# Automaten und Formale Sprachen
# 12. Vorlesung

Prof. Dr. Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2022/23

# Von Grammatiken zu PDAs

## Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform. Konstruiere den PDA $M_G = (Z, \Sigma, \Gamma, \iota, \delta, \#)$:

- $Z = \{\iota\}$ . . . es gibt nur einen Zustand
- $\Gamma = V$ . . . die Nichtterminale der Grammatik bilden das Kelleralphabet
- $\delta(\iota, a, A) = \{(\iota, B_1 \dots B_k) \mid (A \to aB_1 \dots B_k) \in P\}$ für $a \in \Sigma$, $A \in V$

  $\delta(\iota, \varepsilon, A) = \emptyset$ für $A \in V$ . . . es gibt keine $\varepsilon$-Transitionen
- $\# = S$ . . . das Kellerinitialisierungssymbol ist das Startsymbol der Grammatik

## Ziel

$L(M_G) = L(G)$

**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

| Linksableitung | PDA-Berechnung |
|---|---|
| $S \quad \Rightarrow_G \quad 0SE$ | $(\iota, 001011, S) \quad \vdash \quad (\iota, 01011, SE)$ |

$(S \to 0SE) \in P$, also $(\iota, SE) \in \delta(\iota, 0, S)$

**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

| Linksableitung | | | PDA-Berechnung | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | $\Rightarrow_G$ | $0SE$ | $(\iota, 001011, S)$ | $\vdash$ | $(\iota, 01011, SE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $00ESE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 1011, ESE)$ |

$(S \rightarrow 0ES) \in P$, also $(\iota, ES) \in \delta(\iota, 0, S)$

**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

| Linksableitung | | | PDA-Berechnung | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | $\Rightarrow_G$ | $0SE$ | $(\iota, 001011, S)$ | $\vdash$ | $(\iota, 01011, SE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $00ESE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 1011, ESE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $001SE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 011, SE)$ |

$(E \to 1) \in P$, also $(\iota, \varepsilon) \in \delta(\iota, 1, E)$

**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

| Linksableitung | | | PDA-Berechnung | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | $\Rightarrow_G$ | $0SE$ | $(\iota, 001011, S)$ | $\vdash$ | $(\iota, 01011, SE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $00ESE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 1011, ESE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $001SE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 011, SE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $0010EE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 11, EE)$ |

$(S \to 0E) \in P$, also $(\iota, E) \in \delta(\iota, 0, S)$

**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

| Linksableitung | | | PDA-Berechnung | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | $\Rightarrow_G$ | $0SE$ | $(\iota, 001011, S)$ | $\vdash$ | $(\iota, 01011, SE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $00ESE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 1011, ESE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $001SE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 011, SE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $0010EE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 11, EE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $00101E$ | | $\vdash$ | $(\iota, 1, E)$ |

$(E \to 1) \in P$, also $(\iota, \varepsilon) \in \delta(\iota, 1, E)$

**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

| Linksableitung | | | PDA-Berechnung | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $S$ | $\Rightarrow_G$ | $0SE$ | $(\iota, 001011, S)$ | $\vdash$ | $(\iota, 01011, SE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $00ESE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 1011, ESE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $001SE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 011, SE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $0010EE$ | | $\vdash$ | $(\iota, 11, EE)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $00101E$ | | $\vdash$ | $(\iota, 1, E)$ |
| | $\Rightarrow_G$ | $001011$ | | $\vdash$ | $(\iota, \varepsilon, \varepsilon)$ |

$(E \to 1) \in P$, also $(\iota, \varepsilon) \in \delta(\iota, 1, E)$

## Lemma

$L(G) \subseteq L(M_G)$.

