TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske,
M.Sc. Lisa Barthel
WS 2026/2027

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automaten und Formale Sprachen – Übung 3
Reguläre Ausdrücke und das Pumping-Lemma

Abgabe: Montag, 23. November 2026, 11:00 Uhr
Besprechungen: Montag, 23. November 2026, 11:00 Uhr, Mittwoch, 25. November 2026, 15:00 Uhr

Geben Sie bitte Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und Ihren Übungstermin an.
Heften Sie zudem alle Ihre Lösungsblätter geeignet zusammen.

Bonusaufgaben

Bonusaufgaben können schriftlich bearbeitet werden. Ihre Lösungen geben Sie bitte bis zum oben angegebenen Termin ab. Die Abgaben werden von uns korrigiert und die erreichten Punkte werden mittels eines Faktors in Bonuspunkte für die Klausur umgerechnet.

Aufgabe 1 (Endliche Automaten und Sprachen) 3+2+9 Punkte

Betrachten Sie die nachfolgenden Sprachen über den Alphabeten $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $\Gamma = \{0, 1\}$:

$$L_1 = \{w \in \Sigma^* : ba \text{ ist Suffix von } w\}$$
$$L_2 = \{a^n abx : n \in \mathbb{N}, x \in \{c\}^*\}$$
$$L'_k = \{xby : x \in \{a, b\}^*, y \in \{a, b\}^{k-1}\} \text{ für } k \geq 1$$

(a) Konstruieren Sie zu der Sprache L_1 einen DFA M_1 mit $L(M_1) = L_1$ und zu der Sprache L_2 einen NFA M_2 mit $L(M_2) = L_2$.

(b) Wie würden Sie ausgehend vom Automaten M_2 einen Automaten M'_2 konstruieren, der genau das Komplement der Sprache L_2 akzeptiert?

(c) Konstruieren Sie für $k \geq 1$ zu der Sprache L'_k einen NFA M'_k mit $k + 1$ vielen Zuständen und einen DFA N'_k mit $L'_k = L(M'_k) = L(N'_k)$.

Aufgabe 2 (Reguläre Sprachen) 3+2 Punkte

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet.

(a) Seien $\alpha_1 = \varnothing ab + ba$, $\alpha_2 = ba^*ab$ und $\alpha_3 = (a + b)^* \cdot b \cdot (ab)^*a$ reguläre Ausdrücke.
Geben Sie zu jedem regulären Ausdruck α_i die Sprache L_i in Mengenschreibweise an.

(b) Geben Sie zu der Sprache $L_\alpha = \{w \in \Sigma^* : |w|_a \bmod 3 = 0\}$ einen regulären Ausdruck α mit $L_\alpha = L(\alpha)$ an.

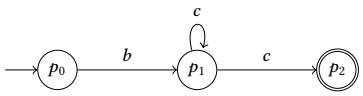
Aufgabe 3 (Nichtreguläre Sprachen) 3 Punkte

Beweisen Sie, dass die Sprache $K = \{xc^n y : n \in \mathbb{N}, x, y \in \{a, b\}^*, |x| = |y|\}$ nicht regulär ist.

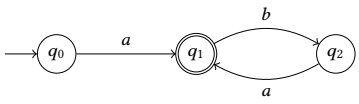
Hinweis: Bei Sprachen, die in der Vorlesung als nicht regulär vorgestellt wurden, dürfen Sie dies ohne Beweis voraussetzen.

Aufgabe 4 (Konstruktion von ε-NFAs) 2+3+2 Punkte

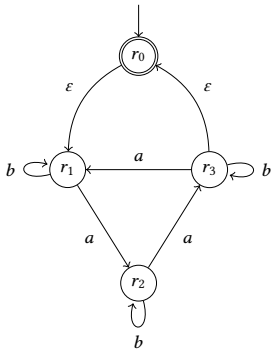
Gegeben seien die NFAs $M_1 = (\{p_0, p_1, p_2\}, \{b, c\}, \{p_0\}, \delta_1, \{p_2\})$, $M_2 = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \{q_0\}, \delta_2, \{q_1\})$ sowie der ε-NFA $M_3 = (\{r_0, r_1, r_2, r_3\}, \{a, b\}, \{r_0\}, \delta_3, \{r_0\})$ mit ihren folgenden graphischen Veranschaulichungen:



M_1



M_2



M_3

Konstruieren Sie die folgenden Automaten.
Verwenden Sie dafür die aus der Vorlesungen bekannten Konstruktionen.

(a) einen ε-NFA M_4 mit $L(M_4) = L(M_1) \cup L(M_2)$.

