Automaten und Formale Sprachen
4. Vorlesung

Prof. Dr. Dietrich Kuske

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2023/24

Proposition

Zu jeder rechtslinearen Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es einen NFA M mit $L(G) = L(M)$.

Beweis:
Wir definieren den NFA $M = (Z, \Sigma, S', \delta, E)$, wobei:

$$
\begin{aligned}
Z &= V \\
\delta(A, a) &= \{B \mid (A \to aB) \in P\} \\
S' &= \{S\} \\
E &= \{A \mid (A \to \varepsilon) \in P\}
\end{aligned}
$$

Behauptung: Für alle $w \in \Sigma^*$ und alle $A, B \in V$ gilt:

$$A \Rightarrow_G^* wB \iff B \in \widehat{\delta}(\{A\}, w)$$

Dies zeigt man per Induktion über $|w|$.

Sei nun $w \in \Sigma^*$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \in L(G) &\iff \exists A \in V: S \Rightarrow_G^* wA \text{ und } (A \to \varepsilon) \in P \\ &\overset{\text{Beh.}}{\iff} \exists A \in V: A \in \widehat{\delta}(\{S\}, w) \text{ und } A \in E \\ &\iff \widehat{\delta}(\{S\}, w) \cap E \neq \emptyset \\ &\iff w \in L(M) \end{aligned}$$

Es gilt also tatsächlich $L(G) = L(M)$. □

Bemerkung

- Aus einer rechtslinearen Grammatik $G = (V, \ldots)$ kann also ein äquivalenter NFA mit $|V|$ Zuständen konstruiert werden.
- Umgekehrt haben wir aus einem NFA $M = (Z, \ldots)$ einen äquivalenten DFA mit $2^{|Z|}$ Zuständen (Folie 3.21) und daraus eine äquivalente Grammatik mit $2^{|Z|}$ Nichtterminalen (Folie 3.12) konstruiert.
- Analog zum Beweis der Proposition auf Folie 3.12 kann man auch aus einem <u>N</u>FA $M = (Z, \ldots)$ eine äquivalente rechtslineare Grammatik mit nur $|Z|$ Nichtterminalen konstruieren.

NFAs, DFAs und rechtslineare Grammatiken

Satz

Seien Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind äquivalent:

1. L ist regulär (d.h. von einem DFA akzeptiert)
2. L wird von einem NFA akzeptiert
3. L ist rechtslinear (d.h. von einer Typ-3-Grammatik erzeugt)

verschiedene Modelle zur Beschreibung regulärer Sprachen:

- Rechtslineare Grammatiken: Verbindung zu Chomsky-Hierarchie, erzeugen Sprachen
  wenig geeignet für Entscheidung, ob Wort zu Sprache gehört
- NFAs: kompakte Darstellungen von Sprachen, intuitive graphische Darstellung
  wenig geeignet für Entscheidung, ob Wort zu Sprache gehört
- DFAs: u.U. exponentiell größer als NFA bzw. Grammatik
  gut geeignet für Entscheidung, ob Wort zu Sprache gehört

Abschlußeigenschaften

Definition

Gegeben sei eine Klasse K und ein n-stelliger Operator $\otimes\colon K^n \to K$.
Man sagt, eine Klasse $K' \subseteq K$ ist unter $\otimes$ abgeschlossen, wenn für beliebige Elemente $k_1, k_2, \ldots, k_n \in K'$ gilt: $\otimes(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in K'$.

Wir betrachten hier Abschlußeigenschaften der Klasse aller regulären Sprachen (d.h. wir setzen $K =$ Klasse aller Sprachen und $K' =$ Klasse aller regulären Sprachen).

Frage

Falls $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ regulär sind, sind dann auch $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 L_2$, $\overline{L_1} = \Sigma^* \backslash L_1$ (Komplement) und L_1^* regulär?

Kurze Antwort: Die regulären Sprachen sind unter all diesen Operationen abgeschlossen.

Satz

Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache ist, dann ist auch $\Sigma^* \setminus L$ regulär.

Beweis: Da L regulär ist, gibt es einen DFA $M = (Z, \Sigma, z_0, \delta, E)$ mit $L(M) = L$. In diesem vertauschen wir die End- und Nicht-Endzustände, d.h. wir setzen $M' = (Z, \Sigma, z_0, \delta, Z \setminus E)$.

Dann gilt für $w \in \Sigma^*$:

$$
\begin{aligned}
w \in \Sigma^* \setminus L \quad &\Longleftrightarrow \quad w \notin L(M) \\
&\Longleftrightarrow \quad \widehat{\delta}(z_0, w) \notin E \\
&\Longleftrightarrow \quad \widehat{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E \\
&\Longleftrightarrow \quad w \in L(M')\,.
\end{aligned}
$$

Die Sprache $\Sigma^* \setminus L$ wird also von dem DFA M' akzeptiert und ist somit regulär. $\square$

Bemerkung

- Ist $M = (Z, \Sigma, \dots)$ ein DFA, so existiert also ein DFA für $\Sigma^* \setminus L(M)$ mit $|Z|$ Zuständen.
- Ist $M = (Z, \Sigma, \dots)$ ein NFA, so existiert ein DFA für $L(M)$ mit $2^{|Z|}$ Zuständen (Folie 3.21) und daher ein DFA für $\Sigma^* \setminus L(M)$ mit $2^{|Z|}$ Zuständen.
- Man kann zeigen, daß diese Schranken optimal sind (selbst wenn man NFAs kontruieren möchte).

