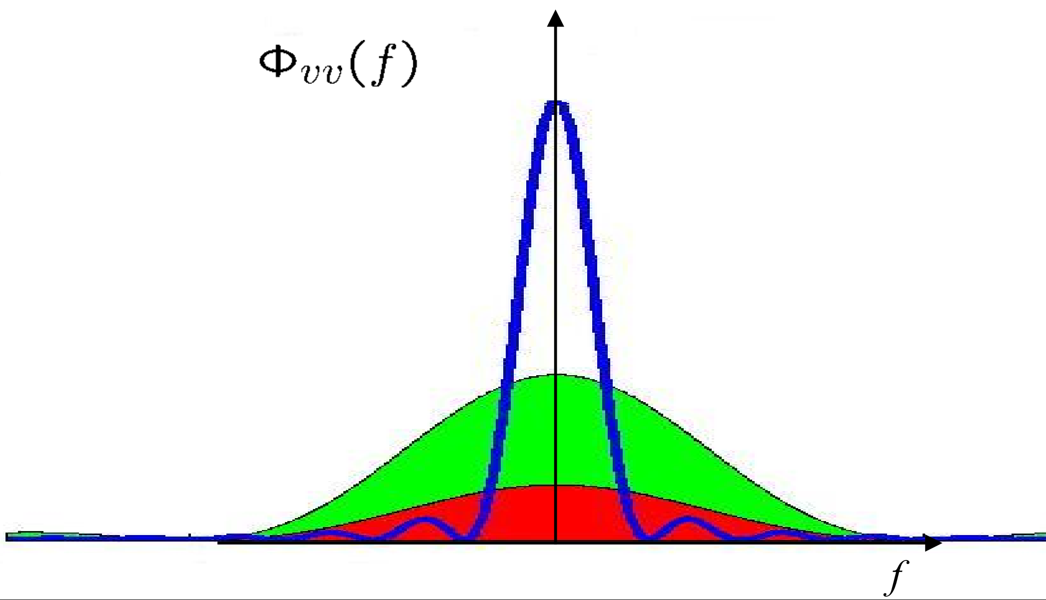




Entspreizung eines DS-CDMA Signals







Walsh-Hadamard Codes der Länge $Q = 4$

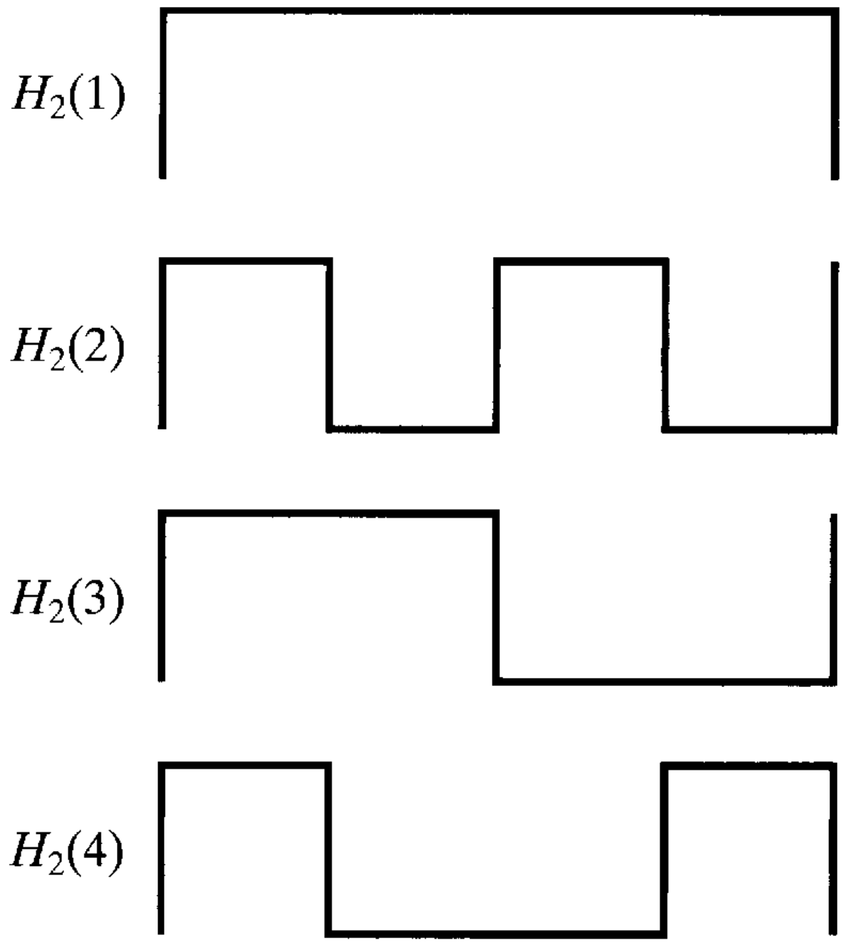
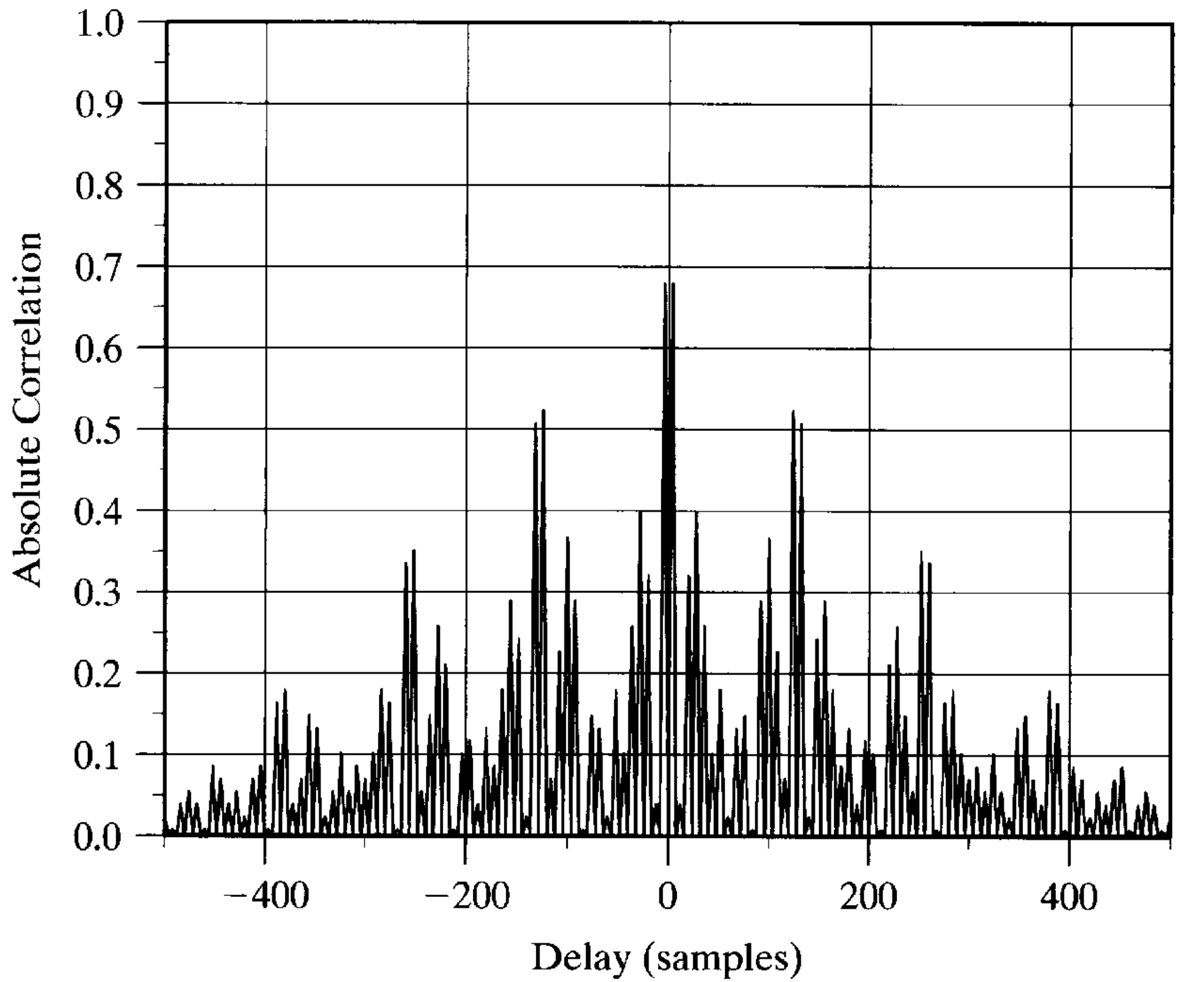


