Counting Paths in Graphs

Dimitri Domnjuk

Lovász erkannte als einer der ersten den engen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Subgraphen $\#\mathrm{Sub}(H,G)$ und der Anzahl der Homomorphismen $\#\mathrm{Hom}(H,G)$. Radu Curticapean, Holger Dell und Dániel Marx formalisierten diese Erkenntnisse unter dem Namen der 'Graph Motif Parameter'. Des Weiteren zeigten sie, dass

$$\#\mathrm{Sub}(H,G) = \sum_{\rho} \frac{(-1)^{|V(H)|-|V(H_\rho)|} \cdot \prod_{B\in\rho}(|B|-1)!}{\#\mathrm{Aut}(H)} \cdot \#\mathrm{Hom}(H_\rho,G) \quad (1)$$

gilt [1]. Dabei summieren wir über alle Partitionen der Eckenmenge von H, sodass der zugehörige Quotientengraph H_ρ aus der Menge der homomorphen Bilder von H stammt.

Aus komplexitätstheoretischer Sicht ist das Zählen von Pfaden von besonderem Interesse. Es ist bekannt, dass Graphhomomorphismen von Pfaden in beliebigen Zielgraphen mit n Ecken in Polynomialzeit gezählt werden können. Im Gegensatz dazu ist die Anzahl der Kopien von Pfaden mit k Ecken nach aktueller Vermutung nicht einmal in $f(k) \cdot n^{\mathcal{O}(1)}$ lösbar [2].

In diesem Vortrag analysieren wir das Zählen von Pfaden mittels (1). Wir begründen die Problemschwere mithilfe des strukturellen Parameters der Baumweite und zeigen, dass Pfade, unter allen zusammenhängenden Graphen, die Anzahl der zu betrachtenden Quotientengraphen maximieren. Zudem befassen wir uns mit dem Entscheidungsproblem, Pfade in Graphen aufzufinden, und zeigen eine hinreichende Existenzbedingung für $P_k \subseteq G$.

References

[1] Radu Curticapean, Holger Dell, and Dániel Marx. Homomorphisms are a good basis for counting small subgraphs. In *Proceedings of the 49th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing*, STOC 2017, pages 210–223, New York, NY, USA, 2017. ACM.

[2] Jörg Flum and Martin Grohe. The Parameterized Complexity of Counting Problems. In *SIAM J. Comput.*, volume 33, number 4, pages 892–922, 2004.