**Beweis:**

Sei $w \in L(G)$. Dann hat $w$ eine Linksableitung

$$S = \alpha_0 \Rightarrow_G \alpha_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G \alpha_t = w\,.$$

Da $G$ in Greibach-Normalform ist, haben alle Regeln die Form $A \to aB_1 \cdots B_k$. Also existieren $a_1, a_2, \ldots, a_t \in \Sigma$ und $\gamma_0, \ldots, \gamma_t \in V^*$ mit

$$\alpha_i = a_1 a_2 \cdots a_i \, \gamma_i \text{ für alle } 0 \leq i \leq t\,.$$

Insbesondere gelten also $S = \alpha_0 = \varepsilon\,\gamma_0$ und $a_1 \cdots a_t\,\gamma_t = \alpha_t = w \in \Sigma^*$, also $\gamma_0 = S$, $w = a_1 \cdots a_t$ und $\gamma_t = \varepsilon$.

Behauptung: Für alle $0 \leq i < t$ gilt

$$(\iota, a_{i+1} \cdots a_t, \gamma_i) \vdash (\iota, a_{i+2} \cdots a_t, \gamma_{i+1}) \,.$$

Beweis der Behauptung:

$$a_1 \cdots a_i \, \gamma_i = \alpha_i \Longrightarrow_G \alpha_{i+1} = a_1 \cdots a_{i+1} \, \gamma_{i+1}$$

ist Schritt in einer Linksableitung. Also existieren $(A \to a_{i+1} B_1 \cdots B_k) \in P$ und $\eta_i \in V^*$ mit $\gamma_i = A\eta_i$ und $\gamma_{i+1} = B_1 \cdots B_k \eta_i$. Also gilt $(\iota, B_1 \cdots B_k) \in \delta(\iota, a_{i+1}, A)$ und damit

$$\begin{array}{rcl}
(\iota, a_{i+1} \cdots a_t, \gamma_i) & = & (\iota, a_{i+1} \cdots a_t, A\eta_i) \\
& \vdash & (\iota, a_{i+2} \cdots a_t, B_1 \cdots B_k \eta_i) \\
& = & (\iota, a_{i+2} \cdots a_t, \gamma_{i+1}) \,.
\end{array}$$

**q.e.d.**

Da die Behauptung für alle $0 \le i < t$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
(\iota, w, S) &= (\iota, a_1 \ldots a_t, \gamma_0) \text{ nach Folie 12.4 unten} \\
&\vdash (\iota, a_2 \ldots a_t, \gamma_1) \\
&\vdash (\iota, a_3 \ldots a_t, \gamma_2) \\
&\vdots \\
&\vdash (\iota, \varepsilon, \gamma_t) \\
&= (\iota, \varepsilon, \varepsilon) \text{ nach Folie 12.4 unten}
\end{aligned}$$

und damit $w \in L(M_G)$. □

## Lemma

$L(M_G) \subseteq L(G)$.

**Beweis:**

Sei $w \in L(M_G)$. Dann existieren $t \in \mathbb{N}$ und Konfigurationen $(\iota, w_i, \gamma_i)$ für $0 \leq i \leq t$, so daß

- $(\iota, w_0, \gamma_0) = (\iota, w, S)$,
- $(\iota, w_i, \gamma_i) \vdash (\iota, w_{i+1}, \gamma_{i+1})$ für alle $0 \leq i < t$ und
- $(\iota, w_t, \gamma_t) = (\iota, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da der PDA $M_G$ keine $\varepsilon$-Transitionen hat, existieren Buchstaben $a_1, \dots, a_t \in \Sigma$ mit $w_i = a_{i+1} w_{i+1}$, also insbesondere $w = w_0 = a_1 a_2 \cdots a_t$.

Behauptung: Für alle $0 \leq i < t$ gilt

$$a_1 a_2 \cdots a_i \gamma_i \Rightarrow_G a_1 a_2 \cdots a_{i+1} \gamma_{i+1} .$$

Beweis der Behauptung:
Es gilt

$$(\iota, a_{i+1} w_{i+1}, \gamma_i) = (\iota, w_i, \gamma_i) \vdash (\iota, w_{i+1}, \gamma_{i+1}) .$$

Also existieren $\eta_i \in V^*$ und $A, B_1, \ldots, B_k \in V$ mit

$$\gamma_i = A\eta_i \,, \; (\iota, B_1 \cdots B_k) \in \delta(\iota, a_{i+1}, A) \text{ und } \gamma_{i+1} = B_1 \cdots B_k \eta_i \,.$$