FIGURE 5.4 Walsh–Hadamard codes of length 4.

Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

KKF zwischen Walsh-Hadamard Codes der Länge $Q = 128$



Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

FIGURE 5.5 Normalized absolute cross-correlation of $H_7(63)$ and $H_7(64)$ with four times oversampling.

OVSF Codes

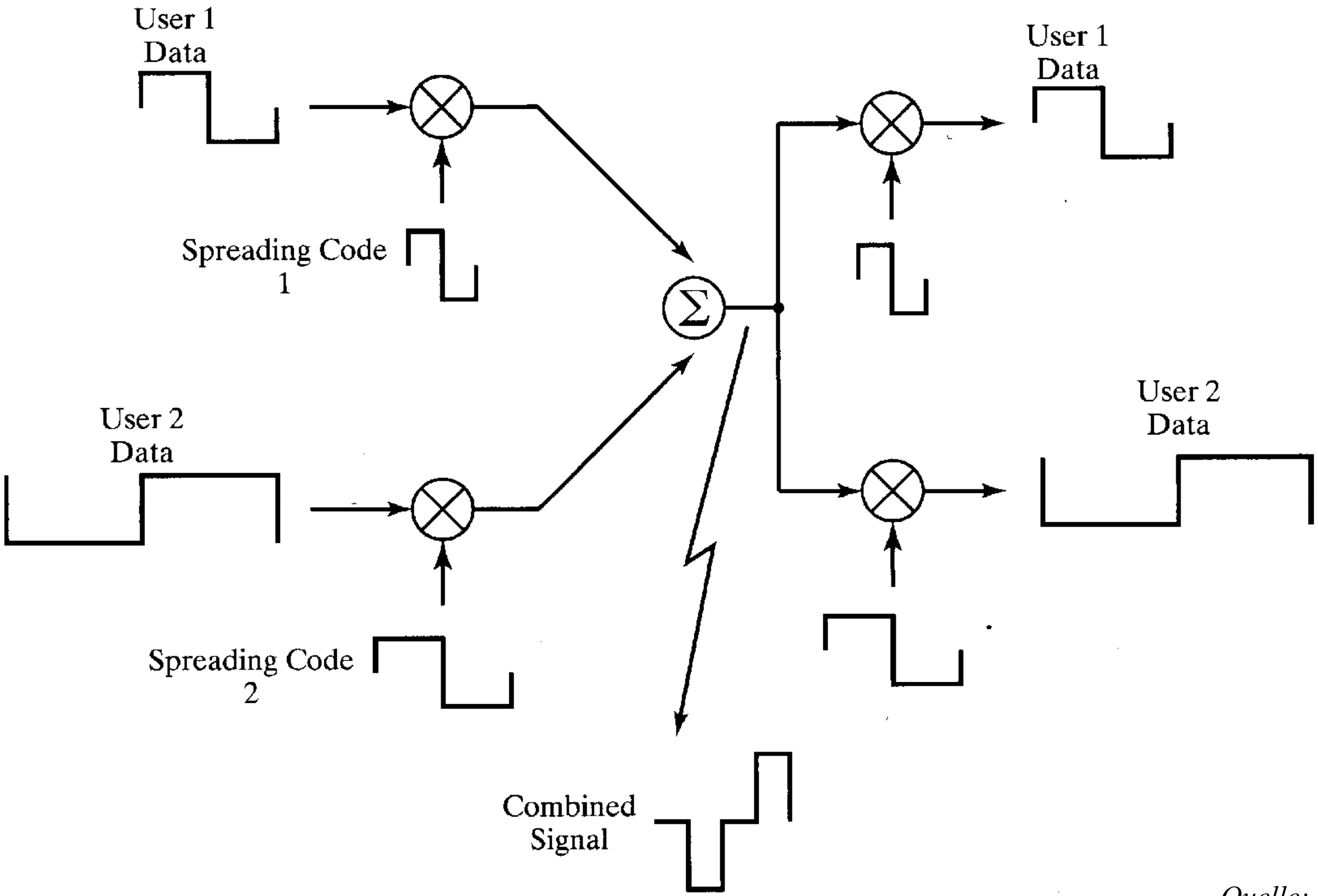
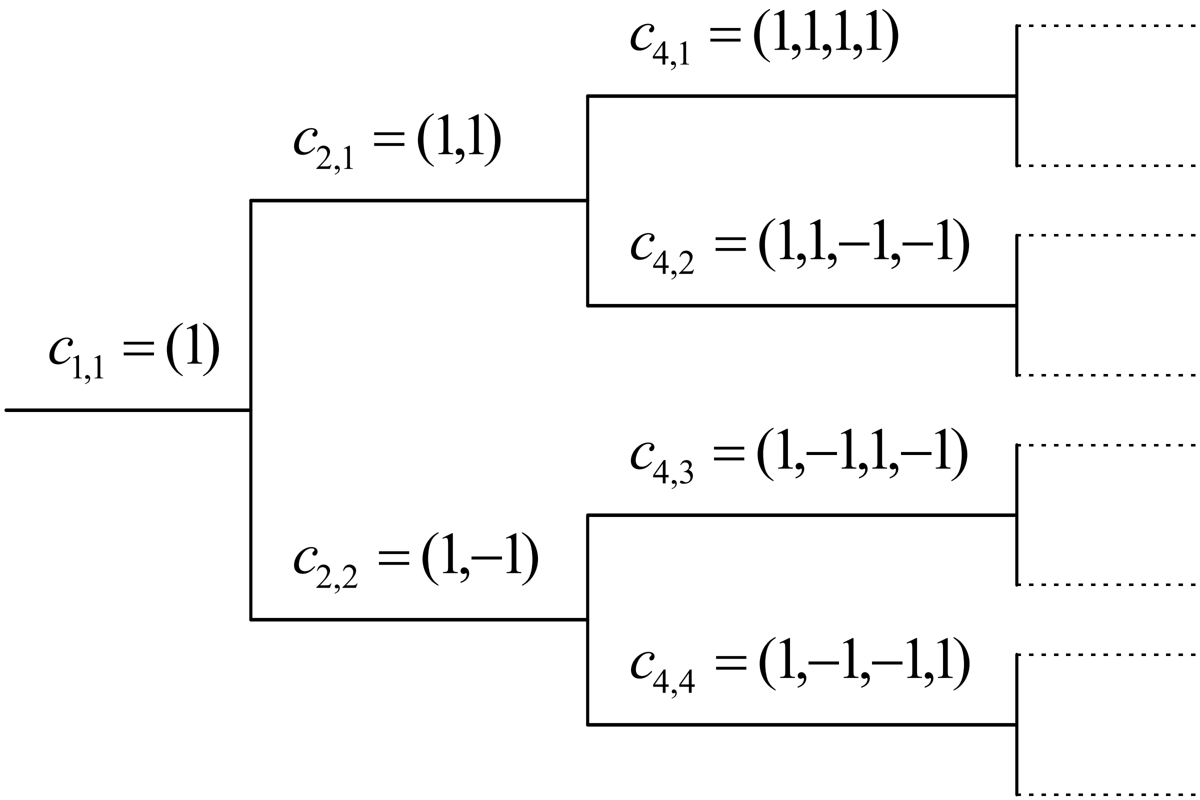


