

Automaten und Formale Sprachen

4. Vorlesung



Prof. Dr. Dietrich Kuske



FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2024/25

Proposition

Zu jeder rechtslinearen Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ gibt es einen NFA M mit $L(G) = L(M)$.

Beweis:

Wir definieren den NFA $M = (Z, \Sigma, S', \delta, E)$, wobei:

$$Z = V$$

$$\delta(A, a) = \{B \mid (A \rightarrow aB) \in P\}$$

$$S' = \{S\}$$

$$E = \{A \mid (A \rightarrow \varepsilon) \in P\}$$

Behauptung: Für alle $w \in \Sigma^*$ und alle $A, B \in V$ gilt:

$$A \Rightarrow_G^* wB \iff B \in \hat{\delta}(\{A\}, w)$$

Dies zeigt man per Induktion über $|w|$.

Sei nun $w \in \Sigma^*$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \in L(G) &\iff \exists A \in V: S \Rightarrow_G^* wA \text{ und } (A \rightarrow \varepsilon) \in P \\ &\stackrel{\text{Beh.}}{\iff} \exists A \in V: A \in \hat{\delta}(\{S\}, w) \text{ und } A \in E \\ &\iff \hat{\delta}(\{S\}, w) \cap E \neq \emptyset \\ &\iff w \in L(M) \end{aligned}$$

Es gilt also tatsächlich $L(G) = L(M)$. □

Bemerkung

- Aus einer rechtslinearen Grammatik $G = (V, \dots)$ kann also ein äquivalenter NFA mit $|V|$ Zuständen konstruiert werden.
- Umgekehrt haben wir aus einem NFA $M = (Z, \dots)$ einen äquivalenten DFA mit $2^{|Z|}$ Zuständen (Folie 3.21) und daraus eine äquivalente Grammatik mit $2^{|Z|}$ Nichtterminalen (Folie 3.12) konstruiert.
- Analog zum Beweis der Proposition auf Folie 3.12 kann man auch aus einem NFA $M = (Z, \dots)$ eine äquivalente rechtslineare Grammatik mit nur $|Z| + 1$ Nichtterminalen konstruieren.

NFAs, DFAs und rechtslineare Grammatiken

Satz

Seien Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind äquivalent:

1. L ist regulär (d.h. von einem DFA akzeptiert)
2. L wird von einem NFA akzeptiert
3. L ist rechtslinear (d.h. von einer Typ-3-Grammatik erzeugt)

verschiedene Modelle zur Beschreibung regulärer Sprachen:

- **Rechtslineare Grammatiken:** Verbindung zu Chomsky-Hierarchie, erzeugen Sprachen
wenig geeignet für Entscheidung, ob Wort zu Sprache gehört
- **NFAs:** kompakte Darstellungen von Sprachen, intuitive graphische Darstellung
wenig geeignet für Entscheidung, ob Wort zu Sprache gehört
- **DFAs:** u.U. exponentiell größer als NFA bzw. Grammatik
gut geeignet für Entscheidung, ob Wort zu Sprache gehört

Abschlußeigenschaften

Definition

Gegeben sei eine Klasse K und ein n -stelliger Operator $\otimes: K^n \rightarrow K$.

Man sagt, eine Klasse $K' \subseteq K$ ist unter $\otimes$ **abgeschlossen**, wenn für beliebige Elemente $k_1, k_2, \dots, k_n \in K'$ gilt: $\otimes(k_1, k_2, \dots, k_n) \in K'$.

Wir betrachten hier Abschlußeigenschaften der Klasse aller regulären Sprachen (d.h. wir setzen $K =$ Klasse aller Sprachen und $K' =$ Klasse aller regulären Sprachen).

Frage

Falls $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ **regulär** sind, sind dann auch $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$, $L_1 L_2$, $\overline{L_1} = \Sigma^* \setminus L_1$ (Komplement) und L_1^* **regulär**?

Kurze Antwort: Die Klasse der regulären Sprachen ist unter all diesen Operationen abgeschlossen.

Satz

Wenn $L \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache ist, dann ist auch $\Sigma^* \setminus L$ regulär.

Beweis: Da L regulär ist, gibt es einen DFA $M = (Z, \Sigma, z_0, \delta, E)$ mit $L(M) = L$. In diesem vertauschen wir die End- und Nicht-Endzustände, d.h. wir setzen $M' = (Z, \Sigma, z_0, \delta, Z \setminus E)$.

Dann gilt für $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w \in \Sigma^* \setminus L &\iff w \notin L(M) \\ &\iff \hat{\delta}(z_0, w) \notin E \\ &\iff \hat{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E \\ &\iff w \in L(M'). \end{aligned}$$

Die Sprache $\Sigma^* \setminus L$ wird also von dem DFA M' akzeptiert und ist somit regulär. □

Bemerkung

- Ist $M = (Z, \Sigma, \dots)$ ein DFA, so existiert also ein DFA für $\Sigma^* \setminus L(M)$ mit $|Z|$ Zuständen.
- Ist $M = (Z, \Sigma, \dots)$ ein NFA, so existiert ein DFA für $L(M)$ mit $2^{|Z|}$ Zuständen (Folie 3.21) und daher ein DFA für $\Sigma^* \setminus L(M)$ mit $2^{|Z|}$ Zuständen.
- Man kann zeigen, daß diese Schranken optimal sind (selbst wenn man NFAs konstruieren möchte).