Damit haben wir aber $(A \to a_{i+1} B_1 \cdots B_k) \in P$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_i \gamma_i \quad &= \quad a_1 \cdots a_i \, A\eta_i \\ &\Rightarrow_G \quad a_1 \cdots a_i \, a_{i+1} B_1 \cdots B_k \eta_i \\ &= \quad a_1 \cdots a_{i+1} \gamma_{i+1} \end{aligned}$$

**q.e.d.**

Da die Behauptung für alle $0 \leq i < t$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
S &= \gamma_0 \text{ nach Folie 12.7} \\
&\Rightarrow_G a_1\gamma_1 \\
&\Rightarrow_G a_1 a_2 \gamma_2 \\
&\ \ \vdots \\
&\Rightarrow_G a_1 \ldots a_t \gamma_t \\
&= w \text{ nach Folie 12.7}
\end{aligned}$$

und damit $w \in L(G)$ $\square$

## Proposition

Jede kontextfreie Sprache $L$ ist Sprache eines PDA $M$ mit nur einem Zustand. Gilt $\varepsilon \notin L$, so werden keine $\varepsilon$-Transitionen benötigt.

**Beweis:**

Sei $L$ kontextfrei. Dann existiert eine Grammatik $G = (V, \Sigma, S, P)$ in Greibach-Normalform mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$. Nach den beiden gezeigten Lemmata existiert ein PDA $M$ mit einem Zustand, ohne $\varepsilon$-Transitionen und mit $L(M) = L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$. Gilt $\varepsilon \notin L$, so ist Proposition bewiesen.

Angenommen, $\varepsilon \in L$.
Wir können o.E. annehmen, daß $S$ auf keiner rechten Seite einer Regel aus $G$ vorkommt. Dann wird der Kellerautomat $M_G$ das Kellerinitialisierungssymbol $S$ im ersten Schritt auf dem Keller ersetzen und niemals wieder auf den Keller schreiben. Fügt man die Transition $\delta(\iota, \varepsilon, S) = \{(\iota, \varepsilon)\}$ zu $M_G$ hinzu, so erhält man einen PDA $M'_G$ mit $L(M'_G) = L(M_G) \cup \{\varepsilon\} = L(G) \cup \{\varepsilon\} = L \setminus \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} = L$. $\square$

**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

| PDA-Berechnung | Ableitungsbaum |
| --- | --- |
| $(\iota, 001011, S)$ | $S$ |

**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

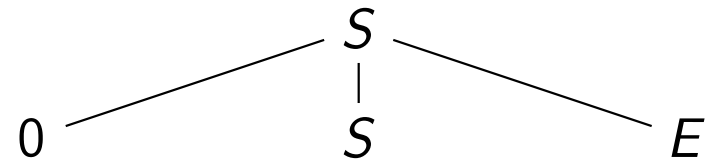
$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

PDA-Berechnung

$(\iota, 001011, S)$

$\vdash (\iota, 01011, SE)$

Ableitungsbaum




$(S \to 0SE) \in P$

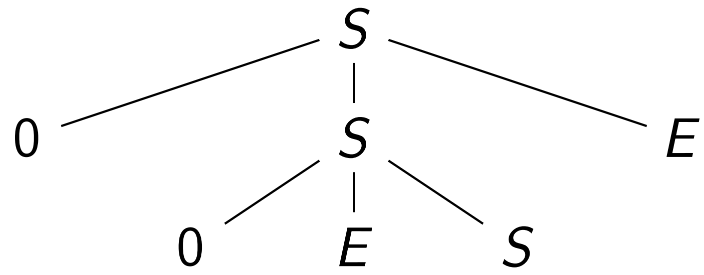
**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

PDA-Berechnung

$$\begin{aligned}
&(\iota, 001011, S)\\
&\qquad \vdash (\iota, 01011, SE)\\
&\qquad \vdash (\iota, 1011, ESE)
\end{aligned}$$