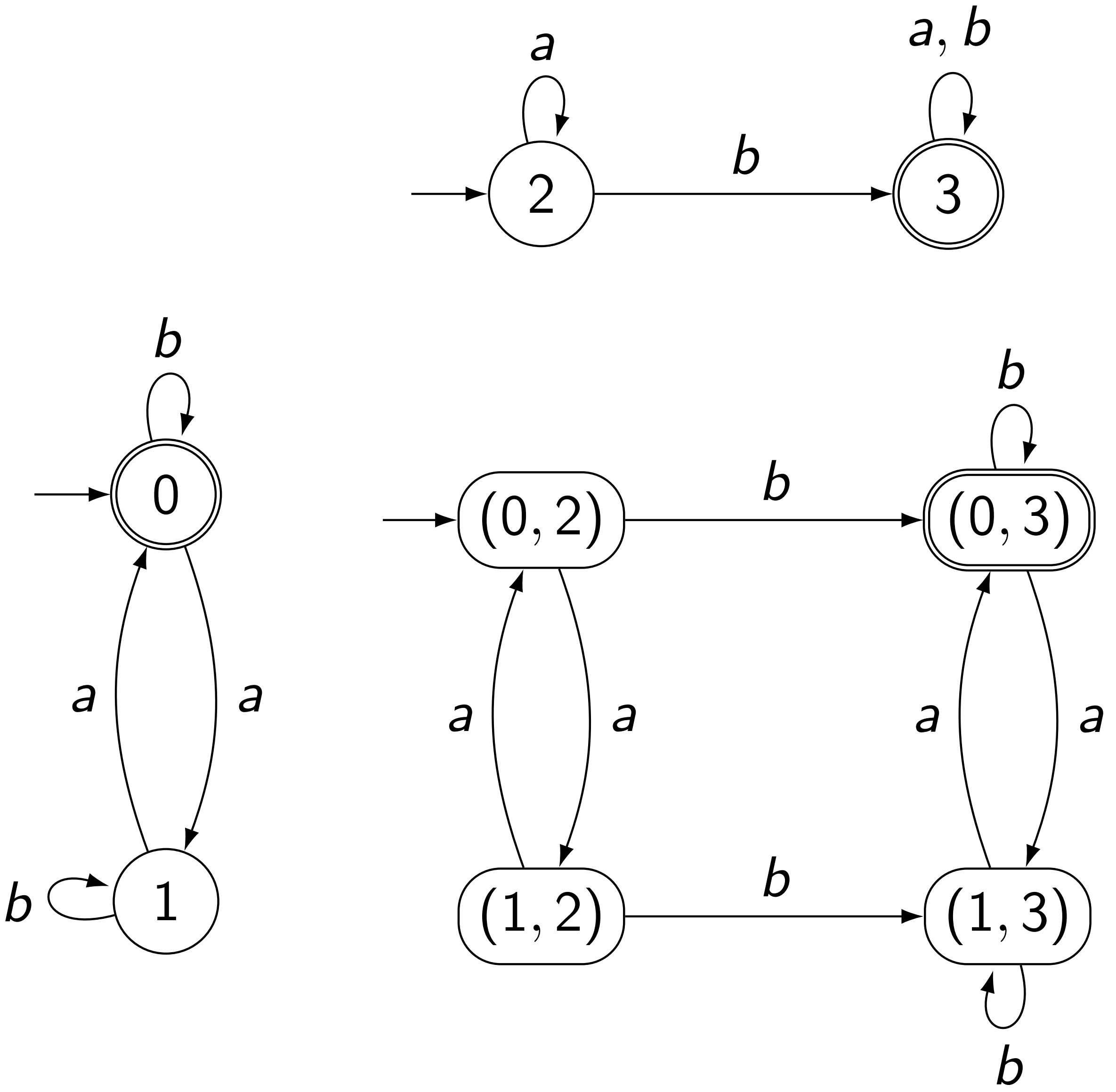
Satz

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen über Σ sind, dann ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär.

Beweis:
Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, \iota_i, \delta_i, E_i)$ DFAs mit $L(M_i) = L_i$. Wir werden jetzt diese beiden Automaten „parallelschalten“, d.h. die „Kreuzproduktkonstruktion“ anwenden. Hierzu betrachten wir den DFA

$$\begin{aligned} M &= \big(Z_1 \times Z_2, \Sigma, (\iota_1, \iota_2), \delta, E_1 \times E_2\big) \text{ mit} \\ \delta\big((z_1, z_2), a\big) &= \big(\delta_1(z_1, a), \delta_2(z_2, a)\big)\,. \end{aligned}$$

Bildung des Kreuzprodukts zweier DFAs:



Behauptung: Für alle $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ und $w \in \Sigma^*$ gilt

$$\widehat{\delta}\big((z_1, z_2), w\big) = \big(\widehat{\delta_1}(z_1, w), \widehat{\delta_2}(z_2, w)\big) .$$

Wir zeigen diese Behauptung durch Induktion über $|w|$.

IA $w = \varepsilon$. Dann gilt

$$\widehat{\delta}\big((z_1, z_2), \varepsilon\big) = (z_1, z_2) = \big(\widehat{\delta_1}(z_1, \varepsilon), \widehat{\delta_2}(z_2, \varepsilon)\big)$$

IS Sei $w = av$ ($a \in \Sigma, v \in \Sigma^*$) und gelte die Behauptung für v.

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}\big((z_1, z_2), av\big) &= \widehat{\delta}\Big(\delta\big((z_1, z_2), a\big), v\Big) \\
&= \widehat{\delta}\Big(\big(\delta_1(z_1, a), \delta_2(z_2, a)\big), v\Big) \\
&\overset{IV}{=} \Big(\widehat{\delta_1}\big(\delta_1(z_1, a), v\big), \widehat{\delta_2}\big(\delta_2(z_2, a), v\big)\Big) \\
&= \Big(\widehat{\delta_1}\big(z_1, av\big), \widehat{\delta_2}\big(z_2, av\big)\Big)
\end{aligned}$$

q.e.d.

