

Automaten und Formale Sprachen

Vorlesung 4:

Endliche Automaten und rechtslineare Sprachen (2) Abschlußeigenschaften



Prof. Dr. Dietrich Kuske



FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2026/27

Proposition

Aus einer rechtslinearen Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ kann ein NFA M berechnet werden mit $L(G) = L(M)$.

Insbes. ist also jede rechtslineare Sprache eine „NFA-Sprache“.

Beweis:

Wir definieren den NFA $M = (Z, \Sigma, S', \delta, E)$, wobei:

$$Z = V$$

$$\delta(A, a) = \{B \mid (A \rightarrow aB) \in P\}$$

$$S' = \{S\}$$

$$E = \{A \mid (A \rightarrow \varepsilon) \in P\}$$

Behauptung: Für alle $w \in \Sigma^*$ und alle $A, B \in V$ gilt:

$$A \Rightarrow_G^* wB \iff B \in \hat{\delta}(\{A\}, w)$$

Beweis: per Induktion über $|w|$ (siehe Zusatzmaterial auf Folien 4.34 ff.)

Sei nun $w \in \Sigma^*$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \in L(G) &\iff \exists A \in V: S \Rightarrow_G^* wA \text{ und } (A \rightarrow \varepsilon) \in P \\ &\stackrel{\text{Beh.}}{\iff} \exists A \in V: A \in \hat{\delta}(\{S\}, w) \text{ und } A \in E \\ &\iff \hat{\delta}(\{S\}, w) \cap E \neq \emptyset \\ &\iff w \in L(M) \end{aligned}$$

Es gilt also tatsächlich $L(G) = L(M)$.



Proposition

Aus einem NFA M kann ein DFA M' berechnet werden mit $L(M) = L(M')$.
Insbes. ist jede „NFA-Sprache“ regulär.

Beweis:

Idee: Der zu konstruierende DFA bestimmt, in welchen Zuständen sich der ursprüngliche NFA befinden könnte.

Das heißt, die Zustände des DFA sind Mengen von Zuständen des ursprünglichen NFA. Man nennt diese Konstruktion daher auch **Potenzmengenkonstruktion**.

Sei $M = (Z, \Sigma, S, \delta, E)$ ein NFA.

Definiere den DFA

$$\begin{aligned} M' &= (\mathcal{P}(Z), \Sigma, S, \delta', E') \\ \text{mit } \delta'(Y, a) &= \widehat{\delta}(Y, a) \\ E' &= \{Y \subseteq Z \mid Y \cap E \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Behauptung: Für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\widehat{\delta'}(S, w) = \widehat{\delta}(S, w)$$

Beweis: per Induktion über $|w|$ (siehe Zusatzmaterial auf Folien 4.36 ff.)

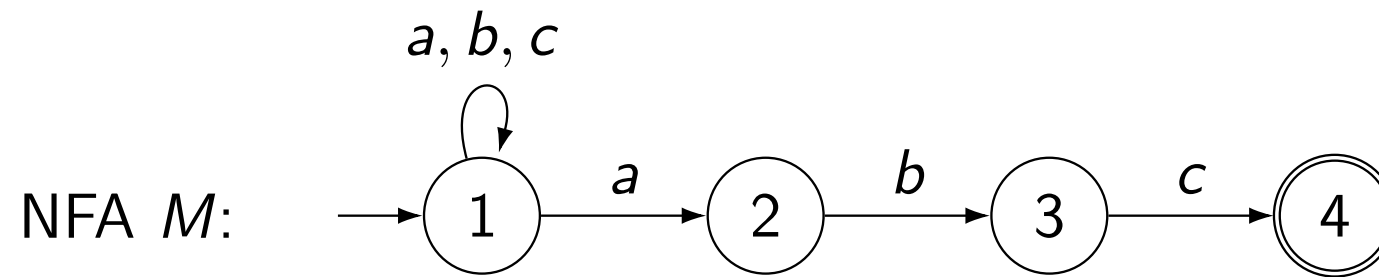
Also gilt für jedes Wort $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w \in L(M') &\iff \underbrace{\hat{\delta}'(S, w)}_{=\hat{\delta}(S, w)} \in F \\ &\iff \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \\ &\iff w \in L(M) \end{aligned}$$

und damit $L(M') = L(M)$



Beispiel:



Konstruierter DFA M' (vom Initialzustand aus erreichbarer Anteil):

Bemerkung

- Aus einer rechtslinearen Grammatik $G = (V, \dots)$ kann also ein äquivalenter NFA mit $|V|$ Zuständen konstruiert werden.
- Umgekehrt haben wir aus einem NFA $M = (Z, \dots)$ einen äquivalenten DFA mit $2^{|Z|}$ Zuständen (Folie 4.4) und daraus eine äquivalente Grammatik mit $2^{|Z|}$ Nichtterminalen (Folie 3.13) konstruiert.
- Ähnlich zum Beweis der Proposition auf Folie 3.13 kann man auch aus einem **N**FA $M = (Z, \dots)$ eine äquivalente rechtslineare Grammatik mit nur $|Z| + 1$ Nichtterminalen konstruieren.
Der zusätzliche Zustand wird benötigt, da M mehrer Anfangszustände haben kann.