Ableitungsbaum




$(S \to 0ES) \in P$

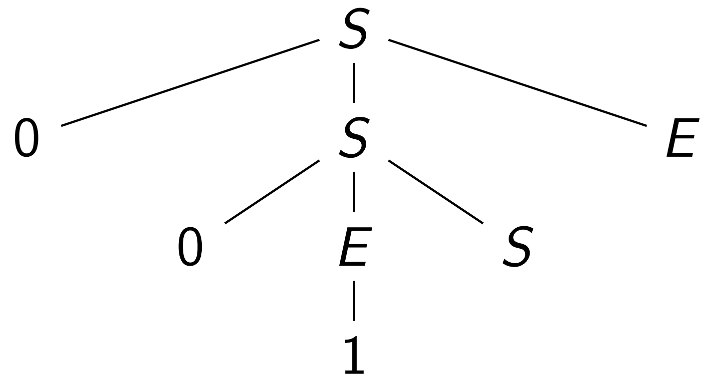
**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

PDA-Berechnung

$$\begin{aligned}
&(\iota, 001011, S)\\
&\quad \vdash (\iota, 01011, SE)\\
&\quad \vdash (\iota, 1011, ESE)\\
&\quad \vdash (\iota, 011, SE)
\end{aligned}$$

Ableitungsbaum




$(E \to 1) \in P$

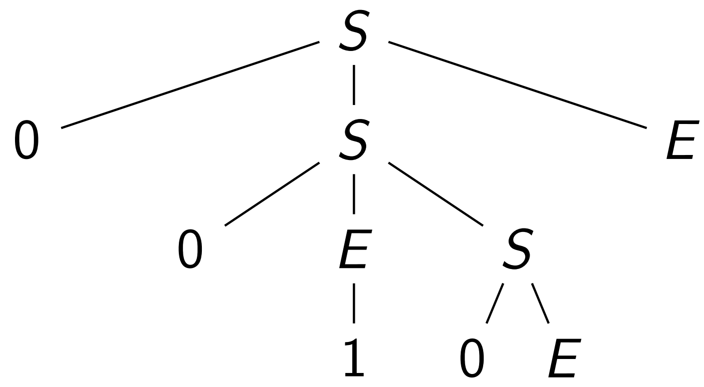
**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

<u>PDA-Berechnung</u>

$$
\begin{aligned}
&(\iota, 001011, S)\\
&\quad \vdash (\iota, 01011, SE)\\
&\quad \vdash (\iota, 1011, ESE)\\
&\quad \vdash (\iota, 011, SE)\\
&\quad \vdash (\iota, 11, EE)
\end{aligned}
$$

<u>Ableitungsbaum</u>




$(S \to 0E) \in P$

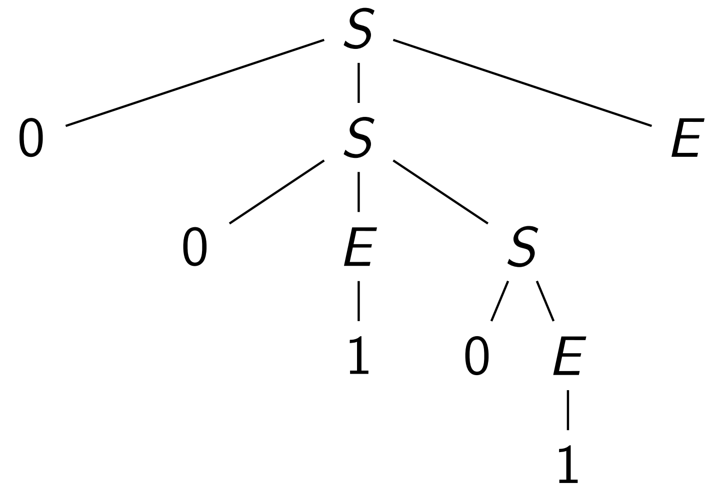
**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

PDA-Berechnung

$$\begin{aligned}
&(\iota, 001011, S) \\
&\qquad \vdash (\iota, 01011, SE) \\
&\qquad \vdash (\iota, 1011, ESE) \\
&\qquad \vdash (\iota, 011, SE) \\
&\qquad \vdash (\iota, 11, EE) \\
&\qquad \vdash (\iota, 1, E)
\end{aligned}$$