Damit erhalten wir für $w \in \Sigma^*$:

$$
\begin{aligned}
w \in L(M) \quad &\iff \quad \widehat{\delta}\big((\iota_1, \iota_2), w\big) \in E_1 \times E_2 \\
&\overset{\text{Beh.}}{\iff} \quad \big(\widehat{\delta_1}(\iota_1, w), \widehat{\delta_2}(\iota_2, w)\big) \in E_1 \times E_2 \\
&\iff \quad \widehat{\delta_1}(\iota_1, w) \in E_1 \text{ und } \widehat{\delta_2}(\iota_2, w) \in E_2 \\
&\iff \quad w \in L(M_1) \text{ und } w \in L(M_2) \\
&\iff \quad w \in L_1 \cap L_2
\end{aligned}
$$

Also wird die Sprache $L_1 \cap L_2$ von einem DFA akzeptiert und ist damit regulär. □

Bemerkung

- Sind M_1 und M_2 NFAs, so kann man ebenfalls eine ähnliche Kreuzproduktkonstruktion anwenden und erhält einen NFA für den Schnitt der Sprachen, siehe Zusatzmaterial auf Folien 4.23 ff.
- Sind $M_i = (Z_i, \dots)$ DFAs bzw. NFAs, so kann man also einen DFA bzw. NFA für $L(M_1) \cap L(M_2)$ mit $|Z_1| \cdot |Z_2|$ Zuständen konstruieren.

Satz

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen über Σ sind, dann ist auch $L_1 \cup L_2$ regulär.

Beweis: Für $L \subseteq \Sigma^*$ sei $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$. Wegen

$$L_1 \cup L_2 = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}$$

ist die Vereinigung nach den Sätzen auf Folien 4.7 und 4.9 regulär. □

Bemerkungen

- Sind $M_i = (Z_i, \dots)$ DFAs, so kann man also einen DFA für $L(M_1) \cup L(M_2)$ mit $|Z_1| \cdot |Z_2|$ Zuständen konstruieren.
  Sind $M_i = (Z_i, \dots)$ hingegen NFAs, so liefert obiger Beweis einen DFA mit $2^{|Z_1|} \cdot 2^{|Z_2|}$ Zuständen.
- alternative Beweisidee: Auch hier kann eine Kreuzproduktion für <u>NFAs</u> betrachtet werden (mit Endzuständen $(E_1 \times Z_2) \cup (Z_1 \times E_2)$).
  Sind also $M_i = (Z_i, \dots)$ NFAs, so kann man auch einen NFA für $L(M_1) \cup L(M_2)$ mit $|Z_1| \cdot |Z_2|$ Zuständen konstruieren.
- weitere alternative Beweisidee: Sind $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ NFAs, so betrachte deren „disjunkte Vereinigung“:

$$\begin{aligned} M &= (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, S_1 \cup S_2, \gamma, E_1 \cup E_2) \text{ mit} \\ \gamma(z, a) &= \begin{cases} \delta_1(z, a) & \text{falls } z \in Z_1 \\ \delta_2(z, a) & \text{falls } z \in Z_2 \end{cases} \end{aligned}$$

  Damit ergibt sich ein NFA für $L(M_1) \cup L(M_2)$ mit $|Z_1| + |Z_2|$ Zuständen (vgl. Zusatzmaterial auf Folien 4.27 ff.)

Satz

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 L_2$ regulär.

Beweis: Es gibt DFAs $M_i = (Z_i, \Sigma, \iota_i, \delta_i, E_i)$ mit $L(M_i) = L_i$ für $i = 1, 2$.
o.B.d.A. $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Wir verknüpfen nun M_1 und M_2 sequentiell zu einem <u>N</u>FA

$$\begin{aligned} M &= (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, S, \delta, E_2) \text{ mit} \\ S &= \{\iota_1\} \\ \delta(z, a) &= \begin{cases} \{\delta_1(z, a)\} & \text{für } z \in Z_1 \text{ mit } \delta_1(z, a) \notin E_1 \\ \{\delta_1(z, a), \iota_2\} & \text{für } z \in Z_1 \text{ mit } \delta_1(z, a) \in E_1 \\ \{\delta_2(z, a)\} & \text{für } z \in Z_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Behauptung: Für alle $z_1 \in Z_1$, $Y \subseteq Z_2$ und $w \in \Sigma^+$ gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}\big(\{z_1\} \cup Y, w\big) \;=\; & \big\{\widehat{\delta_1}(z_1, w)\big\} \cup \\ & \big\{\widehat{\delta_2}(z_2, w) \;\big|\; z_2 \in Y\big\} \cup \\ & \big\{\widehat{\delta_2}(\iota_2, v) \;\big|\; w = uv, u \neq \varepsilon, \delta_1(z_1, u) \in E_1\big\} \end{aligned}$$

Diese Behauptung kann durch Induktion über $|w|$ gezeigt werden.
Für $w \in \Sigma^+$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} w \in L(M) \quad & \iff \quad \widehat{\delta}\big(\{\iota_1\} \cup \emptyset, w\big) \cap E_2 \neq \emptyset \\ & \iff \quad w = uv, u \neq \varepsilon, \widehat{\delta_1}(\iota_1, u) \in E_1, \widehat{\delta_2}(\iota_2, v) \in E_2 \\ & \iff \quad w = uv, u \in L(M_1) \setminus \{\varepsilon\}, v \in L(M_2) \\ & \iff \quad w \in \big(L_1 \setminus \{\varepsilon\}\big) \cdot L_2\,. \end{aligned}$$

Wegen $\varepsilon \notin L(M)$ und $\varepsilon \notin \big(L_1 \setminus \{\varepsilon\}\big) \cdot L_2$ folgt daher $\big(L_1 \setminus \{\varepsilon\}\big) \cdot L_2 = L(M)$.