Satz

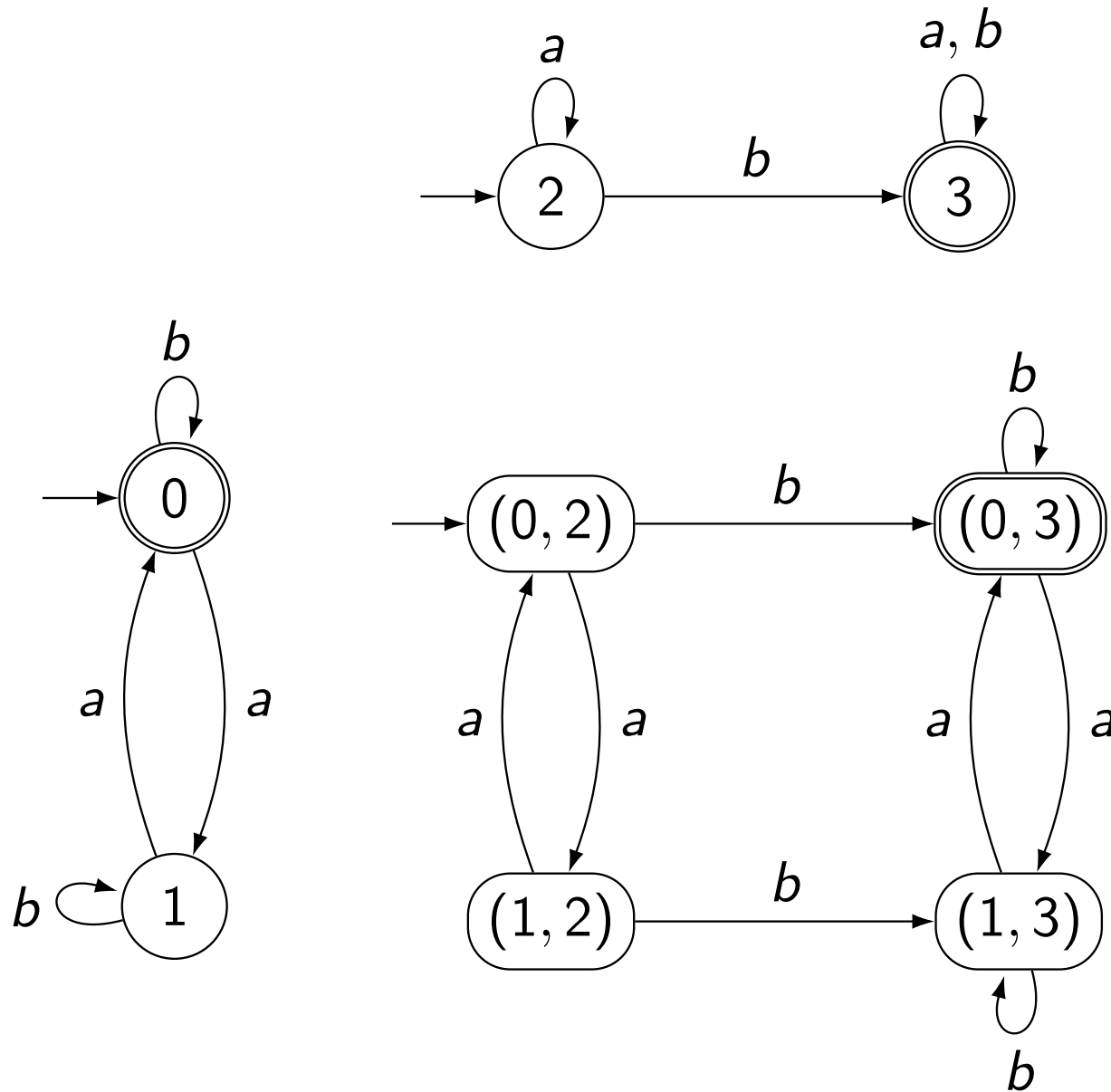
Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen über Σ sind, dann ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär.

Beweis:

Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, \iota_i, \delta_i, E_i)$ DFAs mit $L(M_i) = L_i$. Wir werden jetzt diese beiden Automaten „parallelschalten“, d.h. die „Kreuzproduktkonstruktion“ anwenden. Hierzu betrachten wir den DFA

$$\begin{aligned} M &= (Z_1 \times Z_2, \Sigma, (\iota_1, \iota_2), \delta, E_1 \times E_2) \text{ mit} \\ \delta((z_1, z_2), a) &= (\delta_1(z_1, a), \delta_2(z_2, a)) . \end{aligned}$$

Bildung des Kreuzprodukts zweier DFAs:



Behauptung: Für alle $z_1 \in Z_1$, $z_2 \in Z_2$ und $w \in \Sigma^*$ gilt

$$\widehat{\delta}((z_1, z_2), w) = (\widehat{\delta}_1(z_1, w), \widehat{\delta}_2(z_2, w)).$$

Wir zeigen diese Behauptung durch Induktion über $|w|$.

IA $w = \varepsilon$. Dann gilt $\widehat{\delta}((z_1, z_2), \varepsilon) = (z_1, z_2) = (\widehat{\delta}_1(z_1, \varepsilon), \widehat{\delta}_2(z_2, \varepsilon))$

IS Sei $w = av$ ($a \in \Sigma, v \in \Sigma^*$) und gelte die Behauptung für v .

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}((z_1, z_2), av) &= \widehat{\delta}(\delta((z_1, z_2), a), v) \\ &= \widehat{\delta}((\delta_1(z_1, a), \delta_2(z_2, a)), v) \\ &\stackrel{IV}{=} (\widehat{\delta}_1(\delta_1(z_1, a), v), \widehat{\delta}_2(\delta_2(z_2, a), v)) \\ &= (\widehat{\delta}_1(z_1, av), \widehat{\delta}_2(z_2, av)) \end{aligned}$$

q.e.d.