NFAs, DFAs und rechtslineare Grammatiken

Satz

Seien Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind äquivalent:

1. L ist regulär (d.h. von einem DFA akzeptiert)
2. L wird von einem NFA akzeptiert
3. L ist rechtslinear (d.h. von einer Typ-3-Grammatik erzeugt)

verschiedene Modelle zur Beschreibung regulärer Sprachen:

- **Rechtslineare Grammatiken:** Verbindung zu Chomsky-Hierarchie, erzeugen Sprachen
wenig geeignet für Entscheidung, ob Wort zu Sprache gehört
- **NFAs:** kompakte Darstellungen von Sprachen, intuitive graphische Darstellung
wenig geeignet für Entscheidung, ob Wort zu Sprache gehört
- **DFAs:** u.U. exponentiell größer als NFA bzw. Grammatik
gut geeignet für Entscheidung, ob Wort zu Sprache gehört

Abschlußeigenschaften

Definition

Gegeben sei eine Klasse K und ein n -stelliger Operator $\otimes: K^n \rightarrow K$.

Man sagt, eine Klasse $K' \subseteq K$ ist unter $\otimes$ **abgeschlossen**, wenn für beliebige Elemente $k_1, k_2, \dots, k_n \in K'$ gilt: $\otimes(k_1, k_2, \dots, k_n) \in K'$.

Wir betrachten hier Abschlußeigenschaften der Klasse aller regulären Sprachen (d.h. wir setzen $K =$ Klasse aller Sprachen und $K' =$ Klasse aller regulären Sprachen).

Frage

Falls $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ **regulär** sind, sind dann z.B. auch $L_1 \cup L_2$, $L_1 \cap L_2$ und $\overline{L_1} = \Sigma^* \setminus L_1$ (Komplement) **regulär**?

Wir betrachten weitere Operationen: Konkatenation, Iteration, reguläre Substitution.

Satz

Aus einem DFA M über Σ kann ein DFA M' berechnet werden mit $L(M') = \Sigma^* \setminus L(M)$.

Insbes. ist die Klasse der regulären Sprachen unter der Komplementbildung abgeschlossen.

Beweis: Sei $M = (Z, \Sigma, z_0, \delta, E)$ DFA. In diesem vertauschen wir die End- und Nicht-Endzustände, d.h. wir setzen $M' = (Z, \Sigma, z_0, \delta, Z \setminus E)$.

Dann gilt für $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}
 w \in \Sigma^* \setminus L &\iff w \notin L(M) \\
 &\iff \hat{\delta}(z_0, w) \notin E \\
 &\iff \hat{\delta}(z_0, w) \in Z \setminus E \\
 &\iff w \in L(M').
 \end{aligned}$$

Also gilt $L(M') = \Sigma^* \setminus L(M)$.



Bemerkung

- Ist $M = (Z, \Sigma, \dots)$ ein DFA, so existiert also ein DFA für $\Sigma^* \setminus L(M)$ mit $|Z|$ Zuständen.
- Ist $M = (Z, \Sigma, \dots)$ ein NFA, so existiert ein DFA für $L(M)$ mit $2^{|Z|}$ Zuständen (Folie 4.4) und daher ein DFA für $\Sigma^* \setminus L(M)$ mit $2^{|Z|}$ Zuständen.
- Man kann zeigen, daß diese Schranken optimal sind (selbst wenn man NFAs konstruieren möchte).

Definition

Sind L_1 und L_2 Sprachen, so heißt die Sprache

$$L_1 L_2 = \{w \mid \exists w_1 \in L_1, w_2 \in L_2 : w = w_1 w_2\} \quad (\text{auch } L_1 \cdot L_2)$$

die **Konkatenation** oder **Verkettung** von L_1 und L_2 .

Beispiel

- $\{0\}^* \{1\}^* = \{0^i 1^j \mid i, j \geq 0\}$
- $\{0\} \cup \{1\} \{0, 1\}^*$ ist die Menge der Binärzahlen

Beobachtungen

- Die Verkettung von Sprachen ist assoziativ: $(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$
- $\{\varepsilon\}$ ist neutral: $L \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\} L = L$
- $\emptyset$ ist auslöschend: $\emptyset L = L \emptyset = \emptyset$.

Definition

Sei L Sprache und $n \in \mathbb{N}$. Dann ist L^n induktiv definiert:

$$L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{falls } n = 0 \\ L L^{n-1} & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

Es gilt also $L^n = \{w_1 w_2 \cdots w_n \mid w_1, \dots, w_n \in L\}$.

Beispiele

- für $K = \{a^{3k} \mid k \in \mathbb{N}\}$ und $L = \{a^{7\ell} \mid \ell \in \mathbb{N}\}$:
 $K \cdot L = \{\varepsilon, a^3, a^6, a^7, a^9, a^{10}, a^{12}\} \cup \{a^{13+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- für $P = \{a^p \mid p \text{ Primzahl}\}$:
 $P^2 \cup P^3 = \{a^4\} \cup \{a^{6+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ gdw. Goldbachsche Vermutung gilt

Definition

Sei L eine Sprache. Dann ist $L^* = \bigcup_{n \geq 0} L^n$ der **Kleene-Abschluß** oder die **Kleene-Iteration** von L .