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

- $\varepsilon \notin L_1$: dann gilt $L_1 \cdot L_2 = \big(L_1 \setminus \{\varepsilon\}\big) \cdot L_2 = L(M)$, nach der Proposition auf Folie 3.21 ist $L_1 \cdot L_2$ also regulär.
- $\varepsilon \in L_1$: dann gilt $L_1 \cdot L_2 = \big(L_1 \setminus \{\varepsilon\}\big) \cdot L_2 \cup L_2 = L(M) \cup L_2$. Nach der Proposition auf Folie 3.21 und dem Satz auf Folie 4.14 ist $L_1 \cdot L_2$ also regulär. $\square$

Bemerkung

- Aus zwei DFAs $M_i = (Z_i, \ldots)$ kann also ein NFA für $L(M_1) \cdot L(M_2)$ mit $|Z_1| + 2 \cdot |Z_2|$ vielen Zuständen konstruiert werden.
- Auf ähnliche Weise kann ein NFA mit sogar nur $|Z_1| + |Z_2|$ Zuständen für $L(M_1) \cdot L(M_2)$ aus zwei NFAs $M_i = (Z_i, \ldots)$ konstruiert werden (siehe Folien 4.30 ff.).

Lemma

Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann ist auch L^+ regulär.

Beweis:

Es gibt einen DFA $M = (Z, \Sigma, \iota, \delta, E)$ mit $L(M) = L$.

Betrachte den NFA $M' = \big(Z, \Sigma, \{\iota\}, \gamma, E\big)$ mit

$$\gamma(z,a) = \begin{cases} \{\delta(z,a)\} & \text{falls } \delta(z,a) \notin E \\ \{\delta(z,a), \iota\} & \text{falls } \delta(z,a) \in E \end{cases}$$

Behauptung: Für alle $w \in \Sigma^+$ gilt:

$$\widehat{\gamma}\big(\{\iota\}, w\big) = \big\{\widehat{\delta}(\iota, w_n) \mid n \geq 1, w = w_1 w_2 \cdots w_n, w_1, \ldots, w_{n-1} \in L(M)\big\}$$

Dies zeigt man per Induktion über $|w|$.

Dann gilt für alle Wörter $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}
w \in L(M') \quad &\iff \quad \widehat{\gamma}(\{\iota\}, w) \cap E \neq \emptyset \\
&\overset{\text{Beh.}}{\iff} \quad \exists n \geq 1, w_1, \ldots, w_n \in \Sigma^* : \quad \begin{array}{l} w = w_1 w_2 \ldots w_n, \\ w_1, \ldots, w_{n-1} \in L(M), \\ \widehat{\delta}(\iota, w_n) \in E \end{array} \\
&\iff \quad \exists n \geq 1, w_1, \ldots, w_n \in L(M) \colon w = w_1 w_2 \ldots w_n \\
&\iff \quad w \in L(M)^+ = L^+
\end{aligned}$$

Also ist $L^+ = L(M')$ und damit nach der Proposition auf Folie 3.21 regulär. □

Bemerkung

- Aus einem DFA $M = (Z, \ldots)$ kann also ein NFA für $L(M)^+$ mit $|Z|$ Zuständen konstruiert werden.
- Auf ähnliche Weise erhält man aus einem NFA $M = (Z, \ldots)$ einen NFA für $L(M)^+$ mit $|Z|$ Zuständen (vgl. Folien 4.19 ff.).

Satz

Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann ist auch L^* regulär.

Beweis Nach dem Lemma auf Folie 4.19 ist L^+ regulär.
Auch $\{\varepsilon\}$ ist regulär.
Nach dem Satz auf Folie 4.14 ist damit

$$\{\varepsilon\} \cup L^+ = L^0 \cup \bigcup_{n \geq 1} L^n = L^*$$

regulär. $\square$

Bemerkung

- $\{\varepsilon\}$ kann durch einen NFA mit einem Zustand akzeptiert werden.
- Ist $M = (Z, \dots)$ NFA, so kann also NFA für $L(M)^*$ mit $|Z| + 1$ Zuständen angegeben werden.

Zusammenfassung 4. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- NFAs, DFAs und rechtslineare Grammatiken sind tatsächlich gleich ausdrucksstark
- Abschluß der Klasse der rechtslinearen Sprachen unter Komplement, Schnitt, Vereinigung, Konkatenation, positiver und Kleene-Iteration. Für die Konstruktionen sind NFAs sehr hilfreich (Konkatenation, Iteration).
- die Größe der konstruierten Automaten hängt ab von Ausgangsautomaten (DFA vs. NFA), Ergebnisautomaten (DFA vs. NFA) und verwendeter Konstruktion (vgl. Schnitt)

kommende Vorlesung

- alternative Beschreibung der rechtslinearen Sprachen mittels regulärer Ausdrücke

Zusatzmaterial

Satz von Folie 4.9

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär.