Damit erhalten wir für $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\iff \widehat{\delta}((\iota_1, \iota_2), w) \in E_1 \times E_2 \\ &\stackrel{\text{Beh.}}{\iff} (\widehat{\delta}_1(\iota_1, w), \widehat{\delta}_2(\iota_2, w)) \in E_1 \times E_2 \\ &\iff \widehat{\delta}_1(\iota_1, w) \in E_1 \text{ und } \widehat{\delta}_2(\iota_2, w) \in E_2 \\ &\iff w \in L(M_1) \text{ und } w \in L(M_2) \\ &\iff w \in L_1 \cap L_2 \end{aligned}$$

Also wird die Sprache $L_1 \cap L_2$ von einem DFA akzeptiert und ist damit regulär. □

Bemerkung

- Sind M_1 und M_2 NFAs, so kann man ebenfalls eine ähnliche Kreuzproduktkonstruktion anwenden und erhält einen NFA für den Schnitt der Sprachen, siehe Zusatzmaterial auf Folien 4.24 ff.
- Sind $M_i = (Z_i, \dots)$ DFAs bzw. NFAs, so kann man also einen DFA bzw. NFA für $L(M_1) \cap L(M_2)$ mit $|Z_1| \cdot |Z_2|$ Zuständen konstruieren.

Satz

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen über Σ sind, dann ist auch $L_1 \cup L_2$ regulär.

Beweis: Für $L \subseteq \Sigma^*$ sei $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$. Wegen

$$L_1 \cup L_2 = \overline{\bar{L}_1 \cap \bar{L}_2}$$

ist die Vereinigung nach den Sätzen auf Folien 4.7 und 4.9 regulär. □

Bemerkungen

- Sind $M_i = (Z_i, \dots)$ DFAs, so kann man also einen DFA für $L(M_1) \cup L(M_2)$ mit $|Z_1| \cdot |Z_2|$ Zuständen konstruieren.
Sind $M_i = (Z_i, \dots)$ hingegen NFAs, so liefert obiger Beweis einen DFA mit $2^{|Z_1|} \cdot 2^{|Z_2|}$ Zuständen.
- alternative Beweisidee: Auch hier kann eine Kreuzproduktion für NFAs betrachtet werden (mit Endzuständen $(E_1 \times Z_2) \cup (Z_1 \times E_2)$).
Sind also $M_i = (Z_i, \dots)$ NFAs, so kann man auch einen NFA für $L(M_1) \cup L(M_2)$ mit $|Z_1| \cdot |Z_2|$ Zuständen konstruieren.
- weitere alternative Beweisidee: Sind $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ NFAs, so betrachte deren „disjunkte Vereinigung“:

$$M = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, S_1 \cup S_2, \gamma, E_1 \cup E_2) \text{ mit}$$

$$\gamma(z, a) = \begin{cases} \delta_1(z, a) & \text{falls } z \in Z_1 \\ \delta_2(z, a) & \text{falls } z \in Z_2 \end{cases}$$

Damit ergibt sich ein NFA für $L(M_1) \cup L(M_2)$ mit $|Z_1| + |Z_2|$ Zuständen (vgl. Zusatzmaterial auf Folien 4.28 ff.)

Satz

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 L_2$ regulär.

Beweis: Es gibt DFAs $M_i = (Z_i, \Sigma, \iota_i, \delta_i, E_i)$ mit $L(M_i) = L_i$ für $i = 1, 2$.
o.B.d.A. $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Wir verknüpfen nun M_1 und M_2 sequentiell zu einem NF

$$\begin{aligned}
 M &= (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, S, \delta, E_2) \text{ mit} \\
 S &= \{\iota_1\} \\
 \delta(z, a) &= \begin{cases} \{\delta_1(z, a)\} & \text{für } z \in Z_1 \text{ mit } \delta_1(z, a) \notin E_1 \\ \{\delta_1(z, a), \iota_2\} & \text{für } z \in Z_1 \text{ mit } \delta_1(z, a) \in E_1 \\ \{\delta_2(z, a)\} & \text{für } z \in Z_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Behauptung: Für alle $z_1 \in Z_1$, $Y \subseteq Z_2$ und $w \in \Sigma^+$ gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(\{z_1\} \cup Y, w) &= \{\widehat{\delta}_1(z_1, w)\} \cup \\ &\quad \{\widehat{\delta}_2(z_2, w) \mid z_2 \in Y\} \cup \\ &\quad \{\widehat{\delta}_2(\iota_2, v) \mid w = uv, u \neq \varepsilon, \delta_1(z_1, u) \in E_1\} \end{aligned}$$

Diese Behauptung kann durch Induktion über $|w|$ gezeigt werden.

Für $w \in \Sigma^+$ erhalten wir also

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\iff \widehat{\delta}(\{\iota_1\} \cup \emptyset, w) \cap E_2 \neq \emptyset \\ &\iff w = uv, u \neq \varepsilon, \widehat{\delta}_1(\iota_1, u) \in E_1, \widehat{\delta}_2(\iota_2, v) \in E_2 \\ &\iff w = uv, u \in L(M_1) \setminus \{\varepsilon\}, v \in L(M_2) \\ &\iff w \in (L_1 \setminus \{\varepsilon\}) \cdot L_2. \end{aligned}$$

Wegen $\varepsilon \notin L(M)$ und $\varepsilon \notin (L_1 \setminus \{\varepsilon\}) \cdot L_2$ folgt daher $(L_1 \setminus \{\varepsilon\}) \cdot L_2 = L(M)$.
q.e.d.