Weiter ist $L^+ = \bigcup_{n \geq 1} L^n$ die **positive Iteration** von L .

Selbststudium: $L^+ = L \cdot L^* = L^* \cdot L$

Beispiel

für $L = \{a^k b \mid k \geq 1\}$:

$w \in L^*$ gdw. 1. Buchstabe a , letzter b , kein Faktor bb
oder $w = \varepsilon$

Prioritätsregeln für Operationen auf Sprachen:

- Potenz/Iteration binden stärker als Konkatenation
- Konkatenation stärker als Vereinigung/Durchschnitt/Differenz.

Substitutionen

Wir werden jetzt zeigen, daß die Klasse der regulären Sprachen unter „regulären Substitutionen“ abgeschlossen ist und dann daraus folgern, daß dies auch für Vereinigung, Konkatenation und Iteration gilt.

Idee: Σ und Γ Alphabete, $K \subseteq \Gamma^*$, $L_a \subseteq \Sigma^*$ für alle $a \in \Gamma$.

Die Substitution erhält man, indem man

in allen Wörtern $a_1 a_2 \cdots a_n \in K$

die Buchstaben $a_1, \dots, a_n$ durch beliebige Wörter aus $L_{a_1}, L_{a_2}, \dots, L_{a_n}$ ersetzt.

Beispiel $K = \{ab, baa\}$, $L_a = \{c^m d^m \mid m \geq 0\}$, $L_b = \{c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Im Ergebnis der Substitution sind z.B. enthalten

- $ccddccc$ (in $ab \in K$, ersetze a durch $ccdd \in L_a$ und b durch $ccc \in L_b$)
- $ccc ccdd cd$ (in $baa \in K$, ersetze b durch $ccc \in L_b$, das erste a durch $ccdd$, das zweite a durch cd)

Definition

Seien Γ und Σ Alphabete, $K \subseteq \Gamma^*$ und $L_a \subseteq \Sigma^*$ für alle $a \in \Gamma$

- Das Tupel $\sigma = (L_a)_{a \in \Gamma}$ heißt **Substitution**. Sind alle Sprachen L_a regulär, so ist σ eine **reguläre Substitution**.
- Sei $w \in \Gamma^*$. Die Anwendung $\sigma(w) \subseteq \Sigma^*$ von σ auf w ist die induktiv definierte Sprache

$$\sigma(w) = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{falls } w = \varepsilon \\ L_a \sigma(v) & \text{falls } w = av, a \in \Sigma \end{cases}$$

- Die Anwendung $\sigma(K) \subseteq \Sigma^*$ von σ auf K ist die Sprache

$$\sigma(K) = \bigcup_{w \in K} \sigma(w).$$

Beispiele

- $K = \{a, b\}$: $\sigma(K) = \sigma(a) \cup \sigma(b) = L_a \cup L_b$
- $K = \{ab\}$: $\sigma(K) = \sigma(ab) = L_a \cdot L_b$
- $K = \{a\}^*$: $\sigma(K) = \bigcup_{n \geq 0} \sigma(a^n) = L_a^*$

Ziel: Berechne aus NFAs für $K \subseteq \Gamma^*$ und die Sprachen $\sigma(a) \subseteq \Sigma^*$ einen NFA für die Sprache $\sigma(K) \subseteq \Sigma^*$.