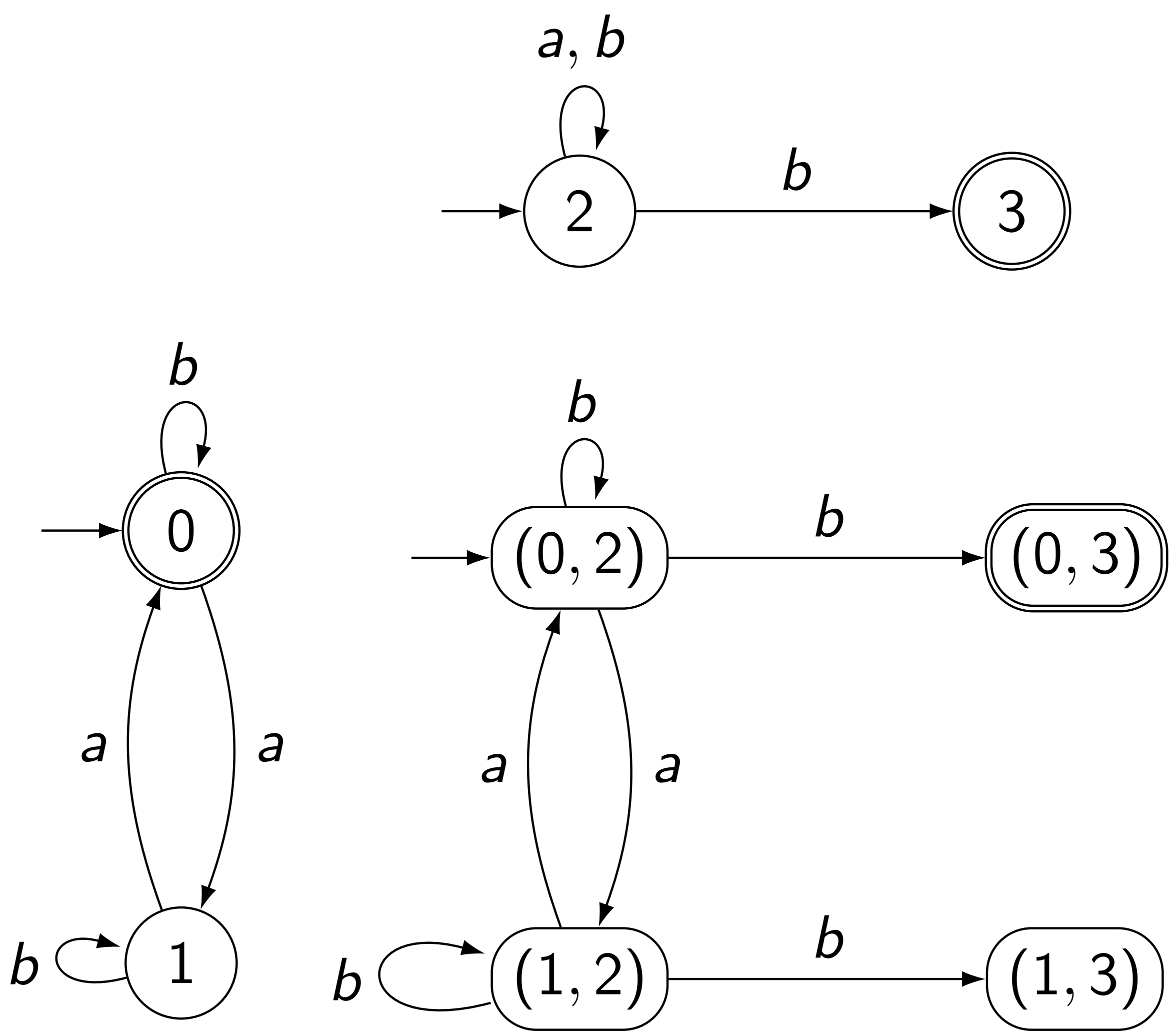
Beweis:
Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ NFAs mit $L(M_i) = L_i$. Wir betrachten den NFA

$$M = (\underbrace{Z_1 \times Z_2}_{Z}, \Sigma, \underbrace{S_1 \times S_2}_{S}, \delta, \underbrace{E_1 \times E_2}_{E}),$$

mit

$$\begin{aligned} \delta\big((z_1, z_2), a\big) &= \big\{(z_1', z_2') \bigm| z_1' \in \delta_1(z_1, a), z_2' \in \delta_2(z_2, a)\big\} \\ &= \delta_1(z_1, a) \times \delta_2(z_2, a)\,. \end{aligned}$$

Bildung des Kreuzprodukts zweier NFAs:



Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z_1 \times Z_2$ und alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\delta}(Y, w) &= \bigcup_{(z_1, z_2) \in Y} \left(\widehat{\delta_1}\big(\{z_1\}, w\big) \times \widehat{\delta_2}\big(\{z_2\}, w\big) \right) \\
&= \Big\{ (z_1', z_2') \mid \exists (z_1, z_2) \in Y \colon z_1' \in \widehat{\delta_1}\big(\{z_1\}, w\big), z_2' \in \widehat{\delta_2}\big(\{z_2\}, w\big) \Big\}
\end{aligned}
$$

(der Beweis erfolgt per Induktion über $|w|$).

Konsequenz: Das Kreuzprodukt der NFS M_1 und M_2 akzeptiert $L(M_1) \cap L(M_2)$.

Nach der Proposition auf Folie 3.21 ist $L(M_1) \cap L(M_2)$ also regulär. $\square$

Satz von Folie 4.14

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cup L_2$ regulär.

