

Automaten und Formale Sprachen

12. Vorlesung



Prof. Dr. Dietrich Kuske



FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2024/25

Von Grammatiken zu PDAs

Konstruktion

Sei $G = (V, \Sigma, S, P)$ eine kontextfreie Grammatik in Greibach-Normalform. Konstruiere den PDA $M_G = (Z, \Sigma, \Gamma, \iota, \delta, \#)$:

- $Z = \{\iota\}$... es gibt nur einen Zustand
- $\Gamma = V$... die Nichtterminale der Grammatik bilden das Kellularphabet
- für $A \in V, a \in \Sigma$:
 $\delta(\iota, a, A) = \{(\iota, B_1 \dots B_k) \mid (A \rightarrow aB_1 \dots B_k) \in P\}$
 $\delta(\iota, \varepsilon, A) = \emptyset$ für $A \in V$... es gibt keine ε -Transitionen
- $\# = S$... das Kellerinitialisierungssymbol ist das Startsymbol der Grammatik

Ziel

$$L(M_G) = L(G)$$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

Linksableitung

$$S \Rightarrow_G 0SE$$

PDA-Berechnung

$$(\iota, 001011, S) \vdash (\iota, 01011, SE)$$

$$(S \rightarrow 0SE) \in P, \text{ also } (\iota, SE) \in \delta(\iota, 0, S)$$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

Linksableitung

$$\begin{aligned} S &\Rightarrow_G 0SE \\ &\Rightarrow_G 00ESE \end{aligned}$$

PDA-Berechnung

$$\begin{aligned} (\iota, 001011, S) &\vdash (\iota, 01011, SE) \\ &\vdash (\iota, 1011, ESE) \end{aligned}$$

$$(S \rightarrow 0ES) \in P, \text{ also } (\iota, ES) \in \delta(\iota, 0, S)$$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

Linksableitung		PDA-Berechnung	
S	$\Rightarrow_G 0SE$	$(\iota, 001011, S)$	$\vdash (\iota, 01011, SE)$
	$\Rightarrow_G 00ESE$		$\vdash (\iota, 1011, ESE)$
	$\Rightarrow_G 001SE$		$\vdash (\iota, 011, SE)$

$(E \rightarrow 1) \in P$, also $(\iota, \varepsilon) \in \delta(\iota, 1, E)$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

Linksableitung		PDA-Berechnung	
S	$\Rightarrow_G 0SE$	$(\iota, 001011, S)$	$\vdash (\iota, 01011, SE)$
	$\Rightarrow_G 00ESE$		$\vdash (\iota, 1011, ESE)$
	$\Rightarrow_G 001SE$		$\vdash (\iota, 011, SE)$
	$\Rightarrow_G 0010EE$		$\vdash (\iota, 11, EE)$

$(S \rightarrow 0E) \in P$, also $(\iota, E) \in \delta(\iota, 0, S)$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

Linksableitung		PDA-Berechnung	
S	$\Rightarrow_G 0SE$	$(\iota, 001011, S)$	$\vdash (\iota, 01011, SE)$
	$\Rightarrow_G 00ESE$		$\vdash (\iota, 1011, ESE)$
	$\Rightarrow_G 001SE$		$\vdash (\iota, 011, SE)$
	$\Rightarrow_G 0010EE$		$\vdash (\iota, 11, EE)$
	$\Rightarrow_G 00101E$		$\vdash (\iota, 1, E)$

$(E \rightarrow 1) \in P$, also $(\iota, \varepsilon) \in \delta(\iota, 1, E)$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

Linksableitung		PDA-Berechnung	
S	$\Rightarrow_G 0SE$	$(\iota, 001011, S)$	$\vdash (\iota, 01011, SE)$
	$\Rightarrow_G 00ESE$		$\vdash (\iota, 1011, ESE)$
	$\Rightarrow_G 001SE$		$\vdash (\iota, 011, SE)$
	$\Rightarrow_G 0010EE$		$\vdash (\iota, 11, EE)$
	$\Rightarrow_G 00101E$		$\vdash (\iota, 1, E)$
	$\Rightarrow_G 001011$		$\vdash (\iota, \varepsilon, \varepsilon)$

$(E \rightarrow 1) \in P$, also $(\iota, \varepsilon) \in \delta(\iota, 1, E)$

Lemma

$$L(G) \subseteq L(M_G).$$

Beweis:

Sei $w \in L(G)$. Dann hat w eine Linksableitung

$$S = \alpha_0 \Rightarrow_G \alpha_1 \Rightarrow_G \cdots \Rightarrow_G \alpha_t = w.$$