Wir unterscheiden jetzt zwei Fälle:

- $\varepsilon \notin L_1$: dann gilt $L_1 \cdot L_2 = (L_1 \setminus \{\varepsilon\}) \cdot L_2 = L(M)$, nach der Proposition auf Folie 3.21 ist $L_1 \cdot L_2$ also regulär.
- $\varepsilon \in L_1$: dann gilt $L_1 \cdot L_2 = (L_1 \setminus \{\varepsilon\}) \cdot L_2 \cup L_2 = L(M) \cup L_2$. Nach der Proposition auf Folie 3.21 und dem Satz auf Folie 4.14 ist $L_1 \cdot L_2$ also regulär. □

Bemerkung

- Aus zwei DFAs $M_i = (Z_i, \dots)$ kann also ein NFA für $L(M_1) \cdot L(M_2)$ mit $|Z_1| + 2 \cdot |Z_2|$ vielen Zuständen konstruiert werden.
- Auf ähnliche Weise kann ein NFA mit sogar nur $|Z_1| + |Z_2|$ Zuständen für $L(M_1) \cdot L(M_2)$ aus zwei NFAs $M_i = (Z_i, \dots)$ konstruiert werden (siehe Folien 4.31 ff.).

Lemma

Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann ist auch L^+ regulär.

Beweis:

Es gibt einen DFA $M = (Z, \Sigma, \iota, \delta, E)$ mit $L(M) = L$.

Betrachte den NFA $M' = (Z, \Sigma, \{\iota\}, \gamma, E)$ mit

$$\gamma(z, a) = \begin{cases} \{\delta(z, a)\} & \text{falls } \delta(z, a) \notin E \\ \{\delta(z, a), \iota\} & \text{falls } \delta(z, a) \in E \end{cases}$$

Behauptung: Für alle $w \in \Sigma^+$ gilt:

$$\hat{\gamma}(\{\iota\}, w) = \{\hat{\delta}(\iota, w_n) \mid n \geq 1, w = w_1 w_2 \cdots w_n, w_1, \dots, w_{n-1} \in L(M)\}$$

Dies zeigt man per Induktion über $|w|$.

Dann gilt für alle Wörter $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}
 w \in L(M') &\iff \hat{\gamma}(\{\iota\}, w) \cap E \neq \emptyset \\
 &\stackrel{\text{Beh.}}{\iff} \exists n \geq 1, w_1, \dots, w_n \in \Sigma^* : \begin{array}{l} w = w_1 w_2 \dots w_n, \\ w_1, \dots, w_{n-1} \in L(M), \\ \hat{\delta}(\iota, w_n) \in E \end{array} \\
 &\iff \exists n \geq 1, w_1, \dots, w_n \in L(M) : w = w_1 w_2 \dots w_n \\
 &\iff w \in L(M)^+ = L^+
 \end{aligned}$$

Also ist $L^+ = L(M')$ und damit nach der Proposition auf Folie 3.21 regulär. □

Bemerkung

- Aus einem DFA $M = (Z, \dots)$ kann also ein NFA für $L(M)^+$ mit $|Z|$ Zuständen konstruiert werden.
- Auf ähnliche Weise erhält man aus einem NFA $M = (Z, \dots)$ einen NFA für $L(M)^+$ mit $|Z|$ Zuständen (vgl. Folien 4.19 ff.).

Satz

Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann ist auch L^* regulär.

Beweis Nach dem Lemma auf Folie 4.19 ist L^+ regulär.

Auch $\{\varepsilon\}$ ist regulär.

Nach dem Satz auf Folie 4.14 ist damit

$$\{\varepsilon\} \cup L^+ = L^0 \cup \bigcup_{n \geq 1} L^n = L^*$$

regulär. □

Bemerkung

- $\{\varepsilon\}$ kann durch einen NFA mit einem Zustand akzeptiert werden.
- Ist $M = (Z, \dots)$ NFA, so kann also NFA für $L(M)^*$ mit $|Z| + 1$ Zuständen angegeben werden.

Beispielhafte Testfragen aus dieser Vorlesung (andere sind möglich):

- Lückentext „Für eine Sprache L sind äquivalent: 1. ..., 2. ..., 3. ...“
- Lückentext „Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter den folgenden 5 Operationen: ...“

Zusammenfassung 4. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- NFAs, DFAs und rechtslineare Grammatiken sind tatsächlich gleich ausdrucksstark
- Abschluß der Klasse der rechtslinearen Sprachen unter Komplement, Schnitt, Vereinigung, Konkatenation, positiver und Kleene-Iteration. Für die Konstruktionen sind NFAs sehr hilfreich (Konkatenation, Iteration).
- die Größe der konstruierten Automaten hängt ab von Ausgangsautomaten (DFA vs. NFA), Ergebnisautomaten (DFA vs. NFA) und verwendeter Konstruktion (vgl. Schnitt)

kommende Vorlesung

- alternative Beschreibung der rechtslinearen Sprachen mittels regulärer Ausdrücke

Zusatzmaterial

Satz von Folie 4.9

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cap L_2$ regulär.

