TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
WS 2022/23

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automaten und formale Sprachen – Übung 1

Abgabe: bis Donnerstag, der 20. Oktober 2022, um 09:00 Uhr am Fachgebiet oder vor der Vorlesung.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Aufgabe 1

Das *Schubfachprinzip* besagt: Wenn n Objekte auf m Schubladen verteilt werden mit $n > m > 0$, dann gibt es eine Schublade, die mindestens zwei Objekte enthält.

(a) Zeigen Sie, dass es mindestens zwei Personen in Deutschland mit gleich vielen Kopfhaaren und jeweils mit mindestens einem Kopfhaar gibt.

Hinweis: Nutzen Sie allgemein bekannte Fakten.

(b) Zeigen Sie das *verschärfte Schubfachprinzip*: Verteilt man n Objekte auf m Schubladen mit $n > m > 0$, dann gibt es eine Schublade, die mindestens $\lceil \frac{n}{m} \rceil$ Objekte enthält.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ in jedem Binärbaum mit mindestens 2^n Blättern ein Pfad der Länge mindestens n von der Wurzel zu einem Blatt existiert.

Aufgabe 3

Geben Sie für jede der folgenden Mengen ein Alphabet an über welchem die Menge eine formale Sprache ist. Die Menge ...

(a) aller Namen der Städte Thüringens

(b) aller Gedichte von Goethe

(c) aller geraden Primzahlen echt größer 2

(d) der Binärdarstellungen der nat. Zahlen

(e) der Hexadezimaldarstellungen reeller Zahlen

Aufgabe 4

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Unter den folgenden 16 Sprachen über Σ befinden sich acht Paare gleicher Sprachen. Finden Sie heraus, welche Sprachen gleich sind und begründen Sie jeweils in maximal zwei Sätzen, warum die entsprechende Gleichheit gilt.

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\}$$
$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\}$$
$$L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 0\}$$
$$L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2\}$$
$$L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 4\}$$
$$L_6 = \{b, c\}^*\{a\}\{b, c\}^*\{a\}\{b, c\}^*$$
$$L_7 = \{a\}\{ba\}^*\{b\}$$
$$L_8 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_9 = L_2 \cap \{a\}^*\{b\}^*$$
$$L_{10} = L_2 \cap \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = |w|_c\}$$
$$L_{11} = (L_3 L_4)^2$$
$$L_{12} = \Sigma^* \setminus L_3$$
$$L_{13} = L_2^3$$
$$L_{14} = \{ab\}^+$$
$$L_{15} = \{b, c\}^*$$
$$L_{16} = \Sigma^*\{a\}\Sigma^*$$

Aufgabe 5* 3 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Konstruieren Sie die folgenden Sprachen aus den Sprachen $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ und Σ mithilfe der Operationen $\cup$, $\cap$, $\setminus$, $\cdot$ und $*$.

(a) $L_a = \{w \in \Sigma^* \mid (ab)^m c(ba)^n \text{ für } m, n \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_b = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 0 \text{ und } |w|_b \geq 1\}$

(c) $L_c = \{w \in \Sigma^* \mid ab \text{ ist kein Infix von } w\}$

Hinweis: : Für $x \in \Sigma$ und $w \in \Sigma^*$ bezeichnet $|w|_x$ die Anzahl der x in w.

Aufgabe 6* 4 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Unter den folgenden 16 Sprachen über Σ befinden sich acht Paare gleicher Sprachen. Finden Sie heraus, welche Sprachen gleich sind und zeigen Sie die entsprechende Gleichheit.

$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid \|w\|_a = \|w\|_b = \|w\|_c\}$	$L_9 = \Sigma^* \setminus L_{15}$
$L_2 = L_4^3$	$L_{10} = L_{12} \cap \{w \in \Sigma^* \mid \|w\|_a = \|w\|_c\}$
$L_3 = \{a, c\}^* \cup L_7^*$	$L_{11} = \Sigma^* \{a\} \Sigma^*$
$L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid \|w\|_b = 2\}$	$L_{12} = \{w \in \Sigma^* \mid \|w\|_a = \|w\|_b\}$
$L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid \|w\|_b \text{ gerade}\}$	$L_{13} = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$L_6 = L_1 \cap \{a\}^* \{b\}^* \{c\}^*$	$L_{14} = L_{12}^4$
$L_7 = \{a, c\}^* \{b\} \{a, c\}^* \{b\} \{a, c\}^*$	$L_{15} = \{w \in \Sigma^* \mid \|w\|_a = 0\}$
$L_8 = \{b, c\}^*$	$L_{16} = \{w \in \Sigma^* \mid \|w\|_b = 6\}$

Aufgabe 7* 3+2+2 Punkte

Nachfolgend sei $\Sigma = \{a, b\}$.

(a) Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Zeigen Sie, dass $L^* = (L^*)^2$ gilt. Gilt auch $L^* = (L^2)^*$?

(b) Geben Sie für alle $n \geq 1$ eine Sprache $K_n \subseteq \Sigma^*$ mit genau n Elementen an, sodass $(K_n)^2$ möglichst wenige Worte enthält. Begründen Sie Ihre Wahl!

(c) Geben Sie für alle $n \geq 1$ eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ mit genau n Elementen an, sodass $(L_n)^2$ möglichst viele Worte enthält. Begründen Sie Ihre Wahl!