Da G in Greibach-Normalform ist, haben alle Regeln die Form $A \rightarrow aB_1 \cdots B_k$. Also existieren $a_1, a_2, \dots, a_t \in \Sigma$ und $\gamma_0, \dots, \gamma_t \in V^*$ mit

$$\alpha_i = a_1 a_2 \cdots a_i \gamma_i \text{ für alle } 0 \leq i \leq t.$$

Insbesondere gelten also $S = \alpha_0 = \varepsilon \gamma_0$ und $a_1 \cdots a_t \gamma_t = \alpha_t = w \in \Sigma^*$, also $\gamma_0 = S$, $w = a_1 \cdots a_t$ und $\gamma_t = \varepsilon$.

Behauptung: Für alle $0 \leq i < t$ gilt

$$(\iota, a_{i+1} \cdots a_t, \gamma_i) \vdash (\iota, a_{i+2} \cdots a_t, \gamma_{i+1}).$$

Beweis der Behauptung:

$$a_1 \cdots a_i \gamma_i = \alpha_i \implies_G \alpha_{i+1} = a_1 \cdots a_{i+1} \gamma_{i+1}$$

ist Schritt in einer Linksableitung. Also existieren $(A \rightarrow a_{i+1} B_1 \cdots B_k) \in P$ und $\eta_i \in V^*$ mit $\gamma_i = A\eta_i$ und $\gamma_{i+1} = B_1 \cdots B_k \eta_i$. Also gilt $(\iota, B_1 \cdots B_k) \in \delta(\iota, a_{i+1}, A)$ und damit

$$\begin{aligned} (\iota, a_{i+1} \cdots a_t, \gamma_i) &= (\iota, a_{i+1} \cdots a_t, A\eta_i) \\ &\vdash (\iota, a_{i+2} \cdots a_t, B_1 \cdots B_k \eta_i) \\ &= (\iota, a_{i+2} \cdots a_t, \gamma_{i+1}). \end{aligned}$$

q.e.d.

Da die Behauptung für alle $0 \leq i < t$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}(\iota, w, S) &= (\iota, a_1 \dots a_t, \gamma_0) \text{ nach Folie 12.4 unten} \\ &\vdash (\iota, a_2 \dots a_t, \gamma_1) \\ &\vdash (\iota, a_3 \dots a_t, \gamma_2) \\ &\vdots \\ &\vdash (\iota, \varepsilon, \gamma_t) \\ &= (\iota, \varepsilon, \varepsilon) \text{ nach Folie 12.4 unten}\end{aligned}$$

und damit $w \in L(M_G)$.



Lemma

$$L(M_G) \subseteq L(G).$$

Beweis:

Sei $w \in L(M_G)$. Dann existieren $t \in \mathbb{N}$ und Konfigurationen (ι, w_i, γ_i) für $0 \leq i \leq t$, so daß

- $(\iota, w_0, \gamma_0) = (\iota, w, S)$,
- $(\iota, w_i, \gamma_i) \vdash (\iota, w_{i+1}, \gamma_{i+1})$ für alle $0 \leq i < t$ und
- $(\iota, w_t, \gamma_t) = (\iota, \varepsilon, \varepsilon)$.

Da der PDA M_G keine ε -Transitionen hat, existieren Buchstaben $a_1, \dots, a_t \in \Sigma$ mit $w_i = a_{i+1} w_{i+1}$, also insbesondere $w = w_0 = a_1 a_2 \cdots a_t$.

Behauptung: Für alle $0 \leq i < t$ gilt

$$a_1 a_2 \cdots a_i \gamma_i \Rightarrow_G a_1 a_2 \cdots a_{i+1} \gamma_{i+1} .$$

Beweis der Behauptung:

Es gilt

$$(\iota, a_{i+1} w_{i+1}, \gamma_i) = (\iota, w_i, \gamma_i) \vdash (\iota, w_{i+1}, \gamma_{i+1}) .$$

Also existieren $\eta_i \in V^*$ und $A, B_1, \dots, B_k \in V$ mit

$$\gamma_i = A\eta_i, \quad (\iota, B_1 \cdots B_k) \in \delta(\iota, a_{i+1}, A) \text{ und } \gamma_{i+1} = B_1 \cdots B_k \eta_i .$$

Damit haben wir aber $(A \rightarrow a_{i+1} B_1 \cdots B_k) \in P$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} a_1 \cdots a_i \gamma_i &= a_1 \cdots a_i A \eta_i \\ &\Rightarrow_G a_1 \cdots a_i a_{i+1} B_1 \cdots B_k \eta_i \\ &= a_1 \cdots a_{i+1} \gamma_{i+1} \end{aligned}$$

q.e.d.