Ableitungsbaum



$(E \to 1) \in P$

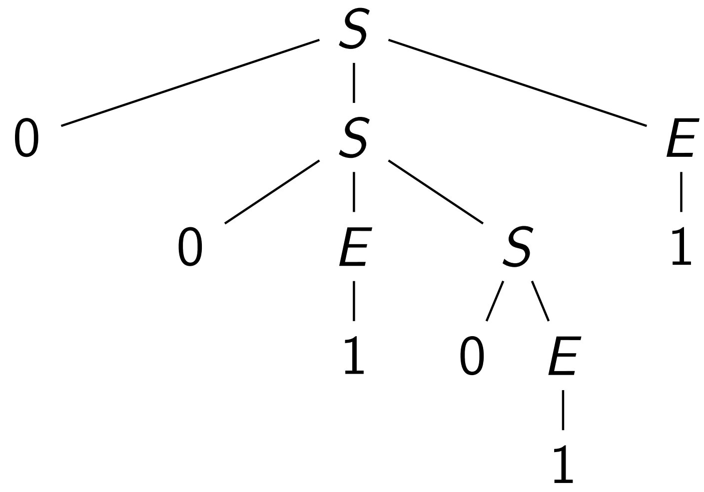
**Beispiel:** $G$ hat die Regeln

$$S \to 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \to 1$$

PDA-Berechnung

$$
\begin{aligned}
&(\iota, 001011, S) \\
&\quad \vdash (\iota, 01011, SE) \\
&\quad \vdash (\iota, 1011, ESE) \\
&\quad \vdash (\iota, 011, SE) \\
&\quad \vdash (\iota, 11, EE) \\
&\quad \vdash (\iota, 1, E) \\
&\quad \vdash (\iota, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

Ableitungsbaum




$(E \to 1) \in P$

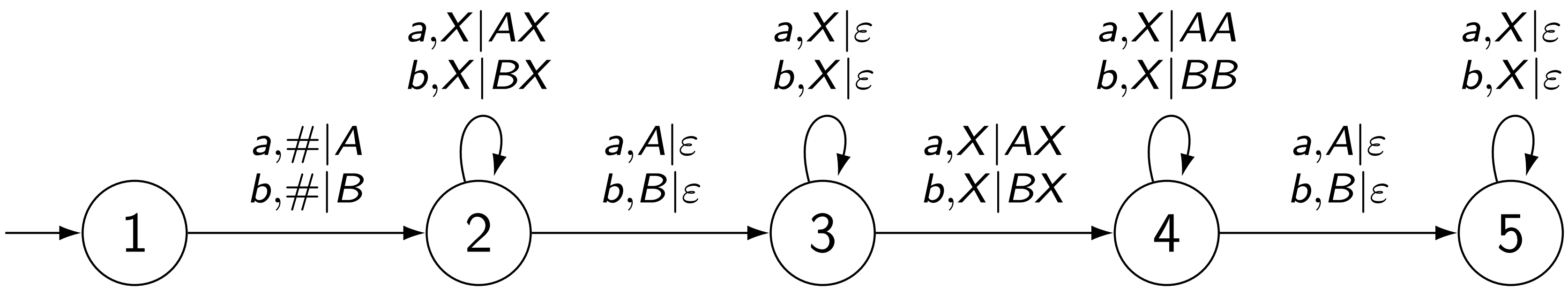
## Bemerkungen:

- vorgestellte Methode heißt LL-Parsing: Berechnungen des PDA entsprechen Linksableitungen und Wort wird von links nach rechts gelesen
  oder Top-Down-Parsing: Ableitungsbaum wird an der Wurzel beginnend erzeugt.
- Aus Grammatik-Regeln $A \to aU \mid aV$ entsteht der Nichtdeterminismus $(\iota, U), (\iota, V) \in \delta(\iota, a, A)$. LL(1)-Grammatiken enthalten keine solche Regeln, so daß $M_G$ deterministisch wird - und erlauben, die Frage „Wird das Wort $w$ von der Grammatik $G$ erzeugt?“ in linearer Zeit zu beantworten.
- allgemeiner: in LL(k)-Grammatiken legen die nächsten $k$ zu lesenden Buchstaben fest, welche Regel angewandt wird - auch dann kann man deterministischen PDAs konstruieren.
- LR-Parsing oder Bottom-Up-Parsing sind alternative Methoden, einen PDA aus einer kontextfreien Grammatik zu konstruieren, auch LR(k)-Grammatiken führen zu deterministischen PDAs.

