TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
WS 2023/2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automaten und formale Sprachen – Übung 1

Abgabe: bis Freitag, der 27. Oktober 2023, um 11:00 Uhr am Fachgebiet oder vor der Übung.

Heften Sie bitte alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1* — 4 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Unter den folgenden 16 Sprachen über Σ befinden sich acht Paare gleicher Sprachen. Finden Sie heraus, welche Sprachen gleich sind und begründen Sie jeweils in maximal zwei Sätzen, warum die entsprechende Gleichheit gilt.

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b = |w|_c\} \qquad L_9 = L_2 \cap \{a\}^*\{b\}^*$$
$$L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = |w|_b\} \qquad L_{10} = L_2 \cap \{w \in \Sigma^* \mid |w|_b = |w|_c\}$$
$$L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 0\} \qquad L_{11} = (L_3L_4)^2$$
$$L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 2\} \qquad L_{12} = \Sigma^* \setminus L_3$$
$$L_5 = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 4\} \qquad L_{13} = L_2^3$$
$$L_6 = \{b, c\}^*\{a\}\{b, c\}^*\{a\}\{b, c\}^* \qquad L_{14} = \{ab\}^+$$
$$L_7 = \{a\}\{ba\}^*\{b\} \qquad L_{15} = \{b, c\}^*$$
$$L_8 = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad L_{16} = \Sigma^*\{a\}\Sigma^*$$

Aufgabe 2* — 2 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma^{\le n} = \bigcup_{i \le n} \Sigma^i$ die Menge der Wörter in Σ^* deren Länge höchstens n ist. Zeigen Sie per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $|\Sigma^{\le n}| = 2^{n+1} - 1$.

Aufgabe 3* — 1+2 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P genau die folgenden Produktionen enthält:

$$S \to A \mid C \qquad A \to Aa \mid a \qquad Bb \to bb \qquad Bc \to bbc \qquad C \to BCc \mid c.$$

(a) Geben Sie eine Ableitung von $bbbccc$ an.

(b) Geben Sie eine möglichst kurze aber präzise Beschreibung von $L(G)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4* — 2+2+2 Punkte

Konstruieren Sie Grammatiken G_1, G_2 und G_3 so, dass folgende Sprachen erzeugt werden.

(a) $L(G_1) = \Sigma^*\{a\}\Sigma^* \cup \Sigma^*\{b\}\Sigma^*$ für $\Sigma = \{a, b, c\}$.

(b) $L(G_2) = \{ww^R \mid w \in \{a, b\}^* : w$ startet mit einem $b\}$

Hinweis: Für $w = w_1w_2 \dots w_{n-1}w_n$ sei $w^R = w_nw_{n-1} \dots w_2w_1$ das umgekehrte Wort.

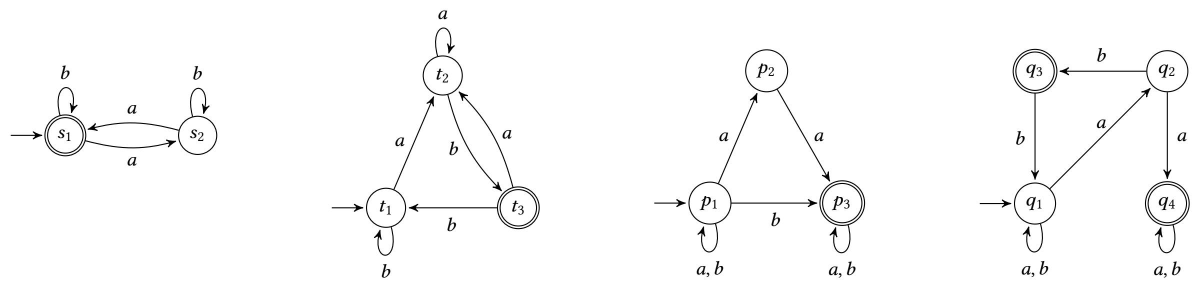
(c) $L(G_3)$ ist die Menge der Polynomgleichungen über den Variablen x, y.

Hinweis: Ein Polynom über den Variablen x, y ist induktiv wie folgt definiert:
$0, 1, x, y$ sind Polynome und falls f, g Polynome sind, so auch $(f + g)$ und $(f \cdot g)$.

Präsenzaufgaben

<u>Aufgabe 5</u>

Es sind die DFAs M_1 und M_2 und die NFAs M_3 und M_4 (von links nach rechts) gegeben.



Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Geben Sie jeweils zwei Wörter an, die von M_i akzeptiert bzw. nicht akzeptiert werden.

(b) Geben Sie analog zu Aufgabe 6 eine kurze aber präzise Beschreibung der Sprache $L(M_i)$ an.

<u>Aufgabe 6</u>

Betrachten Sie die nachfolgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält die Zeichenfolge } baba\}$$
$$L_2 = \Sigma^* \setminus \{aa, ab, aab\}$$
$$L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{es existiert } k \geq 1, \text{ so dass } w \text{ mit } a(ab)^k \text{ beginnt}\}$$
$$L_4 = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet auf } aab\}$$

Geben Sie für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jeweils einen DFA M_i mit $L(M_i) = L_i$ grafisch an. Wählen Sie jeweils zwei Wörter aus L_i und $\Sigma^* \setminus L_i$ aus und überprüfen Sie, ob M_i auf diesen korrekt arbeitet.

<u>Aufgabe 7</u>

Konstruieren Sie mit der Potenzmengenkonstruktion einen DFA, der die gleiche Sprache akzeptiert, wie M_3 aus Aufgabe 5.