Da die Behauptung für alle $0 \leq i < t$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} S &= \gamma_0 \text{ nach Folie 12.7} \\ &\Rightarrow_G a_1 \gamma_1 \\ &\Rightarrow_G a_1 a_2 \gamma_2 \\ &\quad \vdots \\ &\Rightarrow_G a_1 \dots a_t \gamma_t \\ &= w \text{ nach Folie 12.7} \end{aligned}$$

und damit $w \in L(G)$



Proposition

Jede kontextfreie Sprache L ist Sprache eines PDA M mit nur einem Zustand. Gilt $\varepsilon \notin L$, so werden keine ε -Transitionen benötigt.

Beweis:

Sei L kontextfrei. Dann existiert eine Grammatik $G = (V, \Sigma, S, P)$ in Greibach-Normalform mit $L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$. Nach den beiden gezeigten Lemmata existiert ein PDA M mit einem Zustand, ohne ε -Transitionen und mit $L(M) = L(G) = L \setminus \{\varepsilon\}$. Gilt $\varepsilon \notin L$, so ist Proposition bewiesen.

Angenommen, $\varepsilon \in L$.

Wir können o.E. annehmen, daß S auf keiner rechten Seite einer Regel aus G vorkommt. Dann wird der Kellerautomat M_G das Kellerinitialisierungssymbol S im ersten Schritt auf dem Keller ersetzen und niemals wieder auf den Keller schreiben. Fügt man die Transition $\delta(\iota, \varepsilon, S) = \{(\iota, \varepsilon)\}$ zu M_G hinzu, so erhält man einen PDA M'_G mit $L(M'_G) = L(M_G) \cup \{\varepsilon\} = L(G) \cup \{\varepsilon\} = L \setminus \{\varepsilon\} \cup \{\varepsilon\} = L$. □

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

PDA-Berechnung
 $(\iota, 001011, S)$

Ableitungsbaum
 S

Beispiel: G hat die Regeln

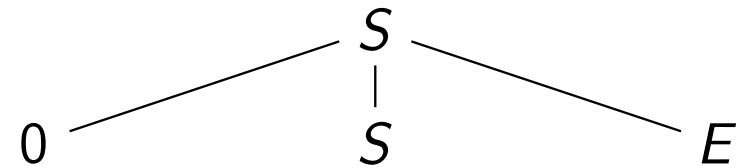
$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

PDA-Berechnung

$(\iota, 001011, S)$

$\vdash (\iota, 01011, SE)$

Ableitungsbaum



$$(S \rightarrow 0SE) \in P$$

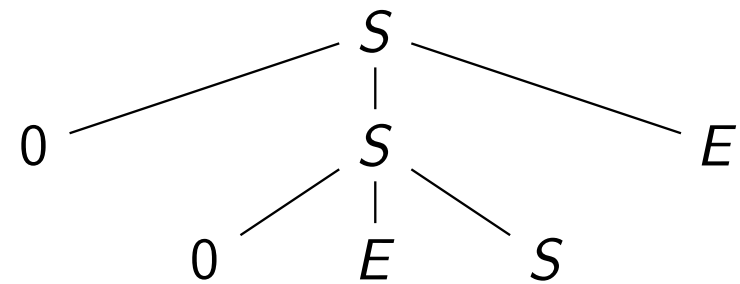
Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

PDA-Berechnung

$$(\iota, 001011, S)$$
$$\vdash (\iota, 01011, SE)$$
$$\vdash (\iota, 1011, ESE)$$

Ableitungsbaum



$$(S \rightarrow 0ES) \in P$$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