Beweis:

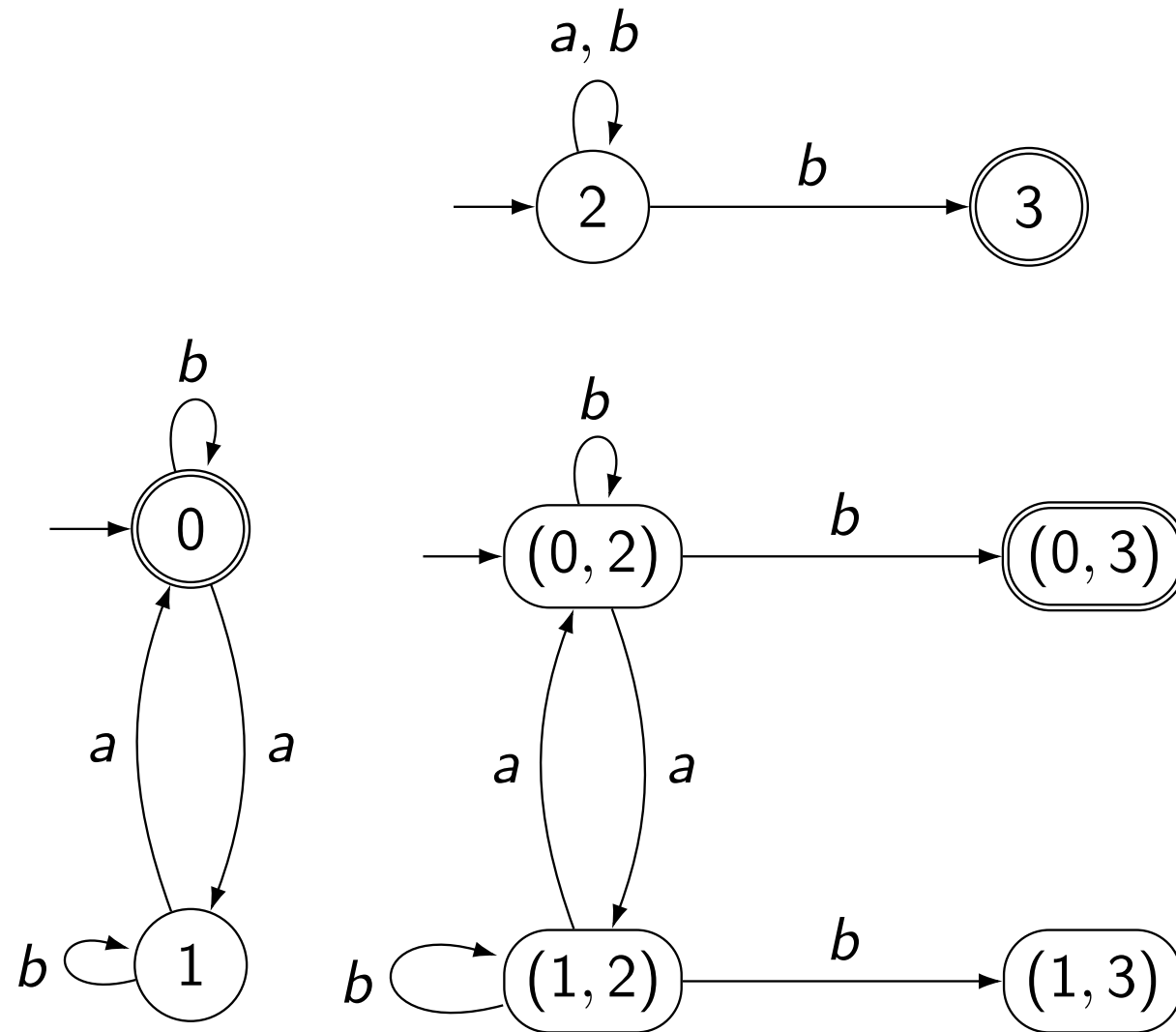
Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ NFAs mit $L(M_i) = L_i$. Wir betrachten den NFA

$$M = (\underbrace{Z_1 \times Z_2}_Z, \Sigma, \underbrace{S_1 \times S_2}_S, \delta, \underbrace{E_1 \times E_2}_E),$$

mit

$$\begin{aligned} \delta((z_1, z_2), a) &= \{(z'_1, z'_2) \mid z'_1 \in \delta_1(z_1, a), z'_2 \in \delta_2(z_2, a)\} \\ &= \delta_1(z_1, a) \times \delta_2(z_2, a). \end{aligned}$$

Bildung des Kreuzprodukts zweier NFAs:



Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z_1 \times Z_2$ und alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}(Y, w) &= \bigcup_{(z_1, z_2) \in Y} \left(\widehat{\delta}_1(\{z_1\}, w) \times \widehat{\delta}_2(\{z_2\}, w) \right) \\ &= \left\{ (z'_1, z'_2) \mid \exists (z_1, z_2) \in Y : z'_1 \in \widehat{\delta}_1(\{z_1\}, w), z'_2 \in \widehat{\delta}_2(\{z_2\}, w) \right\}\end{aligned}$$

(der Beweis erfolgt per Induktion über $|w|$).

Konsequenz: Das Kreuzprodukt der NFS M_1 und M_2 akzeptiert $L(M_1) \cap L(M_2)$.

Nach der Proposition auf Folie 3.21 ist $L(M_1) \cap L(M_2)$ also regulär. □

Satz von Folie 4.14

Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 \cup L_2$ regulär.

Beweis: Es gibt NFAs $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ für $i = 1, 2$ mit $L(M_i) = L_i$.