FIGURE 5.6 Illustration of orthogonal variable spreading factors.

Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

OVSF code tree for channelization codes



$$c_{2n} = \begin{pmatrix} c_{2n,1} \\ c_{2n,2} \\ \vdots \\ c_{2n,2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{n,1} & c_{n,1} \\ c_{n,1} & -c_{n,1} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} c_{n,n} & c_{n,n} \\ c_{n,n} & -c_{n,n} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

SF = 1 SF = 2 SF = 4 (spreading factor, code length)

Source: 3GPP

m - *(Maximal Length)* Sequenzen

- Zur einfachen Erzeugung von binären Pseudo-Zufallsfolgen benutzt man *m*-stufige rückgekoppelte Schieberegister
  - $\Rightarrow$ periodische binäre Sequenz
  - $\Rightarrow$ die Ausgangssignale mehrerer Schieberegisterstufen werden Modulo-2-addiert und auf den Eingang zurückgeführt
  - $\Rightarrow$ der Zustand { 0, 0, …, 0 } ist auszuschließen
- Maximale Sequenzlänge bei m Flip-Flops: $Q = N = 2^m - 1$
- Anzahl aller möglichen Zustände: $2^m - 1$

$$\boxed{t_p = (2^m - 1)\, T_c}$$

Schieberegister zur Erzeugung einer *m*-Sequenz für *m* = 3

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," 2001.

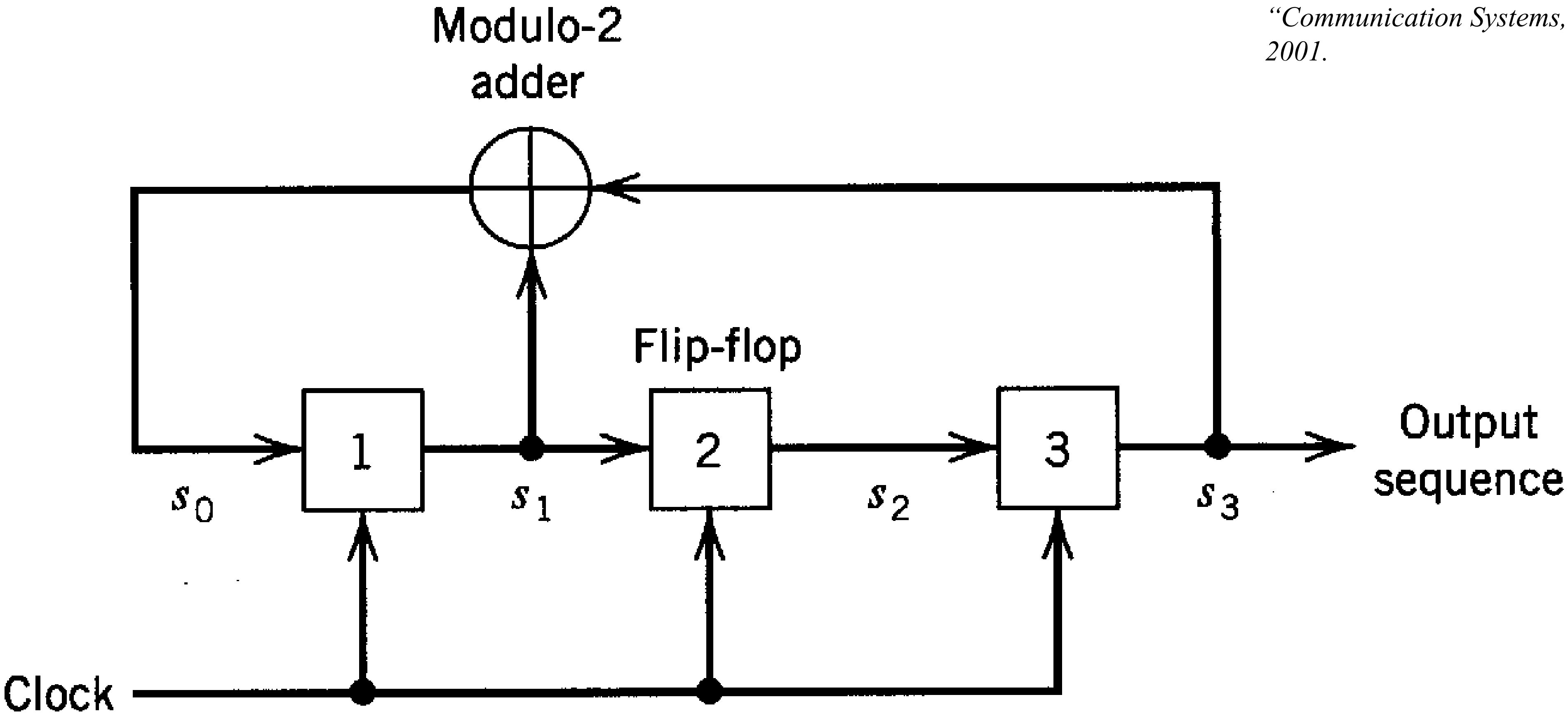


FIGURE 7.2 Maximal-length sequence generator for $m = 3$.

Eigenschaften von *m*-Sequenzen

- Jede *m*-Sequenz der Länge $Q = N = 2^m - 1$ enthält
  - ⇒ 2^{m-1} Einsen und
  - ⇒ $2^{m-1} - 1$ Nullen
- Die Modulo-2-Summe aus einer *m*-Sequenz und einer zyklisch verschobenen Version der gleichen *m*-Sequenz
  - ⇒ ergibt eine zyklisch verschobene Version dieser *m*-Sequenz
- Die Autokorrelationsfunktion (AKF) einer *m*-Sequenz ist
  - ⇒ binärwertig und
  - ⇒ periodisch mit der Periode $N = 2^m - 1$
- Schieberegister zur Erzeugung von *m*-Sequenzen (siehe nächste Folie)
  - ⇒ plus dem “image set,“ das eine *m*-Sequenz mit gespiegeltem Zeitverlauf generiert

m-Sequenzen mit Schieberegistern der Länge 2 bis 8

TABLE 7.1 *Maximal-length sequences of shift-register lengths 2–8*

Shift-Register Length, m	*Feedback Taps*
2*	[2, 1]
3*	[3, 1]
4	[4, 1]
5*	[5, 2], [5, 4, 3, 2], [5, 4, 2, 1]
6	[6, 1], [6, 5, 2, 1], [6, 5, 3, 2]
7*	[7, 1], [7, 3], [7, 3, 2, 1], [7, 4, 3, 2], [7, 6, 4, 2], [7, 6, 3, 1], [7, 6, 5, 2], [7, 6, 5, 4, 2, 1], [7, 5, 4, 3, 2, 1]
8	[8, 4, 3, 2], [8, 6, 5, 3], [8, 6, 5, 2], [8, 5, 3, 1], [8, 6, 5, 1], [8, 7, 6, 1], [8, 7, 6, 5, 2, 1], [8, 6, 4, 3, 2, 1]

$*$ *Marsenne Prime Length Sequences*, für die $N = 2^m - 1$ eine Primzahl ist.