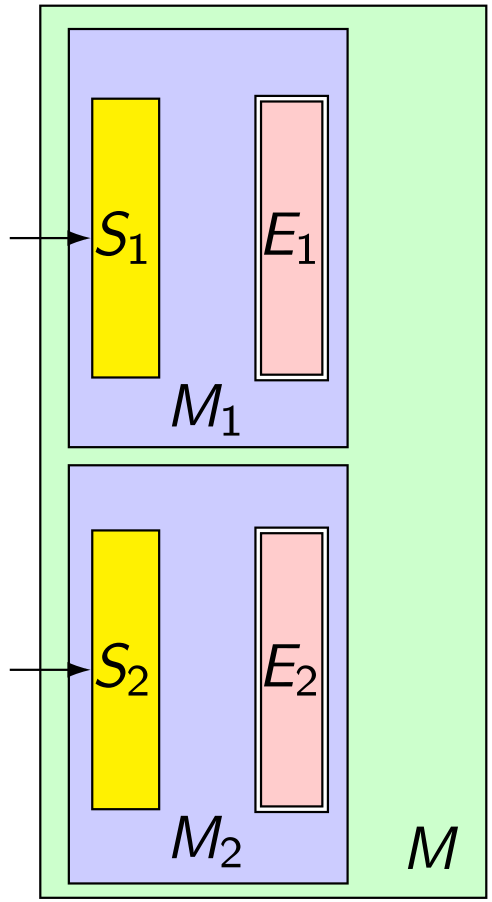
Beweis: Es gibt NFAs $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ für $i = 1, 2$ mit $L(M_i) = L_i$.
o.B.d.A. $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Wir bauen nun einen NFA M als „disjunkte Vereinigung" von M_1 und M_2:

$$M = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, S_1 \cup S_2, \delta, E_1 \cup E_2)$$

wobei

$$\delta(z, a) = \begin{cases} \delta_1(z, a) & \text{für } z \in Z_1 \\ \delta_2(z, a) & \text{für } z \in Z_2 \end{cases}$$



Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z_1 \cup Z_2$ und $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\widehat{\delta}(Y, w) = \widehat{\delta_1}(Y \cap Z_1, w) \cup \widehat{\delta_2}(Y \cap Z_2, w)$$

Wir zeigen diese Behauptung durch Induktion über $|w|$.

IA $w = \varepsilon$. Dann gilt

$$\widehat{\delta}(Y, \varepsilon) = Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2) = \widehat{\delta_1}(Y \cap Z_1, \varepsilon) \cup \widehat{\delta_2}(Y \cap Z_2, \varepsilon)$$

IS Sei $w = av$ ($a \in \Sigma, v \in \Sigma^*$) und gelte die Behauptung für v.

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(Y, av) &= \widehat{\delta}(\delta(Y, a), v) \\
&= \widehat{\delta}\Big(\underbrace{\delta_1(Y \cap Z_1, a)}_{\subseteq Z_1} \cup \underbrace{\delta_2(Y \cap Z_2, a)}_{\subseteq Z_2}, v\Big) \\
&\overset{IV}{=} \widehat{\delta_1}\big(\delta_1(Y \cap Z_1, a), v\big) \cup \widehat{\delta_2}\big(\delta_2(Y \cap Z_2, a), v\big) \\
&= \widehat{\delta_1}(Y \cap Z_1, av) \cup \widehat{\delta_2}(Y \cap Z_2, av)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $w \in \Sigma^*$:

$$
\begin{aligned}
\widehat{\delta}(S_1 \cup S_2, w) \cap (E_1 \cup E_2) &= \big(\underbrace{\widehat{\delta_1}(S_1, w)}_{\subseteq Z_1} \cup \underbrace{\widehat{\delta_2}(S_2, w)}_{\subseteq Z_2}\big) \cap (E_1 \cup E_2) \\
&= \big(\widehat{\delta_1}(S_1, w) \cap E_1\big) \cup \big(\widehat{\delta_2}(S_2, w) \cap E_2\big)
\end{aligned}
$$

und also

$$
\begin{aligned}
w \in L(M) &\iff \widehat{\delta}(S_1 \cup S_2, w) \cap (E_1 \cup E_2) \neq \emptyset \\
&\iff \widehat{\delta_1}(S_1, w) \cap E_1 \neq \emptyset \text{ oder } \widehat{\delta_2}(S_2, w) \cap E_2 \neq \emptyset \\
&\iff w \in L(M_1) \text{ oder } w \in L(M_2) \\
&\iff w \in L_1 \cup L_2
\end{aligned}
$$

Also wird die Sprache $L_1 \cup L_2$ von einem NFA akzeptiert und ist nach der Proposition auf Folie 3.21 damit regulär. $\square$