# Von PDAs zu Grammatiken

**Beispiel:**

PDA $M$:




eine akzeptierende Berechnung:

$$
\begin{aligned}
(1, aabbabbbaa, \#) \;&\vdash (2, abbabbbaa, A) && \vdash (2, bbabbbaa, AA) \\
&\vdash (2, babbbaa, BAA) && \vdash (3, abbbaa, AA) \\
&\vdash (4, bbbaa, AAA) && \vdash (4, bbaa, BBAA) \\
&\vdash (5, baa, BAA) && \vdash (5, aa, AA) \\
&\vdash (5, a, A) && \vdash (5, \varepsilon, \varepsilon)
\end{aligned}
$$

die akzeptierende Berechnung nochmal anders hingeschrieben:

$a \quad a \quad b \quad b \quad a \quad b \quad b \quad b \quad a \quad a$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | ${}_4B_5$ | | | | |
| | | | ${}_2B_3$ | | ${}_4A_5$ | ${}_5B_5$ | ${}_5B_5$ | | | |
| | | ${}_2A_5$ | ${}_3A_5$ | ${}_3A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | | |
| ${}_1\#_5$ | ${}_2A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | ${}_5A_5$ | |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 |

Bedeutung von $\boxed{{}_iX_j}$:

- $X$ ... Kellersymbol
- $i$ ... dieses Symbol wird im Zustand $i$ ersetzt werden
- $j$ ... sobald der Keller das erste Mal echt kürzer sein wird, befindet der PDA sich im Zustand $j$

# Ableitung der Grammatik:

$$
\begin{aligned}
S &\Rightarrow \boxed{{}_1\#_5} \\
&\Rightarrow a\,\boxed{{}_2A_5} \\
&\Rightarrow aa\,\boxed{{}_2A_5}\,\boxed{{}_5A_5} \\
&\Rightarrow aab\,\boxed{{}_2B_3}\,\boxed{{}_3A_5}\,\boxed{{}_5A_5} \\
&\Rightarrow aabb\,\boxed{{}_3A_5}\,\boxed{{}_5A_5} \\
&\Rightarrow aabba\,\boxed{{}_4A_5}\,\boxed{{}_5A_5}\,\boxed{{}_5A_5} \\
&\Rightarrow aabbab\,\boxed{{}_4B_5}\,\boxed{{}_5B_5}\,\boxed{{}_5A_5}\,\boxed{{}_5A_5} \\
&\Rightarrow aabbabb\,\boxed{{}_5B_5}\,\boxed{{}_5A_5}\,\boxed{{}_5A_5} \\
&\Rightarrow aabbabbb\,\boxed{{}_5A_5}\,\boxed{{}_5A_5} \\
&\Rightarrow aabbabbba\,\boxed{{}_5A_5} \\
&\Rightarrow aabbabbbaa
\end{aligned}
$$

### Ziel / Idee

kontextfreie Grammatik $G$, so daß für alle $w \in \Sigma^*$:

$$(i, w, A) \vdash^* (j, \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw. } \boxed{{}_iA_j} \Rightarrow^*_G w$$

## Konstruktion („Tripel-Konstruktion“)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \#)$ ein PDA. Konstruiere die kontextfreie Grammatik $G_M = (V, \Sigma, P, S)$:

- $V = \{S\} \cup (Z \times \Gamma \times Z)$
- Wir haben die folgenden Produktionen:
  - $S \to (\iota, \#, z)$ für alle $z \in Z$
  - $(z, A, z_k) \to a\,(z_0, B_1, z_1)\,(z_1, B_2, z_2)\,\ldots\,(z_{k-1}, B_k, z_k)$ für alle $z, z_0, z_1, \ldots, z_k \in Z$, $A \in \Gamma$ und $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ mit $(z_0, B_1 B_2 \ldots B_k) \in \delta(z, a, A)$