Quelle: S. Haykin, "Communication Systems," 2001.

Codesequenzen für unterschiedliche Teilnehmer eines CDMA-Systems

- unterschiedlich verschobene Versionen (*Shifts*) der gleichen *m*-Sequenz für verschiedene Teilnehmer
  - ⇒ Probleme bei fehlender Synchronisation und bei Mehrwegeausbreitung
- unterschiedliche *m*-Sequenzen, die durch unterschiedliche Schieberegister erzeugt werden, für verschiedene Teilnehmer
  - ⇒ oft schlechte Kreuzkorrelationseigenschaften
- ***Gold-Codes***
  - ⇒ besitzen gute Kreuzkorrelationseigenschaften
  - ⇒ bilde die Modulo-2-Summe zweier *m*-Sequenzen der gleichen Länge, die von unterschiedlichen Schieberegistern erzeugt werden

Erzeugung einer Gold-Sequenz

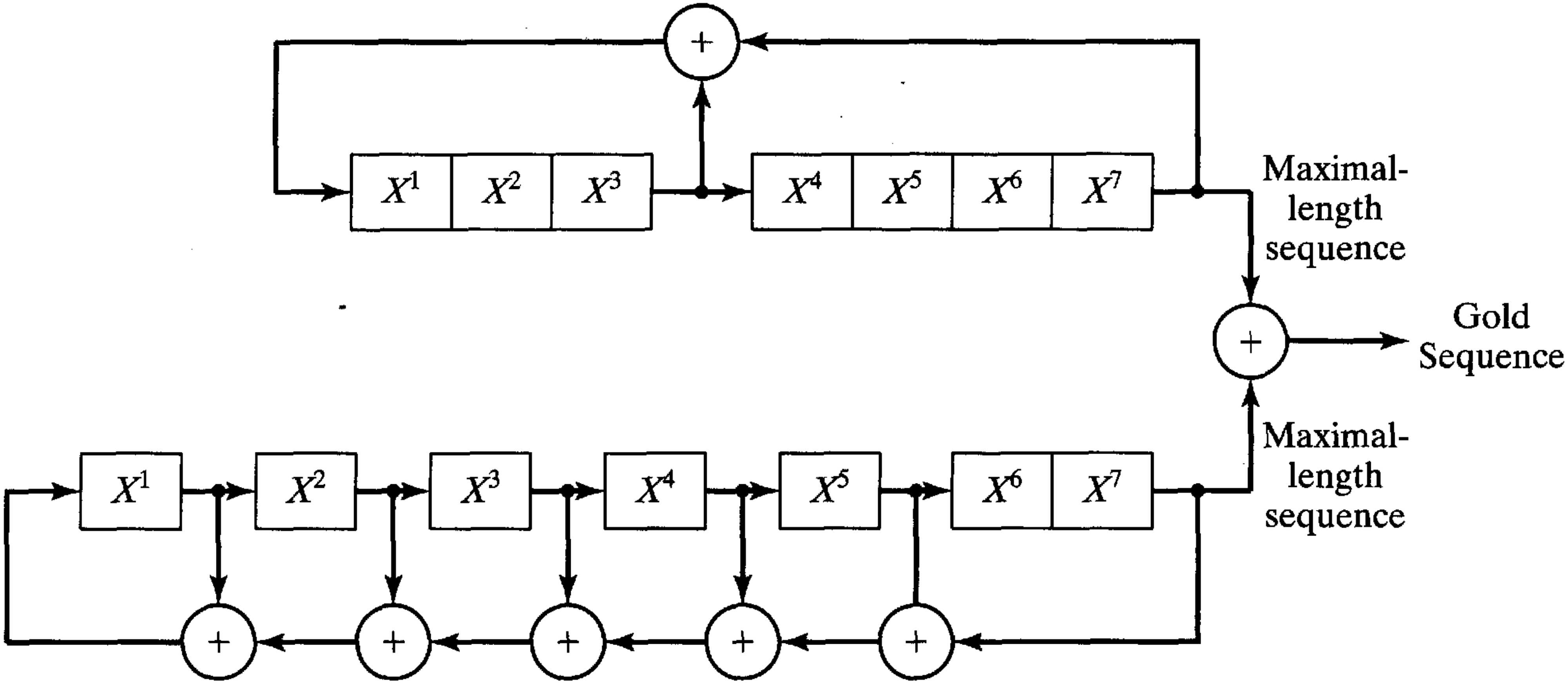
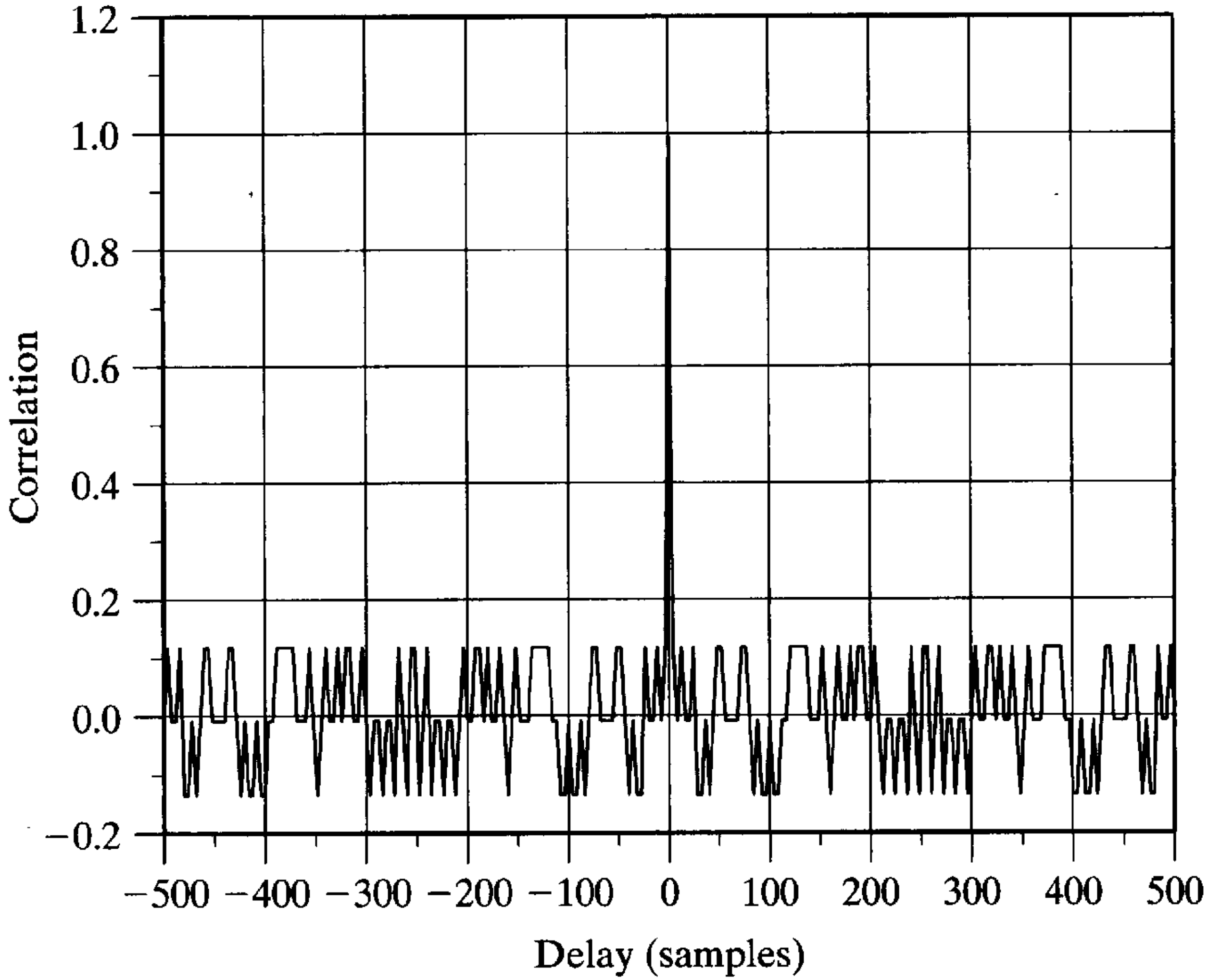


