TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 8

Abgabe bis zum 30. Mai um 11:00 Uhr vor der Übung bzw. im Briefkasten.

Definition. Seien Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache über Σ. Für $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ bezeichne L^n die Menge aller möglichen Verkettungen von n Wörtern aus L, d.h., $L^n = \{ w_1 w_2 \cdots w_n : w_1, \ldots, w_n \in L\}$, wobei $L^0 = \{\varepsilon\}$. Weiterhin seien

- $L^* := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L^n$ der *Kleene-Abschluss* von L, d.h., die Menge aller möglichen Verkettungen von einer beliebigen, endlichen Anzahl von Wörtern aus L und
- $L^+ := \bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} L^n$ die *positive Iteration* von L.

Insbesondere gilt $L^+ \subseteq L^*$ und $\varepsilon \in L^*$.

Aufgabe 1*

4 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Unter den folgenden 8 Sprachen über Σ befinden sich vier Paare gleicher Sprachen. Finden Sie heraus, welche Paare das sind und geben Sie jeweils eine kurze Begründung für die Gleichheit an.

$L_1 = \{w \in \Sigma^* : |w|_a \geq 1\}$
$L_2 = L_1^2$
$L_3 = \{ab\}^+$
$L_4 = \{b, c\}^*\{a\}\{a, b, c\}^*\{a\}\{b, c\}^*$
$L_5 = \{b, c\}^+$
$L_6 = \Sigma^+ \setminus L_5$
$L_7 = \{a\}\{ba\}^*\{b\}$
$L_8 = \big(\{b\}\{b, c\}^*\big) \cup \big(\{c\}\{b, c\}^*\big)$

Hinweis. Für $x \in \Sigma$ ist $|w|_x$ die Anzahl der Vorkommen von x in w, z.B. $|aaba|_a = 3$, $|aaba|_b = 1$ und $|aaba|_c = 0$.

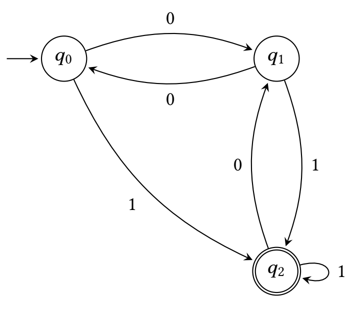
Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Menge der Wörter $w \in \{r, g\}^*$ mit wenigstens einem, aber nicht mehr als 3 Vorkommen des Buchstaben g regulär ist.

Aufgabe 3*

0+1+2+1 Punkte

Gegeben sei der folgende DFA $\mathcal{M}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$:



Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

(a) (Für diesen Aufgabenteil werden keine Bonuspunkte vergeben!)
Geben Sie je zwei Wörter an, die von $\mathcal{M}$ akzeptiert bzw. nicht akzeptiert werden.

(b) Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der von $\mathcal{M}$ akzeptierten Sprache $L(\mathcal{M})$ an.

(c) Geben Sie einen DFA mit weniger als drei Zuständen an, der die Sprache $L(\mathcal{M})$ akzeptiert.

(d) Geben Sie einen DFA an, der die Sprache $\Sigma^* \setminus L(\mathcal{M})$ akzeptiert.

Aufgabe 4* 2+2+3 Punkte

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ ein Alphabet. Im folgenden werden Sprachen $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ definiert. Konstruieren Sie für jedes $i \in \{1, 2, 3\}$ jeweils einen DFA, der die Sprache L_i akzeptiert. Überlegen Sie sich dafür zunächst, welche Informationen ein DFA speichern muss, um am Ende entscheiden zu können, ob ein Wort in L_i liegt.

(a) $L_1 \subseteq \Sigma^*$ ist die Menge der Binärdarstellungen der ganzen Zahlen ohne führende Nullen (z.B. gilt $0, 10 \in L_1$ und $010, 00, \varepsilon \notin L_1$).

(b) $L_2 \subseteq \Sigma^*$ ist die Menge der Wörter, die wenigstens eine 1 enthalten (z.B. gilt $01, 10 \in L_2$ und $\varepsilon, 0 \notin L_2$).

(c) $L_3 = L_1 \cap L_2$.

Zusatz. Geben Sie eine möglichst einfache Beschreibung der Sprache L_3 an.

Hinweis. Sie können die Kreuzprodukt-Konstruktion aus der Vorlesung anpassen, um einen DFA zu bestimmen, der den Schnitt der Sprachen L_1 und L_2 akzeptiert. Dabei bietet es sich an, die Finalzustände erst mit Bleistift zu markieren.

Aufgabe 5

Geben Sie einen Algorithmus an, der bei Eingabe eines DFAs $\mathcal{M}$ die Menge derjenigen Zustände von $\mathcal{M}$ ausgibt, die auf keinem akzeptierenden Pfad liegen[1].

[1]Ein Pfad heißt akzeptierend, falls er dem Berechnungspfad eines Wortes aus $L(\mathcal{M})$ entspricht.