PDA-Berechnung

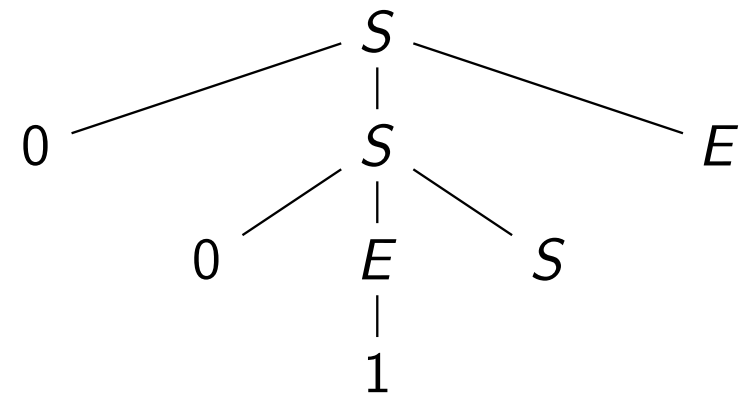
$(\iota, 001011, S)$

$\vdash (\iota, 01011, SE)$

$\vdash (\iota, 1011, ESE)$

$\vdash (\iota, 011, SE)$

Ableitungsbaum



$(E \rightarrow 1) \in P$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

PDA-Berechnung

$(\iota, 001011, S)$

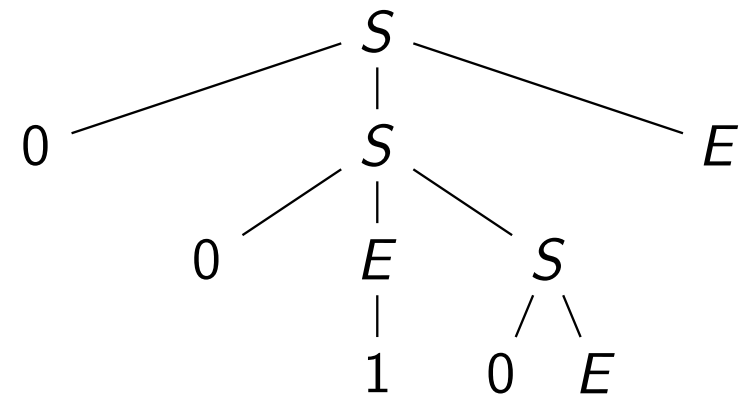
$\vdash (\iota, 01011, SE)$

$\vdash (\iota, 1011, ESE)$

$\vdash (\iota, 011, SE)$

$\vdash (\iota, 11, EE)$

Ableitungsbaum



$$(S \rightarrow 0E) \in P$$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