FIGURE 5.11 Generation of a Gold sequence.

Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

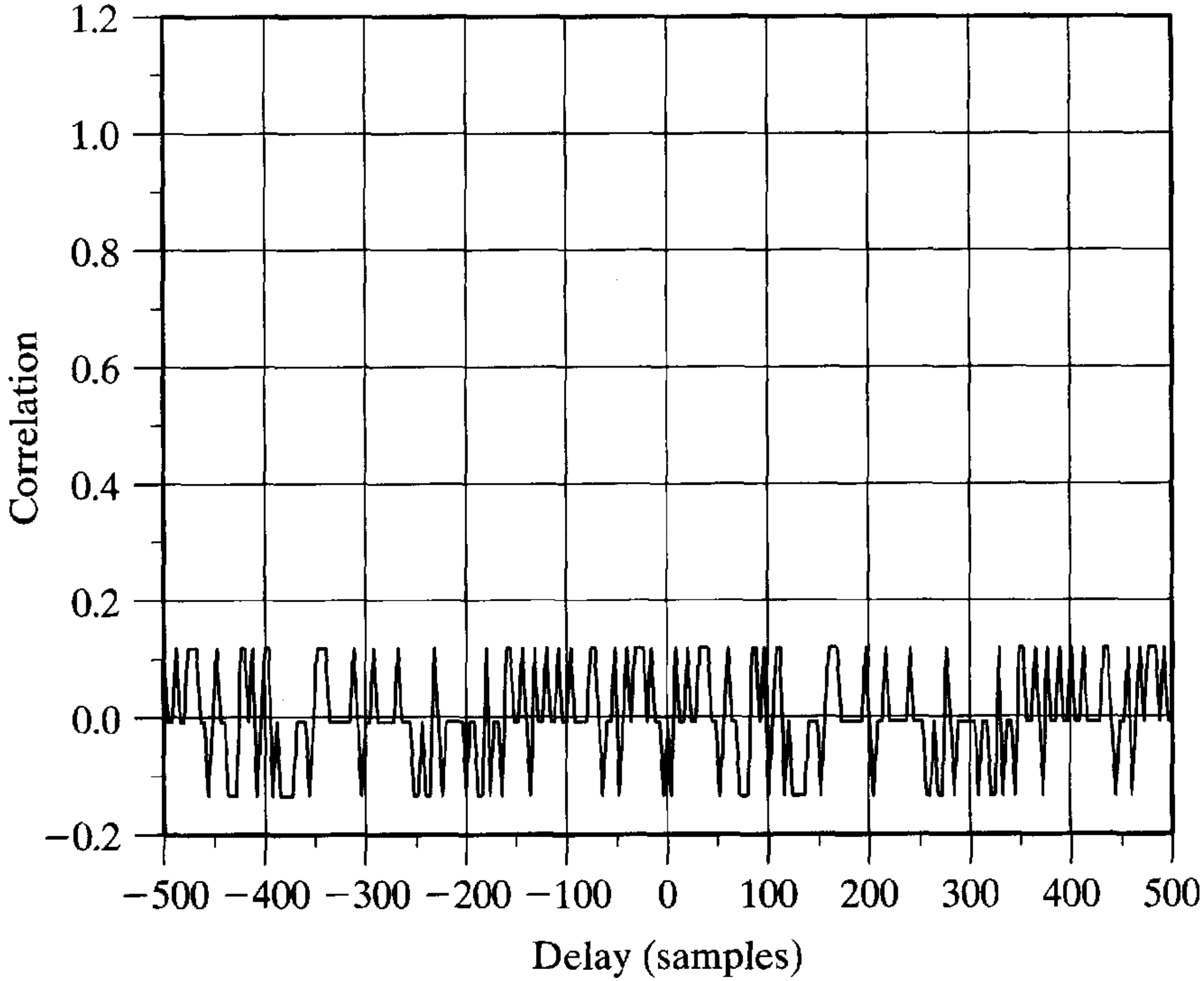
AKF einer periodischen Gold-Sequenz



Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

FIGURE 5.12 Normalized circular autocorrelation of a Gold code of length $2^7 - 1$.