Insbesondere wird aus der Transition $(z_0, \varepsilon) \in \delta(z, a, A)$ wegen $k = 0$ und damit $z_k = z_0$ die Produktion

$$(z, A, z_0) \to a$$

Für jede Transition $(z_0, B_1 B_2 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ und alle Zustände $z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k$ bilde die folgende Regel der Grammatik:

$$(z, A, z_k) \rightarrow a\,(z_0, B_1, z_1)\,(z_1, B_2, z_2)\,(z_2, B_3, z_3)\,\cdots\,(z_{k-1}, B_k, z_k)$$

1. Schreibe die Transition als Muster der Regel auf.
2. Schließe die Lücken vor den Nichtterminalen $B_2$ bis $B_k$ durch beliebige Zustände $z_1$ bis $z_{k-1}$ und die Lücke hinter $A$ durch beliebigen Zustand $z_k$.
3. Schließe die Lücken hinter $B_1$ bis $B_{k-1}$ durch die folgenden Zustände $z_1$ bis $z_{k-1}$ und die Lücke hinter $B_k$ durch den Zustand $z_k$.

## Lemma

Für alle $z_0, z_1, z_2, z_3, \ldots, z_\ell \in Z$, $B_1, B_2, \ldots, B_\ell \in \Gamma$ und $w \in \Sigma^*$ mit

$$(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \implies_G^* w$$

gilt

$$(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_\ell) \vdash^* (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)\,.$$

**Beweis:** per Induktion über die Länge $n$ der Ableitung.

**IA** $n = 0$: Dann gilt

$$(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) = w\,,$$

also $\ell = 0$ und $w = \varepsilon$ und damit

$$(z_0, w, B_1 \cdots B_\ell) = (z_0, \varepsilon, \varepsilon) = (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)\,.$$

**IS** Gelte $(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2)\cdots(z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \Longrightarrow_G^{n+1} w$.
Wir betrachten eine Linksableitung der Länge $n+1$. Aufgrund der Gestalt der Produktionen der Grammatik $G_M$ hat diese die Form

$$\begin{aligned}
& (z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2)\cdots(z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \\
\Longrightarrow_G \quad & a(z_0', C_1, z_1')(z_1', C_2, z_2')\cdots(z_{k-1}', C_k, z_1)\,(z_1, B_2, z_2)\cdots(z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \\
\Longrightarrow_G^n \quad & w\,.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $(z_0, B_1, z_1) \to a(z_0', C_1, z_1')(z_1', C_2, z_2')\cdots(z_{k-1}', C_k, z_1)$ eine Produktion, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $w = aw'$ für ein Wort $w' \in \Sigma^*$.
Nach Konstruktion der Grammatik $G_M$ erhalten wir

$$(z_0', C_1 C_2 \cdots C_k) \in \delta(z_0, a, B_1)\,,$$

also

$$(z_0, aw', B_1 \cdots B_\ell) \vdash (z_0', w', C_1 \cdots C_k\, B_2 \cdots B_\ell)\,.$$

Wir haben auch

$$(z_0', C_1, z_1') \cdots (z_{k-1}', C_k, z_1)\,(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \Longrightarrow_G^n w'\,.$$

Nach der IV folgt

$$(z_0', w', C_1 C_2 \cdots C_k\, B_2 B_3 \cdots B_\ell) \vdash^* (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)\,.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}(z_0, w, B_1 \cdots B_\ell) &= (z_0, aw', B_1 \cdots B_\ell) \\ &\vdash (z_0', w', C_1 \cdots C_k\, B_2 \cdots B_\ell) \\ &\vdash^* (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)\,.\end{aligned}$$

$\square$

## Lemma

Für alle $z_0, z_\ell \in Z$, $B_1, B_2, \ldots, B_\ell \in \Gamma$ und $w \in \Sigma^*$ mit

$$(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_\ell) \vdash^* (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)$$

existieren Zustände $z_1, z_2, \ldots, z_{\ell-1}$ mit

$$(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \implies_G^* w$$

**Beweis:** per Induktion über die Länge $n$ der Berechnung.

**IA** $n = 0$: Dann gelten $(z_0, w, B_1 \cdots B_\ell) = (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)$, also

$$(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) = \varepsilon \implies_G^* \varepsilon = w$$