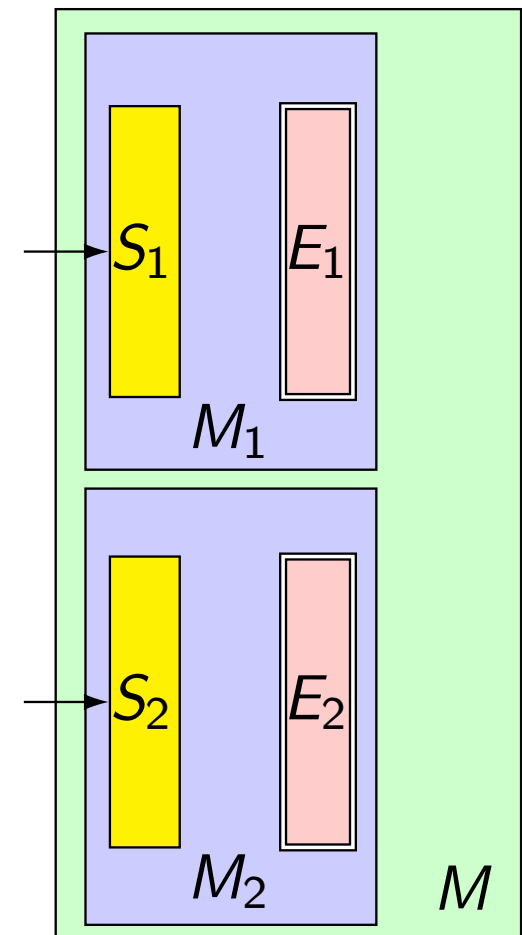
o.B.d.A. $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Wir bauen nun einen NFA M als „disjunkte Vereinigung“ von M_1 und M_2 :

$$M = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, S_1 \cup S_2, \delta, E_1 \cup E_2)$$

wobei

$$\delta(z, a) = \begin{cases} \delta_1(z, a) & \text{für } z \in Z_1 \\ \delta_2(z, a) & \text{für } z \in Z_2 \end{cases}$$



Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z_1 \cup Z_2$ und $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\widehat{\delta}(Y, w) = \widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, w) \cup \widehat{\delta}_2(Y \cap Z_2, w)$$

Wir zeigen diese Behauptung durch Induktion über $|w|$.

IA $w = \varepsilon$. Dann gilt

$$\widehat{\delta}(Y, \varepsilon) = Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2) = \widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, \varepsilon) \cup \widehat{\delta}_2(Y \cap Z_2, \varepsilon)$$

IS Sei $w = av$ ($a \in \Sigma, v \in \Sigma^*$) und gelte die Behauptung für v .

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(Y, av) &= \widehat{\delta}(\delta(Y, a), v) \\ &= \widehat{\delta}\left(\underbrace{\delta_1(Y \cap Z_1, a)}_{\subseteq Z_1} \cup \underbrace{\delta_2(Y \cap Z_2, a)}_{\subseteq Z_2}, v\right) \\ &\stackrel{IV}{=} \widehat{\delta}_1(\delta_1(Y \cap Z_1, a), v) \cup \widehat{\delta}_2(\delta_2(Y \cap Z_2, a), v) \\ &= \widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, av) \cup \widehat{\delta}_2(Y \cap Z_2, av) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}(S_1 \cup S_2, w) \cap (E_1 \cup E_2) &= \underbrace{(\widehat{\delta}_1(S_1, w))}_{\subseteq Z_1} \cup \underbrace{(\widehat{\delta}_2(S_2, w))}_{\subseteq Z_2} \cap (E_1 \cup E_2) \\ &= (\widehat{\delta}_1(S_1, w) \cap E_1) \cup (\widehat{\delta}_2(S_2, w) \cap E_2)\end{aligned}$$

und also

$$\begin{aligned}w \in L(M) &\iff \widehat{\delta}(S_1 \cup S_2, w) \cap (E_1 \cup E_2) \neq \emptyset \\ &\iff \widehat{\delta}_1(S_1, w) \cap E_1 \neq \emptyset \text{ oder } \widehat{\delta}_2(S_2, w) \cap E_2 \neq \emptyset \\ &\iff w \in L(M_1) \text{ oder } w \in L(M_2) \\ &\iff w \in L_1 \cup L_2\end{aligned}$$

Also wird die Sprache $L_1 \cup L_2$ von einem NFA akzeptiert und ist nach der Proposition auf Folie 3.21 damit regulär. □