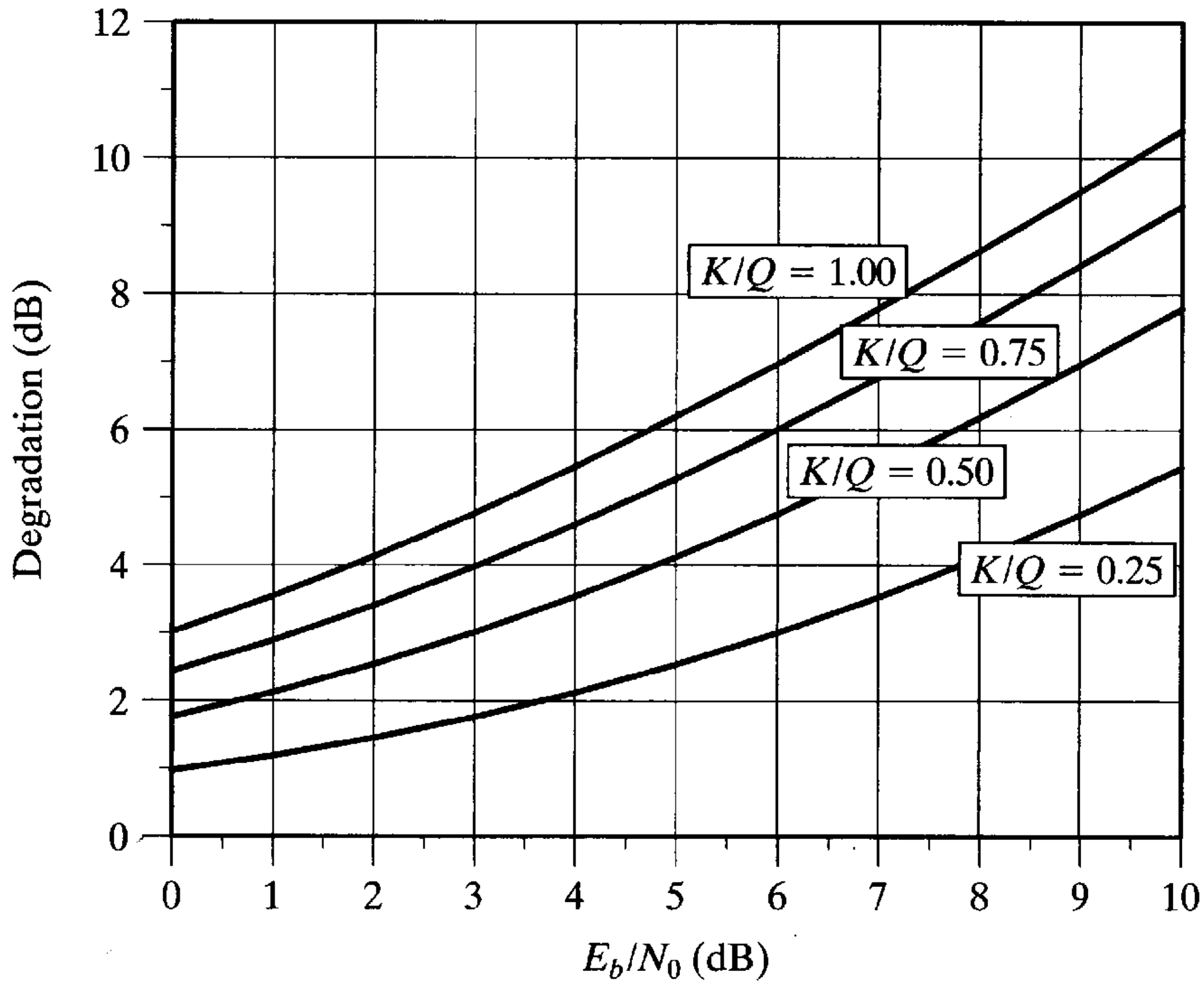
KKF zweier periodischer Gold-Sequenzen



Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

FIGURE 5.13 Normalized circular cross-correlation of two Gold codes of length $2^7 - 1$.

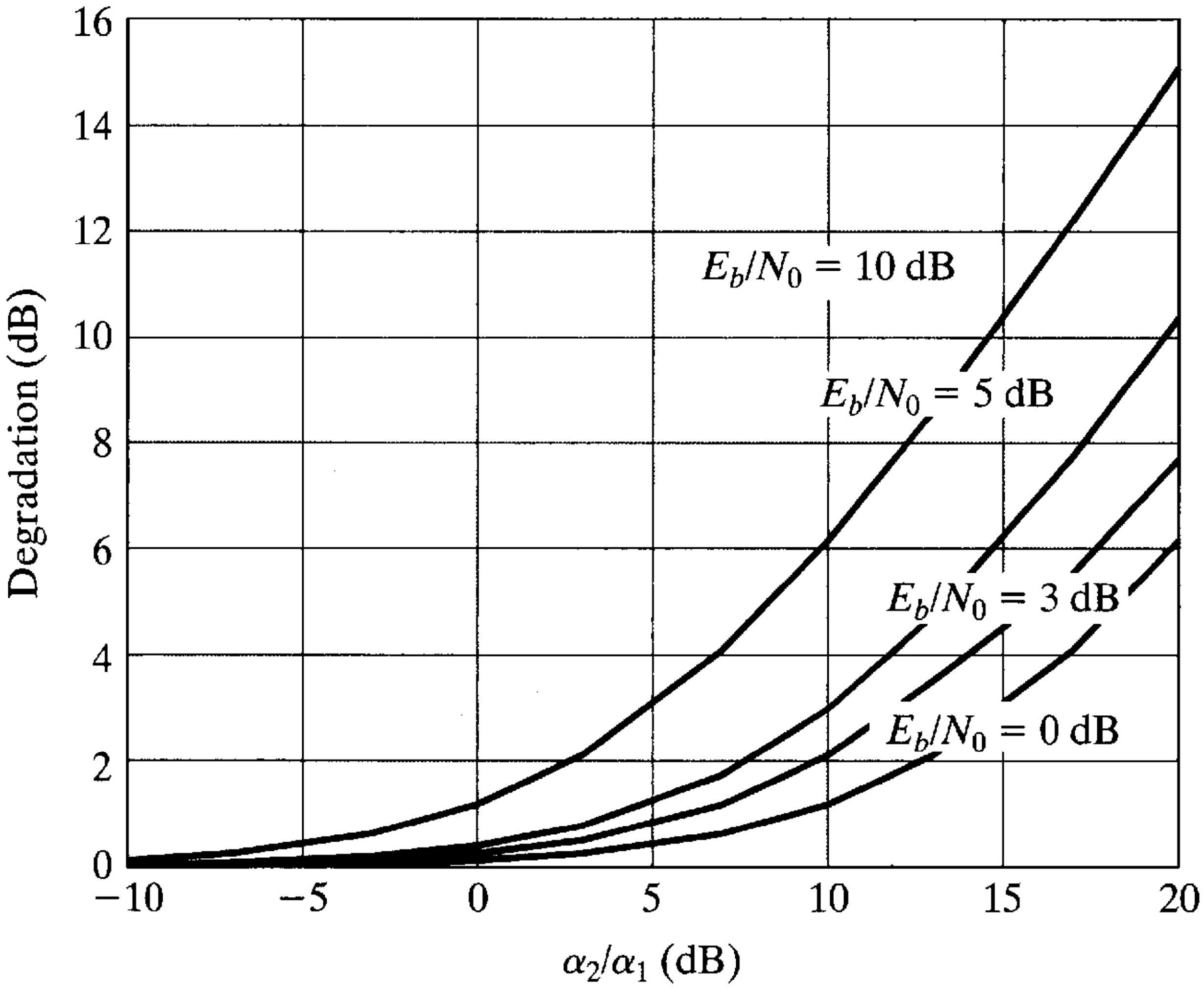
Degradation durch Vielfachzugriff (MAI)



Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

FIGURE 5.15 Performance degradation due to multiple-access interference (large Q).

Degradation des 1. Teilnehmers als Funktion der relativen Leistung



Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

FIGURE 5.22 Performance degradation of first of two users as a function of relative power and processing gain.