**IS** Gelte $(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_\ell) \vdash^{n+1} (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)$.
Dann existiert eine Konfiguration $(z_0', w', C_1 C_2 \cdots C_k)$ mit

$$(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_\ell) \vdash (z_0', w', C_1 C_2 \cdots C_k\, B_2 B_3 \cdots B_\ell) \vdash^n (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)\,.$$

Nach IV existieren Zustände $z'_1, z'_2, \ldots, z'_{k-1}, z_1, z_2, \ldots, z_{\ell-1}$ mit

$(z'_0, C_1, z'_1)(z'_1, C_2, z'_2) \cdots (z'_{\ell-1}, C_\ell, z_1)\,(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \implies^*_G w'$

Wegen

$$(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_\ell) \vdash (z'_0, w', C_1 C_2 \cdots C_k\, B_2 B_3 \cdots B_\ell)$$

existiert $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ mit $(z'_0, C_1 \cdots C_k) \in \delta(z_0, a, B_1)$ und $w = aw'$.
Nach Konstruktion der Grammatik $G_M$ erhalten wir die Produktion

$$(z_0, B_1, z_1) \to a(z'_0, C_1, z'_1)(z'_1, C_2, z'_2) \cdots (z'_{\ell-1}, C_\ell, z_1)\,.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & (z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \\ \implies_G \quad & a(z'_0, C_1, z'_1)(z'_1, C_2, z'_2) \cdots (z'_{\ell-1}, C_\ell, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \\ \implies^*_G \quad & aw' = w\,. \end{aligned}$$

$\square$

## Proposition

Ist $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \#)$ ein PDA, so ist $L(M)$ kontextfrei.

**Beweis:** Wir zeigen zunächst $L(M) \subseteq L(G_M)$: Sei $w \in L(M)$. Dann existiert $z' \in Z$ mit $(\iota, w, \#) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$. Wir erhalten

$$\begin{array}{lll} S & \Longrightarrow_{G_M} (\iota, \#, z') & \text{(nach Konstruktion von } G_M\text{)} \\ & \Longrightarrow^*_{G_M} w & \text{(nach Lemma auf Folie 12.19).} \end{array}$$

Also gilt $w \in L(G_M)$, d.h. $L(M) \subseteq L(G_M)$.

Wir zeigen jetzt $L(M) \supseteq L(G_M)$: Sei $w \in L(G_M)$. Dann existiert $z' \in Z$ mit $S \implies (\iota, \#, z') \implies^* w$. Aus dem Lemma auf Folie 12.22 folgt $(\iota, w, \#) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ und damit $w \in L(M)$. $\square$

## Satz

Sei $L$ eine Sprache. Dann sind äquivalent:

1. $L$ ist kontextfrei.
2. Es gibt einen PDA $M$ mit $L(M) = L$.
3. Es gibt einen PDA $M$ mit nur einem Zustand und $L(M) = L$.

Gilt $\varepsilon \notin L$, so sind diese Aussagen äquivalent zu

4. Es gibt einen PDA $M$ mit nur einem Zustand und ohne $\varepsilon$-Transitionen, so daß $L(M) = L$ gilt.

**Beweis:**

(1)$\Rightarrow$(3) bzw. (4): Proposition auf Folie 12.10
(4)$\Rightarrow$(3)$\Rightarrow$(2) : trivial
(2)$\Rightarrow$(1): Proposition auf Folie 12.24 $\square$

# Zusammenfassung 12. Vorlesung

## in dieser Vorlesung neu

- Kellerautomaten akzeptieren genau die kontextfreien Sprachen
- dabei ist ein einzelner Zustand ausreichend (und oft braucht man auch keine $\varepsilon$-Transitionen)

## kommende Vorlesung

- Abschlußeigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen
- Nicht-Abschlußeigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen hierfür: Pumping-Lemma (vgl. Vorlesung 6)