Satz von Folie 4.16

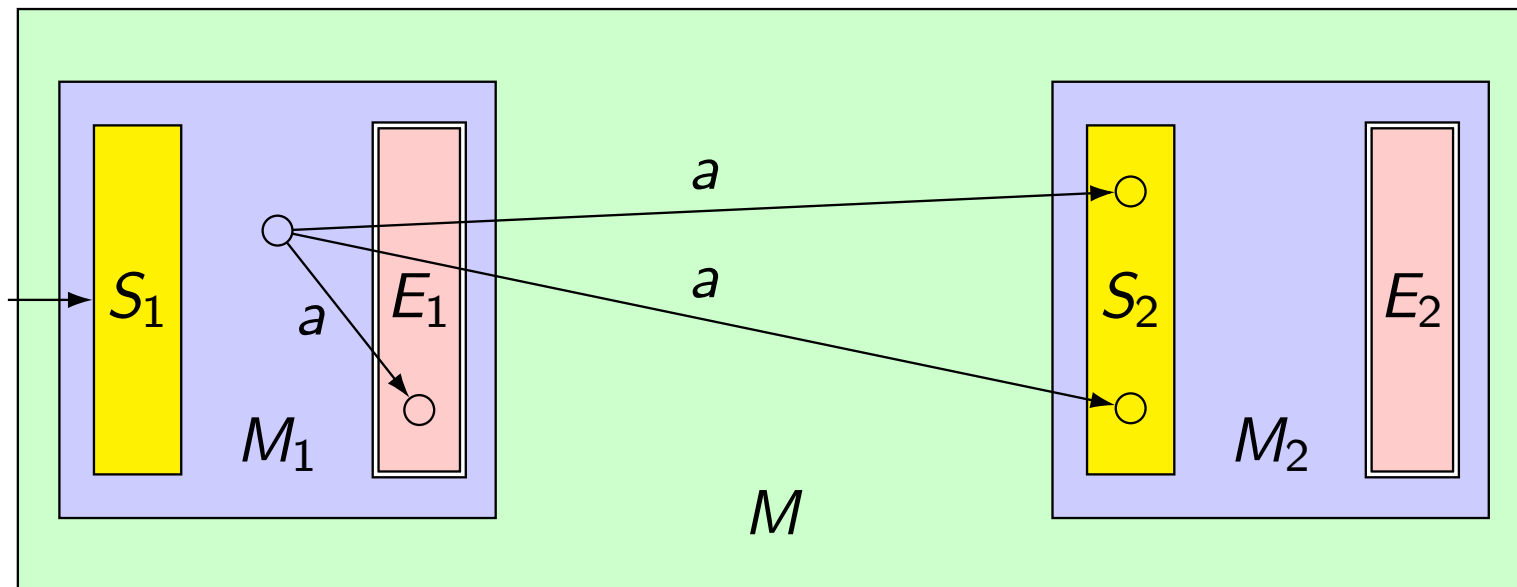
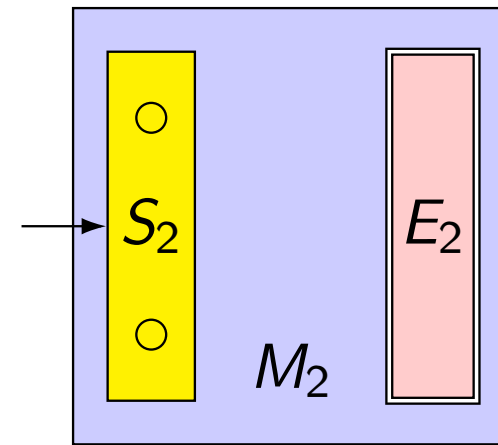
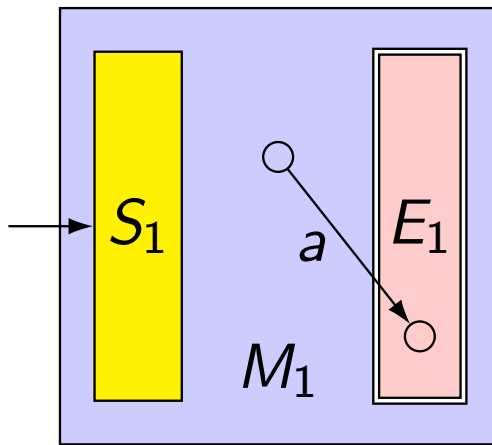
Wenn L_1 und L_2 reguläre Sprachen sind, dann ist auch $L_1 L_2$ regulär.

Beweis: Es gibt NFAs $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ mit $L(M_i) = L_i$ für $i = 1, 2$.
o.B.d.A. $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Wir verknüpfen nun M_1 und M_2 sequentiell zu einem NFA
 $M = (Z_1 \cup Z_2, \Sigma, S, \delta, E_2)$, wobei

$$S = \begin{cases} S_1 & \text{falls } \varepsilon \notin L_1 \\ S_1 \cup S_2 & \text{falls } \varepsilon \in L_1 \end{cases}$$

$$\delta(z, a) = \begin{cases} \delta_2(z, a) & \text{für } z \in Z_2 \\ \delta_1(z, a) & \text{für } z \in Z_1 \text{ mit } \delta_1(z, a) \cap E_1 = \emptyset \\ \delta_1(z, a) \cup S_2 & \text{für } z \in Z_1 \text{ mit } \delta_1(z, a) \cap E_1 \neq \emptyset \end{cases}$$



Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z_1 \cup Z_2$ und $w \in \Sigma^+$ gilt:

$$\widehat{\delta}(Y, w) = \widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, w) \cup \widehat{\delta}_2(Y \cap Z_2, w) \cup \bigcup_{\substack{w=uv, u \neq \varepsilon \\ \widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, u) \cap E_1 \neq \emptyset}} \widehat{\delta}_2(S_2, v)$$

Wir zeigen diese Behauptung durch Induktion über $|w|$:

IA Sei $a \in \Sigma$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(Y, a) &= \bigcup_{z \in Y} \delta(z, a) \\ &= \bigcup_{z \in Y \cap Z_1} \delta_1(z, a) \cup \bigcup_{z \in Y \cap Z_2} \delta_2(z, a) \\ &\quad \cup \begin{cases} S_2 & \text{falls } \exists z \in Y \cap Z_1 : \delta_1(z, a) \cap E_1 \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, a) \cup \widehat{\delta}_2(Y \cap Z_2, a) \cup \bigcup_{\widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, a) \cap E_1 \neq \emptyset} \widehat{\delta}_2(S_2, \varepsilon) \end{aligned}$$

IS Es ist $\widehat{\delta}(Y, aw)$ gleich

$$\begin{aligned}
 &= \widehat{\delta}\left(\overbrace{\widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, a) \cup \widehat{\delta}_2(Y \cap Z_2, a) \cup \bigcup_{\widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, a) \cap E_1 \neq \emptyset} \widehat{\delta}_2(S_2, \varepsilon)}^{=: H}, w\right) \\
 &\stackrel{\text{IV}}{=} \widehat{\delta}_1(H \cap Z_1, w) \cup \widehat{\delta}_2(H \cap Z_2, w) \cup \bigcup_{\substack{w=uv, u \neq \varepsilon \\ \widehat{\delta}_1(H \cap Z_1, u) \cap E_1 \neq \emptyset}} \widehat{\delta}_2(S_2, v) \\
 &= \widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, aw) \cup \widehat{\delta}_2(Y \cap Z_2, aw) \\
 &\quad \cup \widehat{\delta}_2\left(\bigcup_{\widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, a) \cap E_1 \neq \emptyset} S_2, w\right) \cup \bigcup_{\substack{w=uv, u \neq \varepsilon \\ \widehat{\delta}_1(Y \cap Z_1, au) \cap E_1 \neq \emptyset}} \widehat{\delta}_2(S_2, v)
 \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Für $w \in \Sigma^+$ erhalten wir also

$$\begin{aligned}
 w \in L(M) &\iff \widehat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \\
 &\iff \widehat{\delta}_2(S \cap S_2, w) \cap E_2 \neq \emptyset \\
 &\quad \text{oder } w = uv, u \neq \varepsilon, \widehat{\delta}_1(S \cap S_1, u) \cap E_1 \neq \emptyset, \\
 &\quad \widehat{\delta}_2(S_2, v) \cap E_2 \neq \emptyset \\
 &\iff w = uv, u \in L(M_1), v \in L(M_2) \\
 &\iff w \in L_1 \cdot L_2.
 \end{aligned}$$