Kanal mit Mehrwegeausbreitung

Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

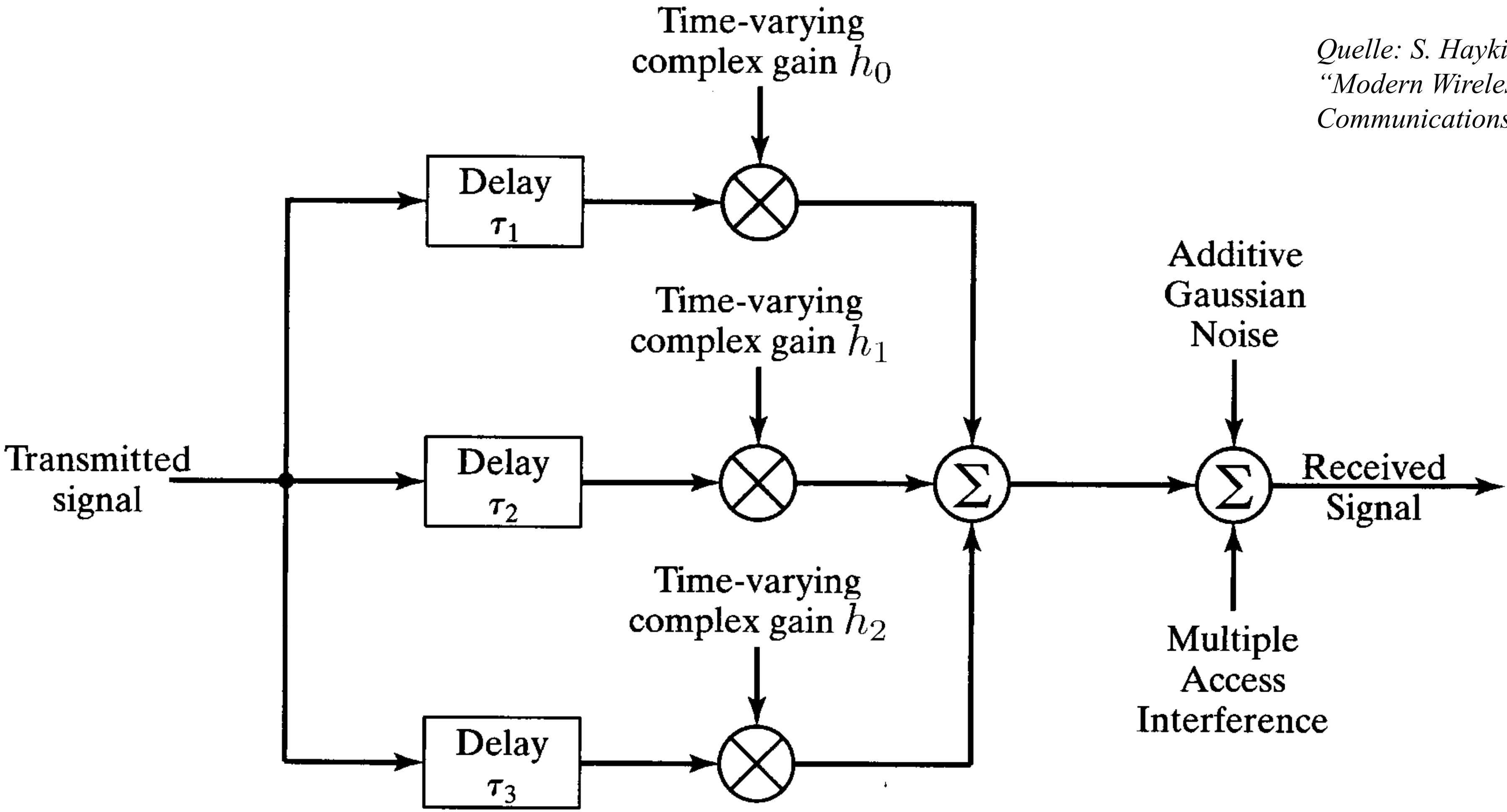


FIGURE 5.16 Multipath channel model.

RAKE Empfänger für CDMA Systeme mit Mehrwegeausbreitung

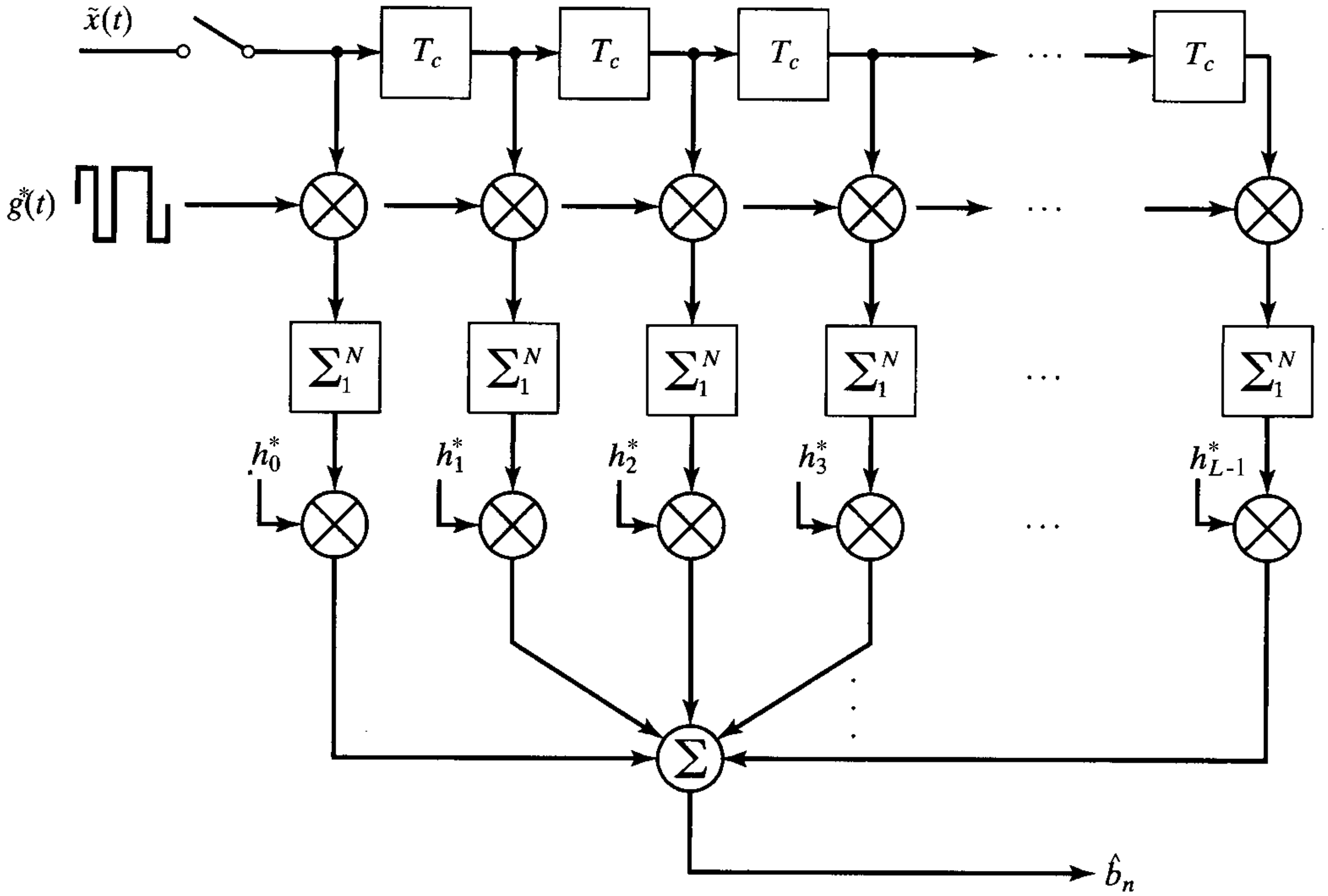
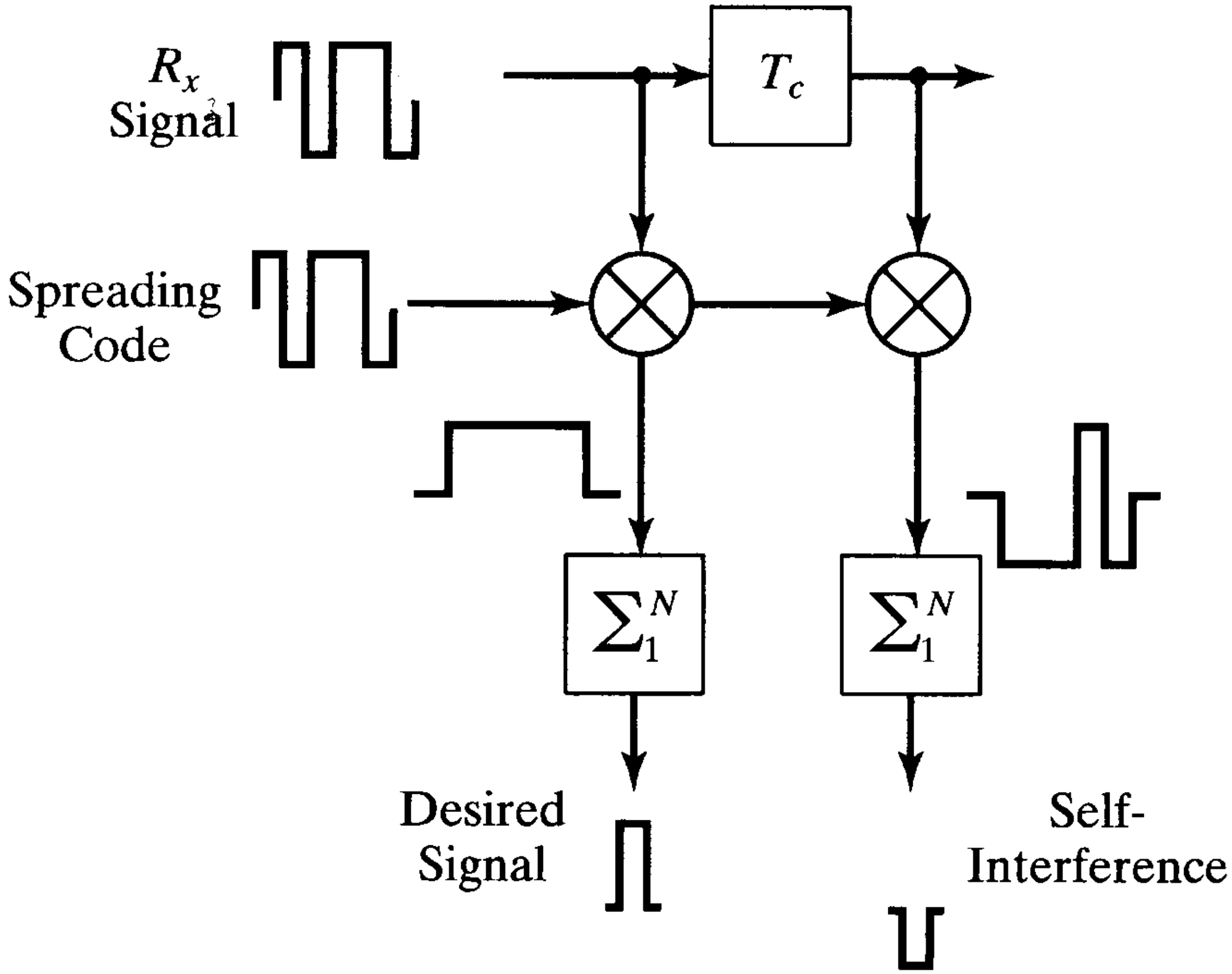