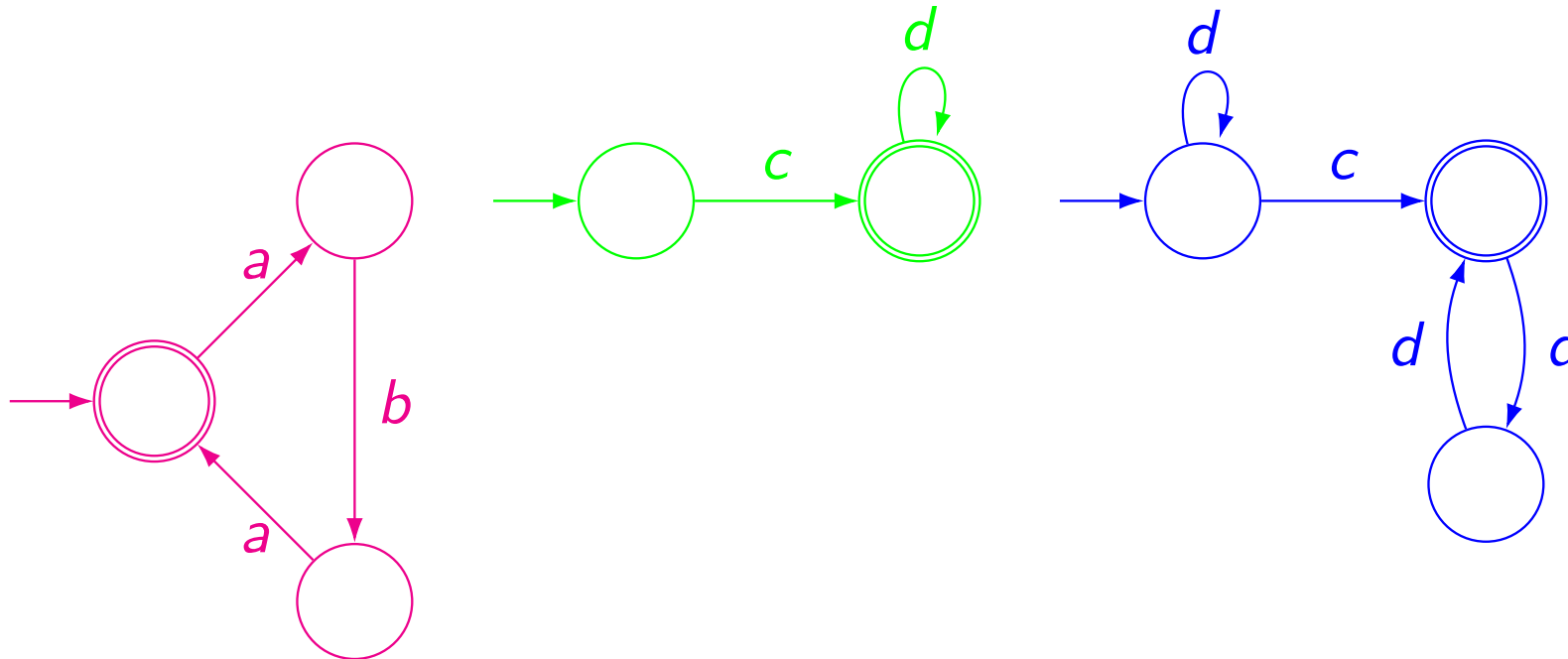
Insbes. also: Ist K reguläre Sprache und σ reguläre Substitution, so ist $\sigma(K)$ reguläre Sprache.

falls das möglich ist: Sind $L_a, L_b \subseteq \Sigma^*$ regulär, so auch $L_a \cup L_b$, $L_a \cdot L_b$ und L_a^* (nach obigem Beispiel).

Beispiel

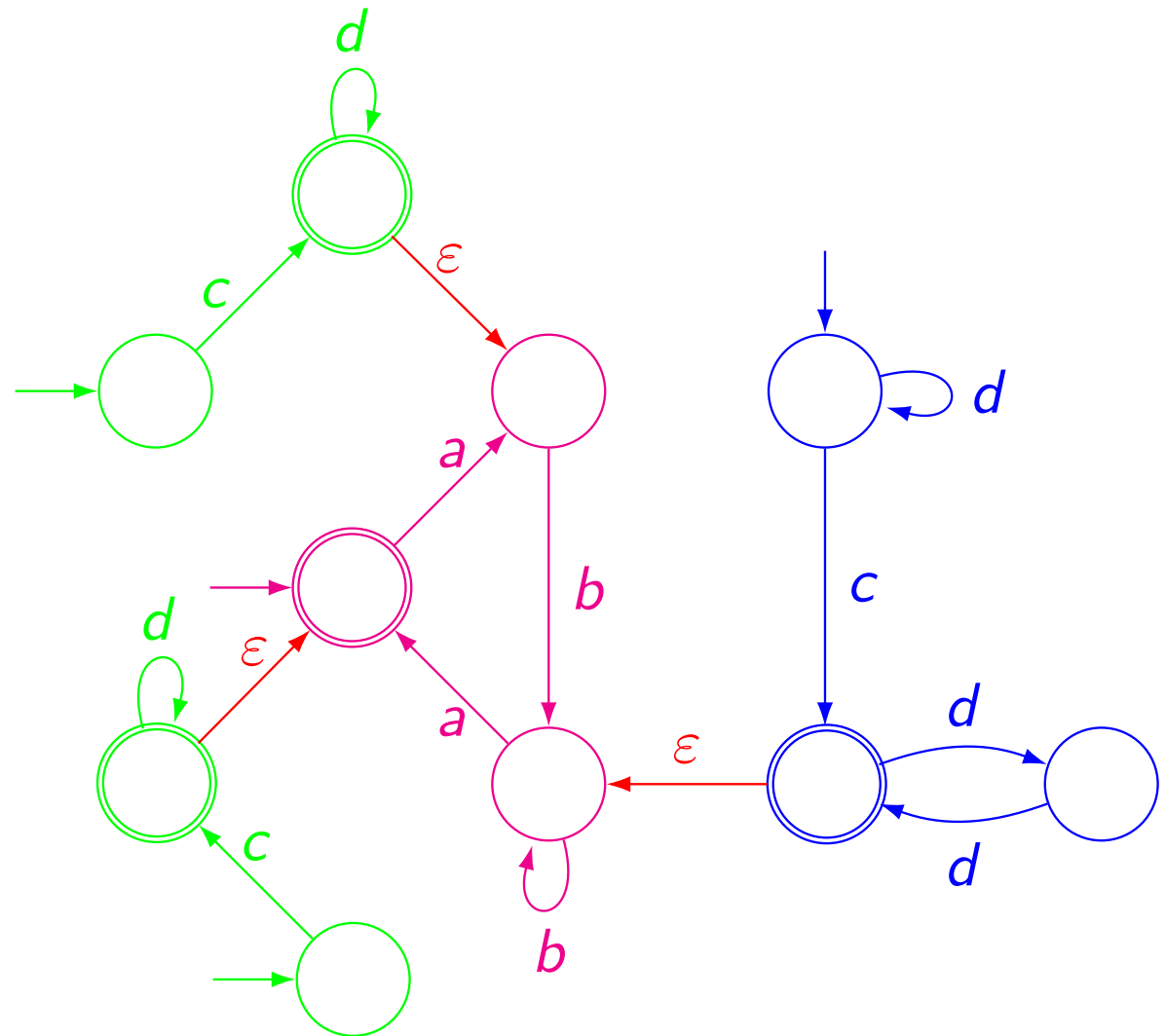
Seien $K = \{aba\}^*$, $L_a = \{c\}\{d\}^*$ und $L_b = \{d\}^*\{c\}\{dd\}^*$.