Für $w = \varepsilon$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\varepsilon \in L(M) &\iff S \cap E_2 \neq \emptyset \\ &\iff S_1 \cap E_2 \neq \emptyset \text{ oder } (\varepsilon \in L(M_1) \text{ und } S_2 \cap E_2 \neq \emptyset) \\ &\iff \varepsilon \in L(M_1) \text{ und } \varepsilon \in L(M_2) \\ &\iff \varepsilon \in L(M_1) \cdot L(M_2) = L_1 \cdot L_2.\end{aligned}$$

Also ist $L_1 \cdot L_2 = L(M)$ und damit nach der Proposition auf Folie 3.21 tatsächlich regulär. □

Lemma von Folie 4.19

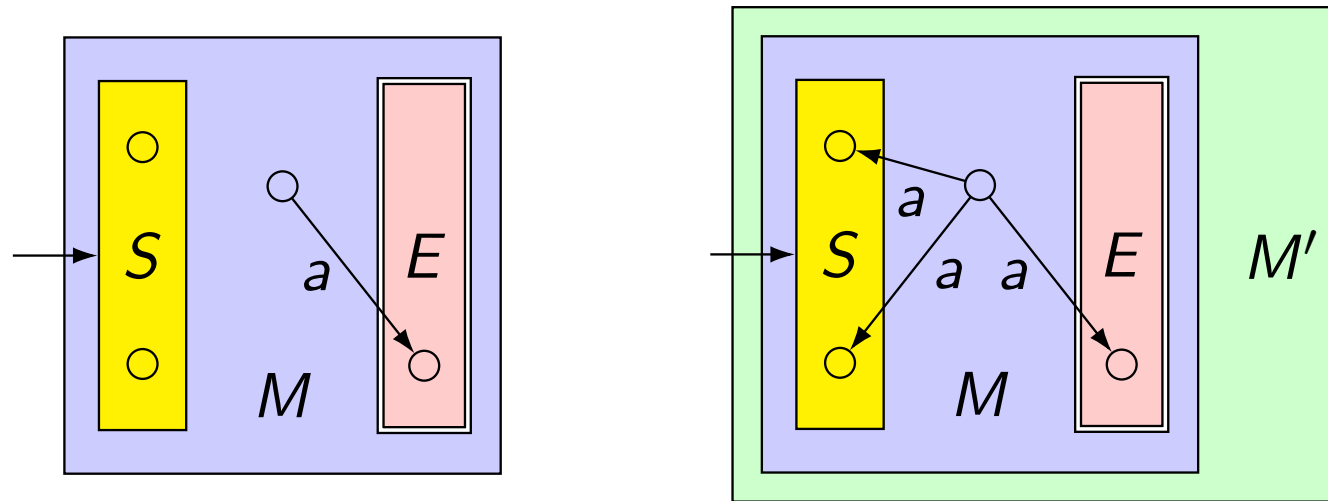
Wenn L eine reguläre Sprache ist, dann ist auch L^+ regulär.

Beweis:

Es gibt einen NFA $M = (Z, \Sigma, S, \delta, E)$ mit $L(M) = L$.

Betrachte den NFA $M' = (Z, \Sigma, S, \delta', E)$ mit

$$\delta'(z, a) = \begin{cases} \delta(z, a) & \text{falls } \delta(z, a) \cap E = \emptyset \\ \delta(z, a) \cup S & \text{sonst} \end{cases}$$



Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z$ und $w \in \Sigma^+$ gilt:

$$\hat{\delta}'(Y, w) = \hat{\delta}(Y, w) \cup \bigcup_{(*)} \hat{\delta}(S, u_n)$$

wobei die Vereinigung $(*)$ über alle $n \geq 1$ und $w = u_1 u_2 \dots u_n$ läuft mit $\hat{\delta}(Y, u_1) \cap E \neq \emptyset$ und $u_2, \dots, u_{n-1} \in L(M)$.

Dies zeigt man per Induktion über $|w|$.

Dann gilt für alle Wörter $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}
 w \in L(M') &\iff \widehat{\delta}'(S, w) \cap E \neq \emptyset \\
 &\stackrel{\text{Beh.}}{\iff} \exists n \geq 1, u_1, \dots, u_n \in \Sigma^* : \begin{aligned} &w = u_1 u_2 \dots u_n, \\ &\widehat{\delta}(S, u_1) \cap E \neq \emptyset, \\ &u_2, \dots, u_{n-1} \in L(M), \\ &\widehat{\delta}(S, u_n) \cap E \neq \emptyset \end{aligned} \\
 &\iff \exists n \geq 1, u_1, \dots, u_n \in L(M) : w = u_1 u_2 \dots u_n \\
 &\iff w \in L(M)^+ = L^+
 \end{aligned}$$

Also ist $L^+ = L(M')$ und damit nach der Proposition auf Folie 3.21 regulär. □