TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
WS 2022/2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automaten und formale Sprachen – Übung 7

Abgabe: bis Freitag, der 20. Januar 2023, um 11:00 Uhr am Fachgebiet oder vor der Übung.

Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Aufgabe 1* — 3 Punkte

Betrachten Sie die Grammatik G mit Startvariable S und den unten angegebenen Produktionen.

$$S \to ABa \mid BA \qquad A \to CB \mid a \qquad B \to bBC \mid C \mid b \qquad C \to Cc \mid \varepsilon$$

Verwenden Sie die in der Vorlesung angegebene Konstruktion, um G in eine kontextsensitive Grammatik G' mit $L(G') = L(G)$ umzuwandeln.

Aufgabe 2* — 3 Punkte

Sei G die Grammatik mit Startvariable A_1 und den folgenden Produktionen:

$$A_1 \to a \mid A_2A_1 \qquad A_2 \to b \mid A_1A_2$$

Konstruieren Sie mittels des Verfahrens aus der Vorlesung eine Grammatik G' in Greibach-Normalform mit $L(G') = L(G)$.

Aufgabe 3* — 4 Punkte

Wir betrachten arithmetische Ausdrücke in Postfixnotation über den Konstanten 0,1,2 und mit den Operatoren + (Addition) und $\cdot$ (Multiplikation). Hierbei werden zuerst die Operanden und dann der Operator notiert. Zum Beispiel entspricht 12+ dem Ausdruck $(1+2)$ und 012++2$\cdot$ entspricht $((0+(1+2))\cdot 2)$. Geben Sie einen Kellerautomaten an, der genau die arithmetischen Ausdrücke in Postfixnotation akzeptiert, die modulo 3 zu 0 ausgewertet werden.

Hinweis: Es gibt so einen Kellerautomaten mit Kelleralphabet $\Gamma = \{\#, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$.

Aufgabe 4* — 5 Punkte

Sei $1 \leq k \in \mathbb{N}$. Ein *k-PDA* $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#)$ ist ein PDA mit der Eigenschaft, dass der Keller höchstens k Elemente aufnehmen kann. Eine Konfiguration ist also ein Tripel $c \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^{\leq k}$ und die Konfigurationsüberführung ist wie folgt definiert: Zunächst wird die Transition wie in den klassischen PDAs ausgeführt und im Falle eines Kellerüberlaufs wird anschließend der Inhalt auf die obersten k Symbole gekürzt.

Seien $\gamma \in \Gamma^*$, $A, B_1, \ldots, B_\ell \in \Gamma$, $w, w' \in \Sigma^*$ und $z, z' \in Z$. Formal schreiben wir $(z, w, A\gamma) \vdash_k (z', w', \gamma')$ für zwei Konfigurationen des k-PDAs M, falls es ein $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ gibt mit $w = aw'$, $(z', B_1 \ldots B_\ell) \in \delta(z, a, A)$ und γ' sind die obersten k Buchstaben von $B_1 \ldots B_\ell\gamma$. Wir definieren $\vdash_k^*$ als die reflexive und transitive Hülle von $\vdash_k$. Die von einem k-PDA akzeptierte Sprache ist $L(M) = \{x \in \Sigma^* \mid \text{es gibt } z \in Z \text{ mit } (z_0, x, \#) \vdash_k^* (z, \varepsilon, \varepsilon)\}$.

Beweisen Sie, dass die von einem k-PDA M akzeptierte Sprache $L(M)$ regulär ist.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Entscheiden Sie für jede der folgenden Sprachen, ob sie kontextfrei ist. Geben Sie einen entsprechenden Beweis an, falls eine Sprache nicht kontextfrei ist.

(a) $L_a = \{a^k b^m a^{k+m} \mid k, m \in \mathbb{N}\}$

(b) $L_b = \{a^k b^m a^{k \cdot m} \mid k, m \in \mathbb{N}\}$