Sie werden durch die folgenden drei NFAs M , M_a bzw. M_b akzeptiert:



starte mit M

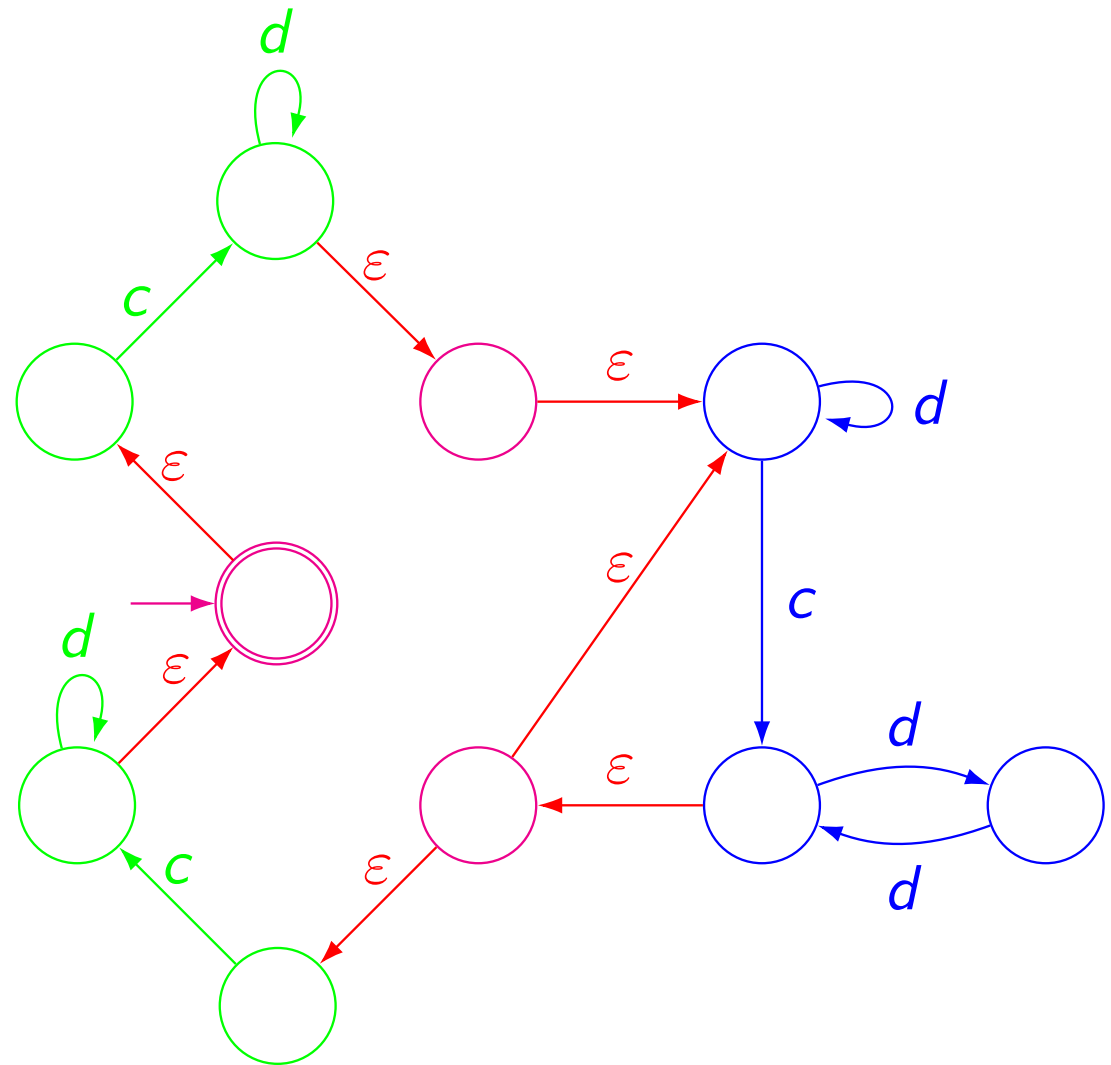
für jedes Ziel z' einer a -
bzw. b -Transition: füge eine
Kopie von M_a bzw. M_b
hinzu (mit ε -Transitionen
von E_a bzw. E_b nach z')