PDA-Berechnung

$(\iota, 001011, S)$

$\vdash (\iota, 01011, SE)$

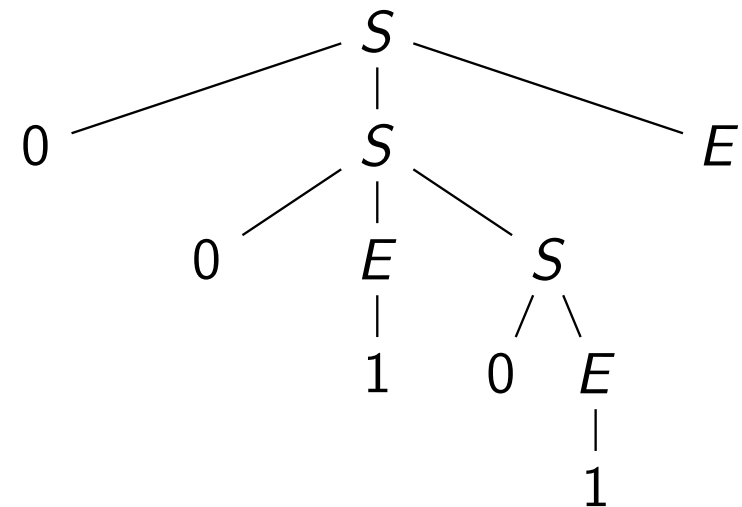
$\vdash (\iota, 1011, ESE)$

$\vdash (\iota, 011, SE)$

$\vdash (\iota, 11, EE)$

$\vdash (\iota, 1, E)$

Ableitungsbaum



$(E \rightarrow 1) \in P$

Beispiel: G hat die Regeln

$$S \rightarrow 0SES \mid 0ES \mid 0SE \mid 0E \text{ und } E \rightarrow 1$$

PDA-Berechnung

$(\iota, 001011, S)$

$\vdash (\iota, 01011, SE)$

$\vdash (\iota, 1011, ESE)$

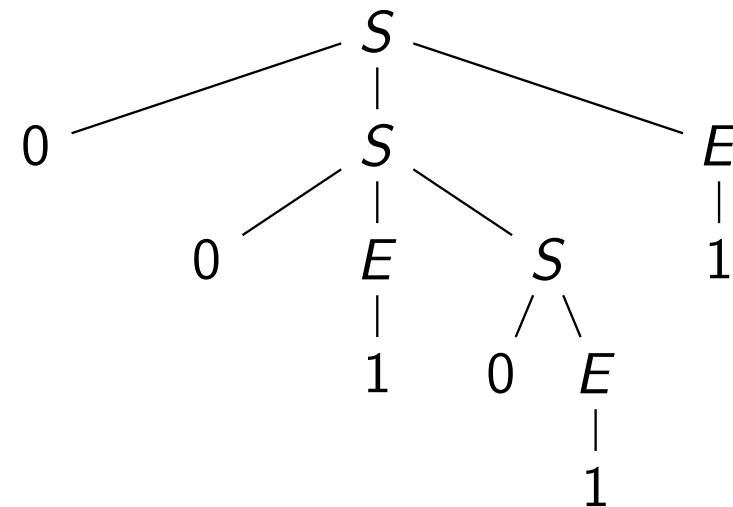
$\vdash (\iota, 011, SE)$

$\vdash (\iota, 11, EE)$

$\vdash (\iota, 1, E)$

$\vdash (\iota, \varepsilon, \varepsilon)$

Ableitungsbaum



$(E \rightarrow 1) \in P$

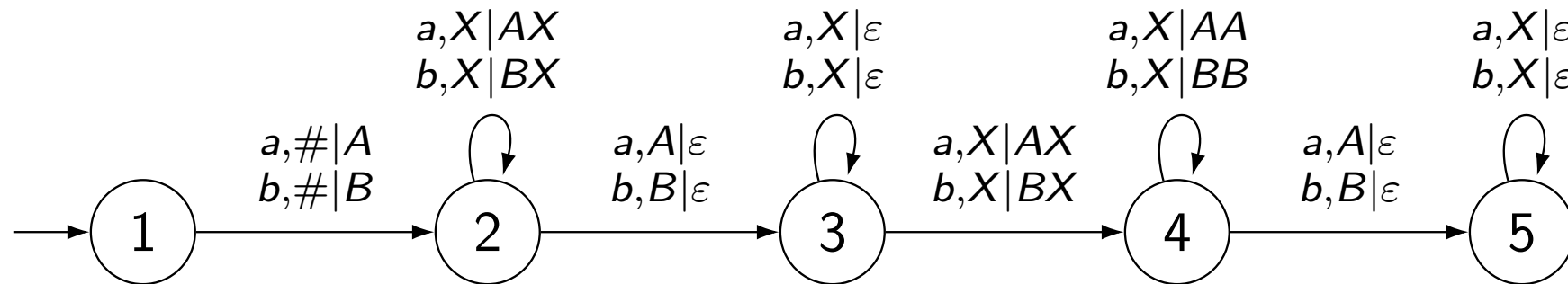
Bemerkungen:

- vorgestellte Methode heißt **LL-Parsing**: Berechnungen des PDA entsprechen Linksableitungen und Wort wird von links nach rechts gelesen
oder **Top-Down-Parsing**: Ableitungsbaum wird an der Wurzel beginnend erzeugt.
- Aus Grammatik-Regeln $A \rightarrow aU \mid aV$ entsteht der Nichtdeterminismus $(\iota, U), (\iota, V) \in \delta(\iota, a, A)$. **LL(1)-Grammatiken** enthalten keine solche Regeln, so daß M_G deterministisch wird - und erlauben, die Frage „Wird das Wort w von der Grammatik G erzeugt?“ in linearer Zeit zu beantworten.
- allgemeiner: in **LL(k)-Grammatiken** legen die nächsten k zu lesenden Buchstaben fest, welche Regel angewandt wird - auch dann kann man deterministischen PDA konstruieren.
- **LR-Parsing** oder **Bottom-Up-Parsing** sind alternative Methoden, einen PDA aus einer kontextfreien Grammatik zu konstruieren, auch **LR(k)-Grammatiken** führen zu deterministischen PDAs.

Von PDAs zu Grammatiken

Beispiel:

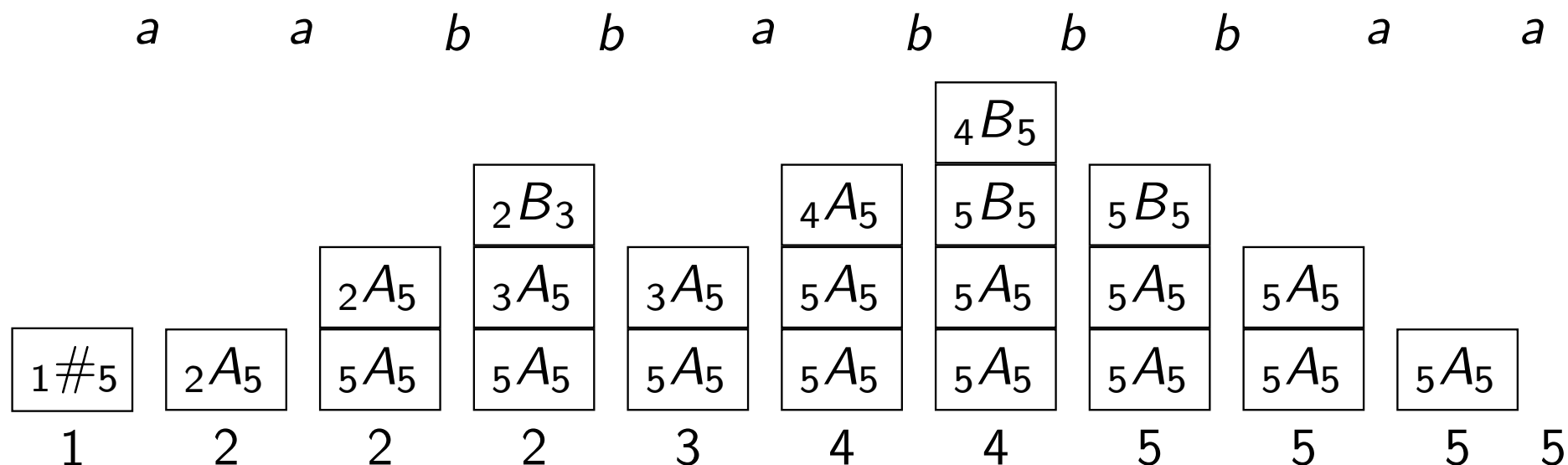
PDA M : (hierbei steht X für ein beliebiges Kellersymbol aus $\{A, B\}$)



eine akzeptierende Berechnung:

$(1, aabbabbbbaa, \#)$	$\vdash (2, abbabbbbaa, A)$	$\vdash (2, bbabbbbaa, AA)$
	$\vdash (2, babbbbaa, BAA)$	$\vdash (3, abbbbaa, AA)$
	$\vdash (4, bbbbaa, AAA)$	$\vdash (4, bbaa, BBAA)$
	$\vdash (5, baa, BAA)$	$\vdash (5, aa, AA)$
	$\vdash (5, a, A)$	$\vdash (5, \varepsilon, \varepsilon)$

die akzeptierende Berechnung nochmal anders hingeschrieben:



Bedeutung von $\boxed{iX_j}$:

- X ... Kellersymbol
- i ... dieses Symbol wird im Zustand i ersetzt werden
- j ... sobald der Keller das erste Mal echt kürzer sein wird, befindet der PDA sich im Zustand j

Ableitung der zu konstruierenden Grammatik:

$$\begin{aligned}
 S &\Rightarrow \boxed{1\#5} \\
 &\Rightarrow a \boxed{2A_5} \\
 &\Rightarrow aa \boxed{2A_5} \boxed{5A_5} \\
 &\Rightarrow aab \boxed{2B_3} \boxed{3A_5} \boxed{5A_5} \\
 &\Rightarrow aabb \boxed{3A_5} \boxed{5A_5} \\
 &\Rightarrow aabba \boxed{4A_5} \boxed{5A_5} \boxed{5A_5} \\
 &\Rightarrow aabbab \boxed{4B_5} \boxed{5B_5} \boxed{5A_5} \boxed{5A_5} \\
 &\Rightarrow aabbabb \boxed{5B_5} \boxed{5A_5} \boxed{5A_5} \\
 &\Rightarrow aabbabbb \boxed{5A_5} \boxed{5A_5} \\
 &\Rightarrow aabbabbba \boxed{5A_5} \\
 &\Rightarrow aabbabbbaa
 \end{aligned}$$

Ziel / Idee

kontextfreie Grammatik G , so daß für alle $w \in \Sigma^*$:

$$(i, w, A) \vdash^* (j, \varepsilon, \varepsilon) \text{ gdw. } \boxed{iA_j} \Rightarrow_G^* w$$

Schreibweise

Im Folgenden schreiben wir (i, A, j) an Stelle von $\boxed{iA_j}$ (um doppelte Indizes zu vermeiden).