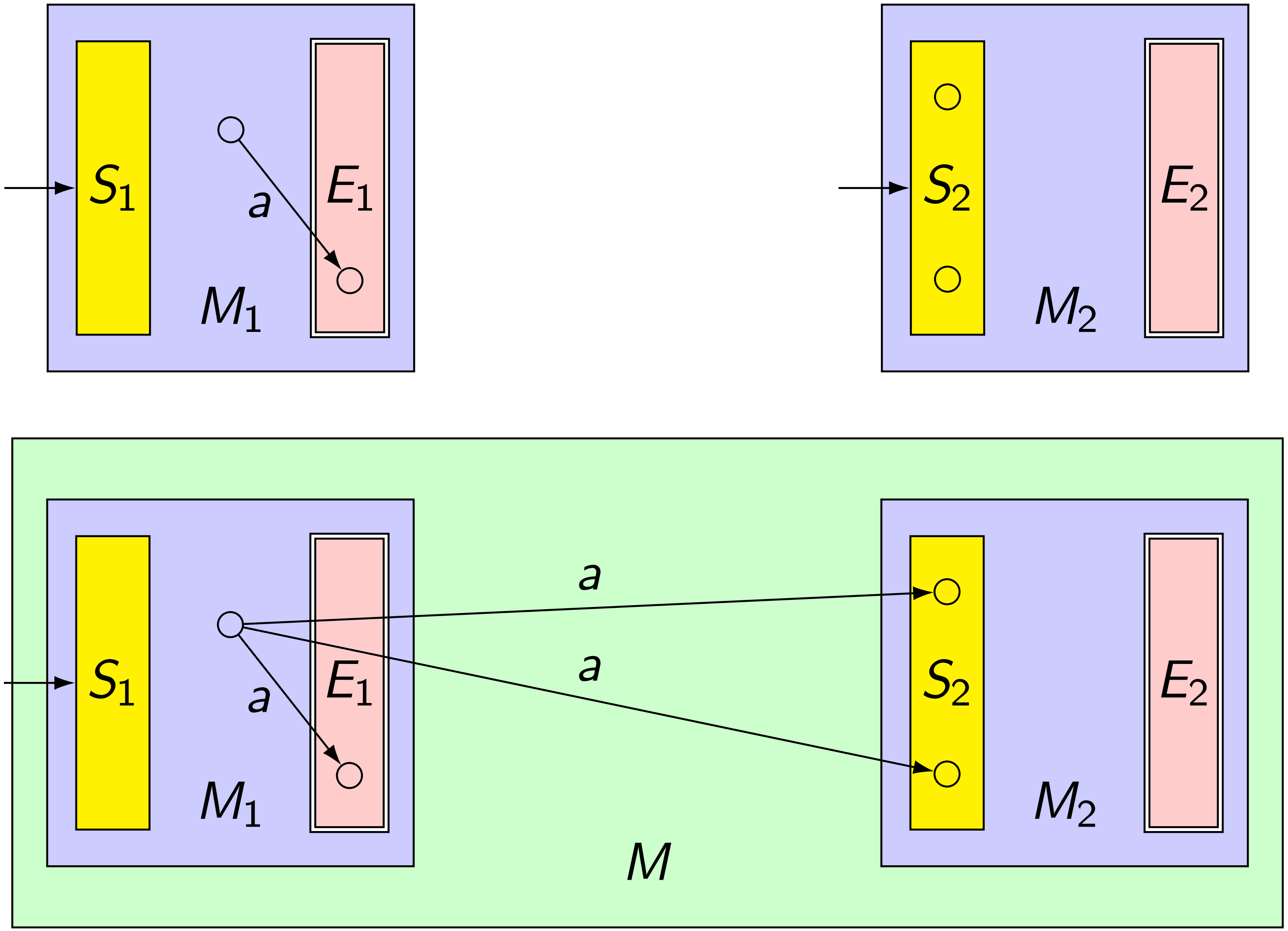
Satz von Folie 4.16

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 L_2$ regulär.

Beweis: Es gibt NFAs $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ mit $L(M_i) = L_i$ für $i = 1, 2$.
o.B.d.A. $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Wir verknüpfen nun M_1 und M_2 sequentiell zu einem NFA
$M = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, S, \delta, E_2)$, wobei

$$
\begin{aligned}
S &= \begin{cases} S_1 & \text{falls } \varepsilon \notin L_1 \\ S_1 \cup S_2 & \text{falls } \varepsilon \in L_1 \end{cases} \\
\delta(z, a) &= \begin{cases} \delta_2(z, a) & \text{für } z \in Z_2 \\ \delta_1(z, a) & \text{für } z \in Z_1 \text{ mit } \delta_1(z, a) \cap E_1 = \emptyset \\ \delta_1(z, a) \cup S_2 & \text{für } z \in Z_1 \text{ mit } \delta_1(z, a) \cap E_1 \neq \emptyset \end{cases}
\end{aligned}
$$


S_1
E_1
a
M_1
S_2
E_2
M_2
S_1
E_1
a
a
a
M_1
S_2
E_2
M_2
M

Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z_1 \cup Z_2$ und $w \in \Sigma^+$ gilt:

$$\widehat{\delta}(Y, w) = \widehat{\delta_1}(Y \cap Z_1, w) \cup \widehat{\delta_2}(Y \cap Z_2, w) \cup \bigcup_{\substack{w=uv, u\neq\varepsilon \\ \widehat{\delta_1}(Y\cap Z_1, u)\cap E_1 \neq \emptyset}} \widehat{\delta_2}(S_2, v)$$

Wir zeigen diese Behauptung durch Induktion über $|w|$:

IA Sei $a \in \Sigma$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta}(Y, a) &= \bigcup_{z\in Y} \delta(z, a) \\
&= \bigcup_{z\in Y\cap Z_1} \delta_1(z, a) \cup \bigcup_{z\in Y\cap Z_2} \delta_2(z, a) \\
&\qquad \cup \begin{cases} S_2 & \text{falls } \exists z \in Y \cap Z_1 : \delta_1(z, a) \cap E_1 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \\
&= \widehat{\delta_1}(Y \cap Z_1, a) \cup \widehat{\delta_2}(Y \cap Z_2, a) \cup \bigcup_{\widehat{\delta_1}(Y\cap Z_1, a)\cap E_1\neq\emptyset} \widehat{\delta_2}(S_2, \varepsilon)
\end{aligned}$$

IS Es ist $\widehat{\delta}(Y, aw)$ gleich

$$
\begin{aligned}
&= \widehat{\delta}\Big(\overbrace{\widehat{\delta_1}(Y \cap Z_1, a) \cup \widehat{\delta_2}(Y \cap Z_2, a) \cup \bigcup_{\widehat{\delta_1}(Y\cap Z_1,a)\cap E_1 \neq \emptyset} \widehat{\delta_2}(S_2, \varepsilon)}^{=:H}, w\Big) \\
&\overset{\mathrm{IV}}{=} \widehat{\delta_1}(H \cap Z_1, w) \cup \widehat{\delta_2}(H \cap Z_2, w) \cup \bigcup_{\substack{w=uv, u\neq\varepsilon \\ \widehat{\delta_1}(H\cap Z_1,u)\cap E_1\neq\emptyset}} \widehat{\delta_2}(S_2, v) \\
&= \widehat{\delta_1}(Y \cap Z_1, aw) \cup \widehat{\delta_2}(Y \cap Z_2, aw) \\
&\qquad \cup \widehat{\delta_2}\Big(\bigcup_{\widehat{\delta_1}(Y\cap Z_1,a)\cap E_1\neq\emptyset} S_2, w\Big) \cup \bigcup_{\substack{w=uv, u\neq\varepsilon \\ \widehat{\delta_1}(Y\cap Z_1,au)\cap E_1\neq\emptyset}} \widehat{\delta_2}(S_2, v)
\end{aligned}
$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Für $w \in \Sigma^+$ erhalten wir also