(b) einen ε-NFA M_5 mit $L(M_5) = L(M_1) \cdot L(M_2)$.

(c) einen NFA M_6 mit $L(M_6) = L(M_3)$.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 5 (Pumping-Lemma für reguläre Sprachen)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$ und die Sprache $L = \{b^m x b^n \in \Sigma^* : m, n \in \mathbb{N}, 2|x|_a = |x|_c\}$.
Beweisen Sie mithilfe des Pumping-Lemmas, dass die Sprache L nicht regulär ist.

Aufgabe 6 (Fehlersuche)

Gegeben seien das Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, die Sprachen $L_1 = \{x \in \Sigma^* : |x|_a = |x|_b, |x| \leq 7\}$,
$L_2 = \{c^n x \in \Sigma^* : n \in \mathbb{N}, x \in \{a, b\}^*, n \leq |x|\}$ und $L_3 = \{ab^n c^n : n \in \mathbb{N}\}$.
Finden Sie in den folgenden Beweisversuchen die Fehler und erläutern Sie wie Sie diese korrigieren würden:

(a) **Behauptung:** Die Sprache L_1 ist nicht regulär.
Beweis: Indirekt. Angenommen, L_1 wäre regulär. Nach dem Pumping-Lemma gibt es ein $n \geq 1$, sodass die folgende Behauptung $(*)$ gilt: Für jedes $x \in L_1$, $|x| \geq n$, gibt es $u, v, w \in \Sigma^*$ mit

(i) $x = uvw$,
(ii) $|v| \geq 1$ und
(iii) $|uv| \leq n$,
(iv) $uv^k w \in L_1$ für alle $k \geq 0$.

Wir wählen das Wort $x = a^n b^n \in L_1$ mit $|x| \geq n$. Nach Behauptung $(*)$ gibt es $u, v, w \in \Sigma^*$ mit (i)-(iv). Dann ist $u = a^i, v = a^j$ und $w = a^{n-i-j} b^n$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leq n$. Wir wählen $k = 2$. Dann ist $uv^2 w = a^{n+j} b^n \notin L_1$, denn $n + j \neq n$ für $j \neq 0$. Das ist ein Widerspruch zu (iv)! Also ist L_1 nicht regulär.

(b) **Behauptung:** Die Sprache L_2 ist nicht regulär.
Beweis: Indirekt. Angenommen, L_2 wäre regulär. Nach dem Pumping-Lemma gibt es ein $n \geq 1$, sodass die folgende Behauptung $(*)$ gilt: Für jedes $x \in L_2$, $|x| \geq n$, gibt es $u, v, w \in \Sigma^*$ mit

(i) $x = uvw$,
(ii) $|v| \geq 1$ und
(iii) $|uv| \leq n$,
(iv) $uv^k w \in L_2$ für alle $k \geq 0$.

Wir wählen das Wort $x = c^n b^n \in L_2,$ denn $n \leq n,$ mit $|x| \geq n$. Nach Behauptung $(*)$ gibt es $u, v, w \in \Sigma^*$ mit (i)-(iv). Dann ist $u = c^i, v = c^j$ und $w = c^{n-i-j} b^n$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leq n$. Wir wählen $k = 0$. Dann ist $uv^0 w = c^{n-j} b^n \notin L_2$. Das ist ein Widerspruch zu (iv)! Also ist L_2 nicht regulär.

(c) **Behauptung:** Die Sprache L_3 ist nicht regulär.
Beweis: Indirekt. Angenommen, L_3 wäre regulär. Nach dem Pumping-Lemma gibt es ein $n \geq 1$, sodass die folgende Behauptung $(*)$ gilt: Für jedes $x \in L_3$, $|x| \geq n$, gibt es $u, v, w \in \Sigma^*$ mit

(i) $x = uvw$,
(ii) $|v| \geq 1$ und
(iii) $|uv| \leq n$,
(iv) $uv^k w \in L_3$ für alle $k \geq 0$.

Wir wählen das Wort $x = ab^{n+1} c^{n+1} \in L_3,$ denn $n + 1 \in \mathbb{N}$ und $|ab^{n+1} c^{n+1}|_b = |ab^{n+1} c^{n+1}|_c,$ mit $|x| \geq n$. Nach Behauptung $(*)$ gibt es $u, v, w \in \Sigma^*$ mit (i)-(iv). Dann ist $u = a, v = b^j$ und $w = b^{n+1-j} c^{n+1}$ für ein $j \neq 0$ und $i + j \leq n$. Wir wählen $k = 2$. Dann ist $uv^2 w = ab^{n+1+j} c^{n+1} \notin L_3$. Das ist ein Widerspruch zu (iv)! Also ist L_3 nicht regulär.