starte mit M

für jedes Ziel z' einer a - bzw. b -Transition: füge eine Kopie von M_a bzw. M_b hinzu (mit ε -Transitionen von E_a bzw. E_b nach z')

ersetze a -Kante durch ε -Transition von ihrem Start zu den initialen Zuständen des zu ihrem Ziel hinzugefügten M_a (streiche dabei Initial- bzw. Finalmarkierung in M_a)
(analog für b -Kanten)



unsere Konstruktion liefert also einen ε -NFA! Daher zunächst eine Umwandlung von ε -NFAs in NFAs.

Lemma

Aus einem ε -NFA M kann ein NFA M' berechnet werden mit $L(M) = L(M')$.

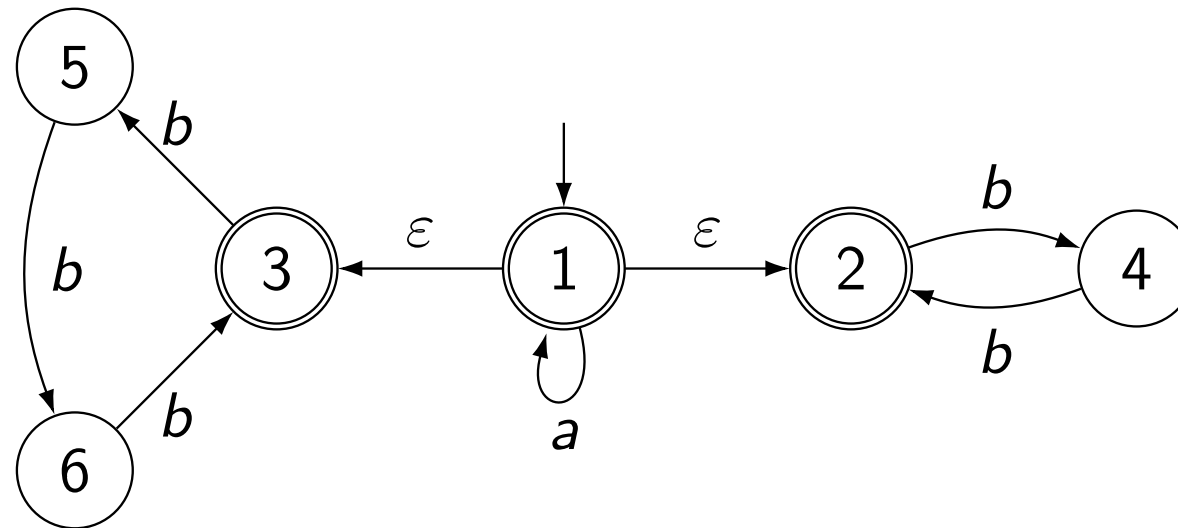
Idee: Der NFA M' erreicht mit w dieselben Zustände wie M (aber ohne ε -Transitionen)!

Beweis: Sei $M = (Z, \Sigma, S, \delta, E)$.

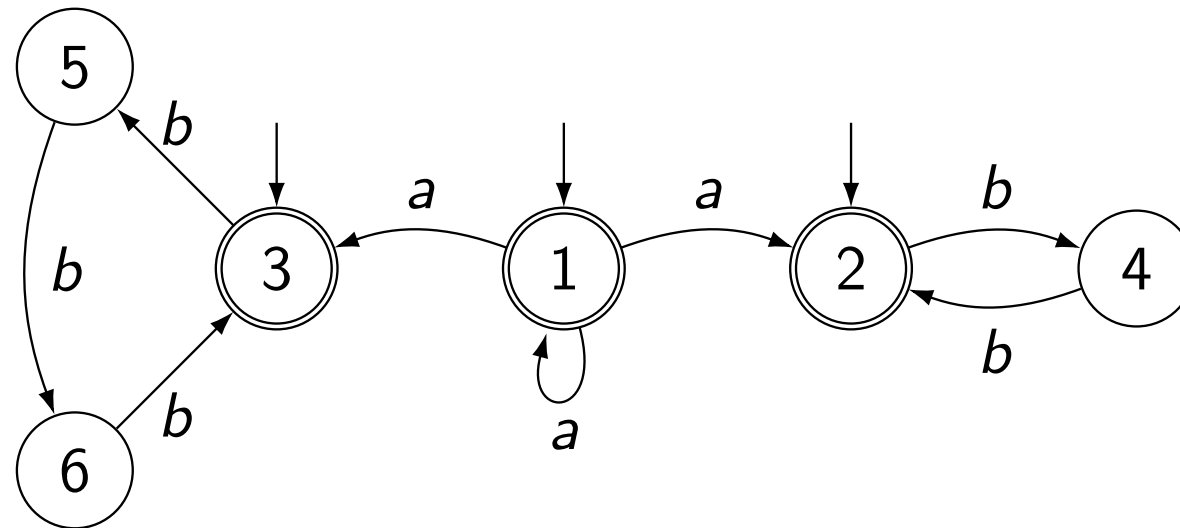
Setze $M' = (Z', \Sigma, S', \delta', E')$ gemäß