Konstruktion („Tripel-Konstruktion“)

Sei $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \#)$ ein PDA. Konstruiere die kontextfreie Grammatik $G_M = (V, \Sigma, P, S)$:

- $V = \{S\} \cup (Z \times \Gamma \times Z)$
- Wir haben die folgenden Produktionen:
 - $S \rightarrow (\iota, \#, z)$ für alle $z \in Z$
 - $(z, A, z_k) \rightarrow a(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \dots (z_{k-1}, B_k, z_k)$ für alle $z, z_0, z_1, \dots, z_k \in Z, A \in \Gamma$ und $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ mit $(z_0, B_1 B_2 \dots B_k) \in \delta(z, a, A)$

Insbesondere wird aus der Transition $(z_0, \varepsilon) \in \delta(z, a, A)$ wegen $k = 0$ und damit $z_k = z_0$ die Produktion

$$(z, A, z_0) \rightarrow a$$

Für jede Transition $(z_0, B_1 B_2 \cdots B_k) \in \delta(z, a, A)$ und alle Zustände $z_1, \dots, z_{k-1}, z_k$ bilde die folgende Regel der Grammatik:

$$(z, A, z_k) \rightarrow a(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2)(z_2, B_3, z_3) \cdots (z_{k-1}, B_k, z_k)$$

1. Schreibe die Transition als Muster der Regel auf.
2. Schließe die Lücken vor den Nichtterminalen B_2 bis B_k durch beliebige Zustände z_1 bis z_{k-1} und die Lücke hinter A durch beliebigen Zustand z_k .
3. Schließe die Lücken hinter B_1 bis B_{k-1} durch die folgenden Zustände z_1 bis z_{k-1} und die Lücke hinter B_k durch den Zustand z_k .

Lemma

Für alle $z_0, z_1, z_2, z_3, \dots, z_\ell \in Z$, $B_1, B_2, \dots, B_\ell \in \Gamma$ und $w \in \Sigma^*$ mit

$$(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \Longrightarrow_{G_M}^* w$$

gilt

$$(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_\ell) \vdash^* (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon).$$

Beweis: per Induktion über die Länge n der Ableitung.

IA $n = 0$: Dann gilt

$$(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) = w,$$

also $\ell = 0$ und $w = \varepsilon$ und damit

$$(z_0, w, B_1 \cdots B_\ell) = (z_0, \varepsilon, \varepsilon) = (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon).$$

IS Gelte $(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_{\ell}, z_{\ell}) \Rightarrow_{G_M}^{n+1} w$.

Wir betrachten eine Linksableitung der Länge $n + 1$. Aufgrund der Gestalt der Produktionen der Grammatik G_M hat diese die Form

$$\begin{aligned} & (z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_{\ell}, z_{\ell}) \\ \Rightarrow_{G_M} & a(z'_0, C_1, z'_1)(z'_1, C_2, z'_2) \cdots (z'_{k-1}, C_k, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_{\ell}, z_{\ell}) \\ \Rightarrow_{G_M}^n & w. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $(z_0, B_1, z_1) \rightarrow a(z'_0, C_1, z'_1)(z'_1, C_2, z'_2) \cdots (z'_{k-1}, C_k, z_1)$ eine Produktion, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ und $w = aw'$ für ein Wort $w' \in \Sigma^*$.

Nach Konstruktion der Grammatik G_M erhalten wir

$$(z'_0, C_1 C_2 \cdots C_k) \in \delta(z_0, a, B_1),$$

also

$$(z_0, aw', B_1 \cdots B_{\ell}) \vdash (z'_0, w', C_1 \cdots C_k B_2 \cdots B_{\ell}).$$

Wir haben auch

$$(z'_0, C_1, z'_1) \cdots (z'_{k-1}, C_k, z_1) (z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \Longrightarrow_{G_M}^n w'.$$

Nach der IV folgt

$$(z'_0, w', C_1 C_2 \cdots C_k B_2 B_3 \cdots B_\ell) \vdash^* (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (z_0, w, B_1 \cdots B_\ell) &= (z_0, aw', B_1 \cdots B_\ell) \\ &\vdash (z'_0, w', C_1 \cdots C_k B_2 \cdots B_\ell) \\ &\vdash^* (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon). \end{aligned}$$



Lemma

Für alle $z_0, z_\ell \in Z$, $B_1, B_2, \dots, B_\ell \in \Gamma$ und $w \in \Sigma^*$ mit

$$(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_\ell) \vdash^* (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)$$

existieren Zustände $z_1, z_2, \dots, z_{\ell-1}$ mit

$$(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) \Longrightarrow_{G_M}^* w$$

Beweis: per Induktion über die Länge n der Berechnung.

IA $n = 0$: Dann gelten $(z_0, w, B_1 \cdots B_\ell) = (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)$, also

$$(z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_\ell, z_\ell) = \varepsilon \Longrightarrow_{G_M}^* \varepsilon = w$$

IS Gelte $(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_\ell) \vdash^{n+1} (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon)$.

