

Automaten und Formale Sprachen – Übung 2

Abgabe: bis Freitag, 08. November 2024, um 11:00 Uhr im Briefkasten vorm Raum Z1047 oder vor der Übung.

**Geben Sie bitte Ihre Matrikelnummer an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.**

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1*

1+2 Punkte

Gegeben sei die Grammatik $G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S)$, wobei P genau die folgenden Produktionen enthält:

$$S \rightarrow A \mid C \qquad A \rightarrow Aa \mid a \qquad Bb \rightarrow bb \qquad Bc \rightarrow bbc \qquad C \rightarrow BCc \mid c.$$

- (a) Geben Sie eine Ableitung von $bbbcc$ an.
- (b) Geben Sie eine möglichst kurze aber präzise Beschreibung von $L(G)$ an. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2*

4+1 Punkte

Betrachten Sie die nachfolgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$.

$$\begin{aligned} L_1 &= \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ endet auf } aab\} \\ L_2 &= \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ enthält die Zeichenfolge } baba\} \\ L_3 &= \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a = 1 \text{ oder } |w|_b = 1\} \\ L_4 &= \{w \in \Sigma^* \mid \text{jedes } a \text{ in } w \text{ ist Teil eines Infix } aa\} \end{aligned}$$

- (a) Geben Sie für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ jeweils einen DFA M_i mit $L(M_i) = L_i$ grafisch an.
- (b) Geben Sie einen NFA N mit $L(N) = L_4$, der genau zwei Zustände hat, grafisch an.

Hinweis: Der in Aufgabenteil (a) geforderte DFA M_4 benötigt mehr als zwei Zustände.

Aufgabe 3*

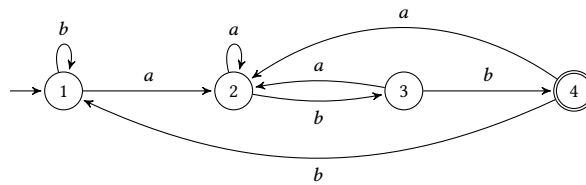
3 Punkte

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\Sigma^{\leq n} = \bigcup_{i \leq n} \Sigma^i$ die Menge der Wörter in Σ^* deren Länge höchstens n ist. Zeigen Sie per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$, dass $|\Sigma^{\leq n}| = 2^{n+1} - 1$.

Aufgabe 4*

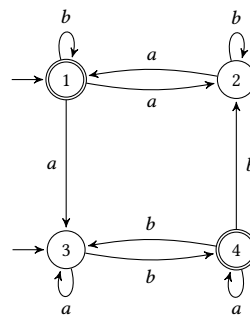
2+2 Punkte

- (a) Gegeben sei der folgende DFA
- M
- :



Konstruieren Sie mithilfe des Verfahrens aus der Vorlesung, Folie 3.12, ausgehend von M , eine rechtslineare Grammatik G_1 mit $L(M) = L(G_1)$. Geben Sie für das Wort $ababb$ eine Berechnung von M und die dieser Berechnung entsprechende Ableitung in G_1 an.

- (b) Gegeben sei der folgende NFA
- N
- :



Eine zu einem NFA mit n Zuständen äquivalente Grammatik kann erzeugt werden, indem per Potenzmengenkonstruktion ein äquivalenter DFA konstruiert und auf diesen das Verfahren von Folie 3.12 angewendet wird. Die so entstehende Grammatik hat 2^n Nicht-Terminals. Allerdings ist es auch möglich direkt aus einem NFA eine äquivalente rechtslineare Grammatik mit nur $n + 1$ Nicht-Terminals zu konstruieren.

Überlegen sie sich ein Verfahren, welches dies leistet, indem sie das Verfahren aus der Vorlesung anpassen und wenden sie es an, um eine zu N äquivalente rechtslineare Grammatik G_2 zu erzeugen. Sie müssen keine formale Beschreibung ihres Verfahrens und auch keinen Korrektheitsbeweis angeben.

Hinweis: Achten sie darauf, dass eine Grammatik nur ein Startsymbol hat, aber ein NFA mehrere Startzustände haben kann

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5

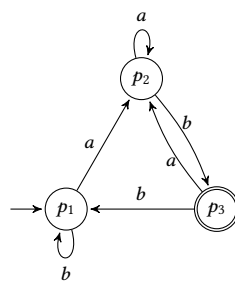
Betrachten Sie die rechtslineare Grammatik $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen:

$$S \rightarrow aS \mid aA \quad A \rightarrow aB \mid \varepsilon \quad B \rightarrow bA \mid bB \mid aS$$

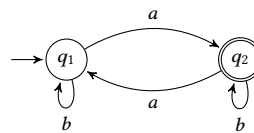
Konstruieren Sie mithilfe des Verfahrens aus der Vorlesung ausgehend von G einen NFA M mit $L(G) = L(M)$. Geben Sie für das Wort $aabbbaa$ eine Ableitung in G und die dieser Ableitung entsprechende Berechnung von M an.

Aufgabe 6

Gegeben seien die folgenden DFAs M_1 und M_2 .



M_1



M_2

Nutzen Sie Vorlesungsfolien um folgende Automaten zu konstruieren:

- (a) einen DFA $M_\cap$ mit $L(M_\cap) = L(M_1) \cap L(M_2)$,
- (b) einen NFA $M_\cdot$ mit $L(M_\cdot) = L(M_1) \cdot L(M_2)$ und
- (c) einen NFA M_* mit $L(M_*) = L(M_1)^*$.