$$\begin{aligned} Z' &= Z \\ S' &= \overline{S} \\ \delta'(z, a) &= \begin{cases} \widehat{\delta}(\{z\}, a) & \text{for } a \in \Sigma \\ \emptyset & \text{for } a = \varepsilon \end{cases} \\ E' &= E \end{aligned}$$

Beispiel: Betrachte den ε -NFA M von Folie 3.22. Dann erhalten wir den folgenden NFA M' .



Beispiel: Betrachte den ε -NFA M von Folie 3.22. Dann erhalten wir den folgenden NFA M' .



Behauptung: Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $\hat{\delta}'(S', w) = \hat{\delta}(S, w)$.

Beweis: per Induktion über $|w|$ (siehe Zusatzmaterial auf Folien 4.37 ff.)

Damit gilt für alle Wörter $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned}
 w \in L(M) & \iff \hat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \\
 & \stackrel{\text{Beh.}}{\iff} \hat{\delta}'(S', w) \cap E \neq \emptyset \\
 & \iff \hat{\delta}'(S', w) \cap E' \neq \emptyset \\
 & \iff w \in L(M')
 \end{aligned}$$

Also gilt tatsächlich $L(M) = L(M')$. □

nebenbei erhaltenes Ergebnis

Satz auf Folie 4.9 kann erweitert werden zu

Satz

Seien Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind äquivalent:

1. L ist regulär (d.h. von einem DFA akzeptiert)
2. L wird von einem NFA akzeptiert
3. L ist rechtslinear (d.h. von einer Typ-3-Grammatik erzeugt)
4. L wird von einem ε -NFA akzeptiert

Beweis: Die Äquivalenz der ersten drei Aussagen ist schon gezeigt.

Lemma auf Folie 4.22: 2 folgt aus 4

trivial: 4 folgt aus 2



Satz

Seien M und M_a für $a \in \Sigma$ NFAs mit $K = L(M)$ und $L_a = L(M_a)$. Sei weiter $\sigma = (L_a)_{a \in \Sigma}$ die definierte Substitution.

Dann kann ein ε -NFA M' für $\sigma(K)$ berechnet werden.

Beweis: Seien $M = (Z, \Sigma, S, \delta, E)$ und $M_a = (Z_a, \Sigma, S_a, \delta_a, E_a)$. Der ε -NFA $M' = (Z', \Sigma, S', \delta', E')$ ergibt sich wie folgt (wobei $a, b \in \Sigma$, $z, z' \in Z$ und $q \in Z_a$): $S' = S$, $E' = E$ und

$$\begin{aligned} Z' &= Z \cup \bigcup_{c \in \Sigma, z' \in \hat{\delta}(Z, c)} Z_c \times \{z'\} \\ \delta'((q, z'), b) &= \delta_a(q, b) \times \{z'\} \\ \delta'(z, a) &= \emptyset \\ \delta'(z, \varepsilon) &= \{(\iota, z') \mid z' \in \delta(z, a), \iota \in I_a\} \\ \delta'((q, z'), \varepsilon) &= \begin{cases} \{z'\} & \text{falls } q \in E_a \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Behauptung: Für alle $z, z' \in Z$, $q \in Z_b$ und $w \in \Sigma^*$ gelten

$$z \in \widehat{\delta}'(S', w) \iff \exists a_1, \dots, a_k \in \Gamma: \\ w \in \{\varepsilon\} L_{a_1} L_{a_2} \cdots L_{a_k}, \\ z \in \widehat{\delta}(I, a_1 \cdots a_k) \cup \bigcup_{\substack{a \in \Gamma \\ \varepsilon \in L_a}} \widehat{\delta}(S, a)$$

$$(q, z') \in \widehat{\delta}'(I', w) \iff \exists a_1, \dots, a_k, b \in \Gamma, x \in \Sigma^*: \\ w \in \{\varepsilon\} L_{a_1} L_{a_2} \cdots L_{a_k} x, \\ q \in \widehat{\delta}_b(I_b, x), \\ z' \in \widehat{\delta}(I, a_1 a_2 \cdots a_k b)$$

Beweis: per Induktion über $|w|$, hier nicht ausgeführt

q.e.d.

Sei nun $w \in \Sigma^*$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 w \in \sigma(K) &\iff \exists a_1 a_2 \cdots a_k \in K = L(M): w \in L_{a_1} L_{a_2} \cdots L_{a_k} \\
 &\stackrel{\text{Beh.}}{\iff} \exists e \in E': e \in \hat{\delta}'(S', w) \\
 &\iff w \in L(M')
 \end{aligned}$$

Es gilt also tatsächlich $\sigma(K) = L(M')$.