Dann existiert eine Konfiguration $(z'_0, w', C_1 C_2 \cdots C_k)$ mit

$$(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_\ell) \vdash (z'_0, w', C_1 C_2 \cdots C_k B_2 B_3 \cdots B_\ell) \vdash^n (z_\ell, \varepsilon, \varepsilon).$$

Nach IV existieren Zustände $z'_1, z'_2, \dots, z'_{k-1}, z_1, z_2, \dots, z_{\ell-1}$ mit

$$(z'_0, C_1, z'_1)(z'_1, C_2, z'_2) \cdots (z'_{\ell-1}, C_{\ell}, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_{\ell}, z_{\ell}) \Rightarrow_{G_M}^* w'$$

Wegen

$$(z_0, w, B_1 B_2 \cdots B_{\ell}) \vdash (z'_0, w', C_1 C_2 \cdots C_k B_2 B_3 \cdots B_{\ell})$$

existiert $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ mit $(z'_0, C_1 \cdots C_k) \in \delta(z_0, a, B_1)$ und $w = aw'$.

Nach Konstruktion der Grammatik G_M erhalten wir die Produktion

$$(z_0, B_1, z_1) \rightarrow a(z'_0, C_1, z'_1)(z'_1, C_2, z'_2) \cdots (z'_{\ell-1}, C_{\ell}, z_1).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} & (z_0, B_1, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_{\ell}, z_{\ell}) \\ \Rightarrow_{G_M} & a(z'_0, C_1, z'_1)(z'_1, C_2, z'_2) \cdots (z'_{\ell-1}, C_{\ell}, z_1)(z_1, B_2, z_2) \cdots (z_{\ell-1}, B_{\ell}, z_{\ell}) \\ \Rightarrow_{G_M}^* & aw' = w. \end{aligned}$$



Proposition

Ist $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, \iota, \#)$ ein PDA, so ist $L(M)$ kontextfrei.

Beweis: Wir zeigen zunächst $L(M) \subseteq L(G_M)$: Sei $w \in L(M)$. Dann existiert $z' \in Z$ mit $(\iota, w, \#) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} S &\Longrightarrow_{G_M} (\iota, \#, z') && \text{(nach Konstruktion von } G_M) \\ &\Longrightarrow_{G_M}^* w && \text{(nach Lemma auf Folie 12.19).} \end{aligned}$$

Also gilt $w \in L(G_M)$, d.h. $L(M) \subseteq L(G_M)$.

Wir zeigen jetzt $L(M) \supseteq L(G_M)$:

Sei $w \in L(G_M)$.

Dann existiert $z' \in Z$ mit $S \xRightarrow{G_M} (\iota, \#, z') \xRightarrow{*}_{G_M} w$.

Aus dem Lemma auf Folie 12.22 folgt $(\iota, w, \#) \vdash^* (z', \varepsilon, \varepsilon)$ und damit $w \in L(M)$. □

Satz

Sei L eine Sprache. Dann sind äquivalent:

- (1) L ist kontextfrei.
- (2) Es gibt einen PDA M mit $L(M) = L$.
- (3) Es gibt einen PDA M mit nur einem Zustand und $L(M) = L$.

Gilt $\varepsilon \notin L$, so sind diese Aussagen äquivalent zu

- (4) Es gibt einen PDA M mit nur einem Zustand und ohne ε -Transitionen, so daß $L(M) = L$ gilt.

Beweis:

- (1) $\Rightarrow$ (3) bzw. (4): Proposition auf Folie 12.10
- (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2): trivial
- (2) $\Rightarrow$ (1): Proposition auf Folie 12.24



Beispielhafte Testfragen aus dieser Vorlesung (andere sind möglich):

- Vervollständigen Sie den folgenden Satz: Jede kontextfreie Sprache kann durch einen ... mit ... akzeptiert werden.
- Zu jedem ... M existiert eine ... Grammatik G mit ...
- Aus einem PDA M kann mithilfe der ... eine ... Grammatik G berechnet werden mit $L(G) = \dots$

Zusammenfassung 12. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Kellerautomaten akzeptieren genau die kontextfreien Sprachen
- dabei ist ein einzelner Zustand ausreichend (und oft braucht man auch keine ε -Transitionen)

kommende Vorlesung

- Abschlußeigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen
- Nicht-Abschlußeigenschaften der Klasse der kontextfreien Sprachen
hierfür: Pumping-Lemma (vgl. Vorlesung 6)