$$\begin{aligned}
w \in L(M) \quad &\iff \quad \widehat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \\
&\iff \quad \widehat{\delta_2}(S \cap S_2, w) \cap E_2 \neq \emptyset \\
&\qquad\quad \text{oder } w = uv, u \neq \varepsilon, \widehat{\delta_1}(S \cap S_1, u) \cap E_1 \neq \emptyset, \\
&\qquad\qquad\quad \widehat{\delta_2}(S_2, v) \cap E_2 \neq \emptyset \\
&\iff \quad w = uv, u \in L(M_1), v \in L(M_2) \\
&\iff \quad w \in L_1 \cdot L_2 \,.
\end{aligned}$$

Für $w = \varepsilon$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varepsilon \in L(M) \quad &\Longleftrightarrow \quad S \cap E_2 \neq \emptyset \\
&\Longleftrightarrow \quad S_1 \cap E_2 \neq \emptyset \text{ oder } \big(\varepsilon \in L(M_1) \text{ und } S_2 \cap E_2 \neq \emptyset\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \varepsilon \in L(M_1) \text{ und } \varepsilon \in L(M_2) \\
&\Longleftrightarrow \quad \varepsilon \in L(M_1) \cdot L(M_2) = L_1 \cdot L_2 \,.
\end{aligned}$$

Also ist $L_1 \cdot L_2 = L(M)$ und damit nach der Proposition auf Folie 3.21 tatsächlich regulär. $\square$

Lemma von Folie 4.19

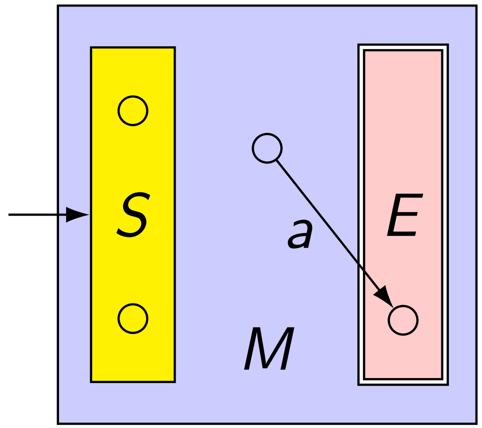
Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann ist auch L^+ regulär.

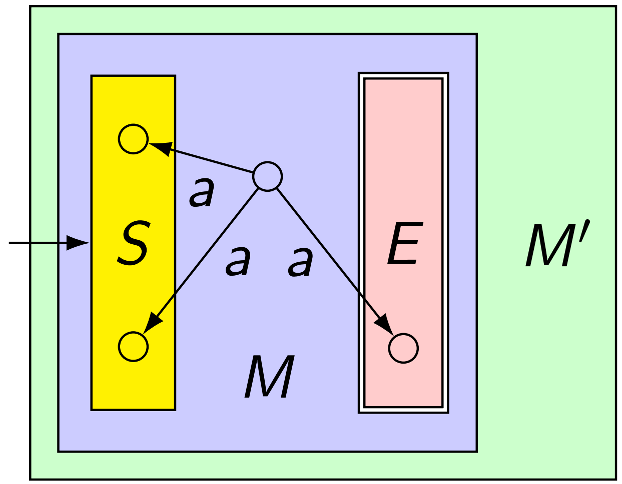
Beweis:

Es gibt einen NFA $M = (Z, \Sigma, S, \delta, E)$ mit $L(M) = L$.

Betrachte den NFA $M' = (Z, \Sigma, S, \delta', E)$ mit

$$\delta'(z, a) = \begin{cases} \delta(z, a) & \text{falls } \delta(z, a) \cap E = \emptyset \\ \delta(z, a) \cup S & \text{sonst} \end{cases}$$





Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z$ und $w \in \Sigma^+$ gilt:

$$\widehat{\delta'}(Y, w) = \widehat{\delta}(Y, w) \cup \bigcup_{(*)} \widehat{\delta}(S, u_n)$$

wobei die Vereinigung $(*)$ über alle $n \geq 1$ und $w = u_1 u_2 \dots u_n$ läuft mit $\widehat{\delta}(Y, u_1) \cap E \neq \emptyset$ und $u_2, \dots, u_{n-1} \in L(M)$.

Dies zeigt man per Induktion über $|w|$.

Dann gilt für alle Wörter $w \in \Sigma^*$:

$$
\begin{aligned}
w \in L(M') \quad &\iff \quad \widehat{\delta'}(S, w) \cap E \neq \emptyset \\
&\overset{\text{Beh.}}{\iff} \quad \exists n \geq 1, u_1, \ldots, u_n \in \Sigma^*\colon \quad \begin{aligned}[t] & w = u_1 u_2 \ldots u_n, \\ & \widehat{\delta}(S, u_1) \cap E \neq \emptyset, \\ & u_2, \ldots, u_{n-1} \in L(M), \\ & \widehat{\delta}(S, u_n) \cap E \neq \emptyset \end{aligned} \\
&\iff \quad \exists n \geq 1, u_1, \ldots, u_n \in L(M)\colon w = u_1 u_2 \ldots u_n \\
&\iff \quad w \in L(M)^+ = L^+
\end{aligned}
$$

Also ist $L^+ = L(M')$ und damit nach der Proposition auf Folie 3.21 regulär. $\square$