FIGURE 5.17 RAKE receiver for CDMA over multipath channels.

Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

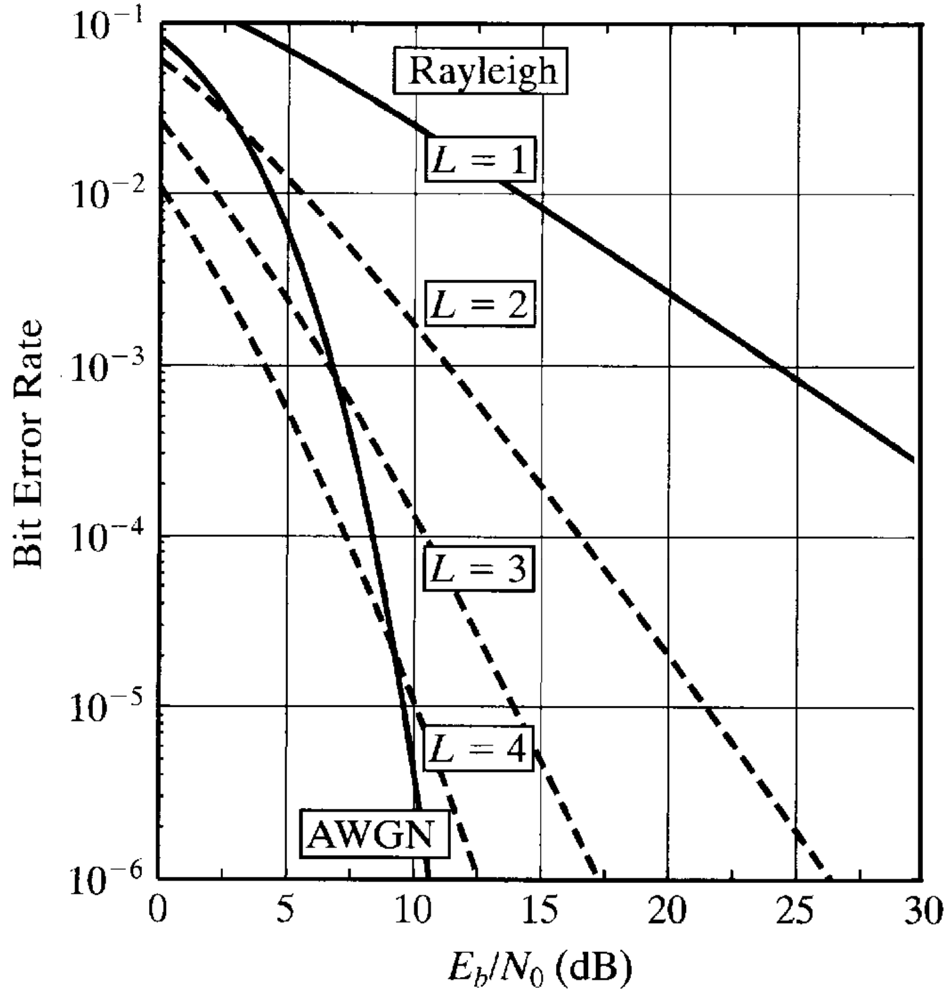
Selbstinterferenz durch Mehrwegeausbreitung



Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

FIGURE 5.18 Illustration of multipath cross-correlation noise.

AWGN Kanal bzw. Rayleigh Kanal mit unterschiedlichen Diversitätsordnungen *L*



Quelle: S. Haykin, M. Moher, "Modern Wireless Communications," 2005.

FIGURE 5.19 Comparison of performance in AWGN with that of Rayleigh fading with different diversity orders.