Folgerung

Aus NFAs M_a und M_b können NFAs $M_\cup$, $M_\cdot$ und M_* berechnet werden mit $L(M_\cup) = L(M_a) \cup L(M_b)$, $L(M_\cdot) = L(M_a) \cdot L(M_b)$ und $L(M_*) = L(M_a)^*$.

Insbes. ist die Klasse der regulären Sprachen also abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Iteration.

Beweis: Folie 4.19: diese Sprachen erhält man mittels regulärer Substitutionen aus regulären Sprachen

Folie 4.26: man kann ε -NFAs für sie konstruieren

Folie 4.22: aus diesen ε -NFAs kann man NFAs konstruieren



Folgerung

Aus NFAs M_a und M_b kann ein NFA $M_{\cap}$ berechnet werden mit $L(M_{\cap}) = L(M_a) \cap L(M_b)$.

Insbes. ist die Klasse der regulären Sprachen abgeschlossen unter Schnitten.

Beweis: Wegen $L(M_a) \cap L(M_b) = \Sigma^* \setminus (\Sigma^* \setminus L(M_a) \cup \Sigma^* \setminus L(M_b))$ folgt die Behauptung aus dem Satz auf Folie 4.11 und der Folgerung auf Folie 4.29. □

Für einen alternativen Beweis (der zu deutlich kleinerem NFA führt) siehe Zusatzmaterial, Folie 4.39.

Beispielhafte Testfragen aus dieser Vorlesung (andere sind möglich):

- Was ist der Kleene-Abschluß einer Sprache?
- Lückentext „Jede von einem ... akzeptierbare Sprache ist ...“
- Lückentext „Die ... erlaubt es, aus einem ... einen äquivalenten ... zu konstruieren.“
- Lückentext „Für eine Sprache L sind äquivalent: 1. ..., 2. ..., 3. ...“
- Lückentext „Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter den folgenden 6 Operationen: ...“

Zusammenfassung 4. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- NFAs, ε -NFAs, DFAs und rechtslineare Grammatiken sind tatsächlich gleich ausdrucksstark
- Abschluß der Klasse der rechtslinearen Sprachen unter Komplement, regulärer Substitution (und daher Vereinigung, Konkatenation, Kleene-Iteration) und Schnitt.
Für die Konstruktionen sind ε -NFAs sehr hilfreich (reguläre Substitution).

kommende Vorlesung

- alternative Beschreibung der rechtslinearen Sprachen mittels regulärer Ausdrücke

Zusatzmaterial

Beweis der Behauptung auf Folien 4.3

IA $w = \varepsilon$. Es gilt:

$$A \Rightarrow_G^* B \iff A = B \iff B \in \{A\} = \hat{\delta}(\{A\}, \varepsilon)$$

IS Sei $w = av$ ($a \in \Sigma$, $v \in \Sigma^*$) und gelte die Behauptung für v .

$$\begin{aligned} A \Rightarrow_G^* avB & \xLeftrightarrow{G \text{ Typ 3}} \exists C \in V : A \Rightarrow_G \underbrace{aC \Rightarrow_G^* avB}_{\iff C \Rightarrow_G^* vB} \\ & \xLeftrightarrow{\text{Def. von } M / \text{IV}} \exists C \in Z : C \in \delta(A, a) \text{ und } B \in \hat{\delta}(\{C\}, v) \\ & \iff B \in \hat{\delta}(\{A\}, av) \end{aligned}$$

□

Beweis der Behauptung auf Folien 4.5

IA Für $w = \varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned}\hat{\delta}'(S, \varepsilon) &= S \\ &= \hat{\delta}(S, \varepsilon)\end{aligned}$$

da M' DFA ist

da M NFA ist

IS Sei $w = va$ mit $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$, so daß Beh. für v gilt. Dann erhält man

$$\begin{aligned}\hat{\delta}'(S, va) &= \hat{\delta}'(\hat{\delta}'(S, v), a) \\ &= \hat{\delta}'(\hat{\delta}(S, v), a) \\ &= \delta'(\hat{\delta}(S, v), a) \\ &= \delta(\hat{\delta}(S, v), a) \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(S, v), a) \\ &= \hat{\delta}(S, va)\end{aligned}$$

Lemma auf Folien 3.8

da Beh. für v stimmt

da M' DFA ist

Definition von M'

da M NFA ist

Lemma auf Folie 3.20(2)



Beweis der Behauptung auf Folien 4.5

IA Für $w = \varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned}\hat{\delta}'(S, \varepsilon) &= S \\ &= \hat{\delta}(S, \varepsilon)\end{aligned}$$

da M' DFA ist

da M NFA ist

IS Sei $w = va$ mit $v \in \Sigma^*$ und $a \in \Sigma$, so daß Beh. für v gilt. Dann erhält man

$$\begin{aligned}\hat{\delta}'(S, va) &= \hat{\delta}'(\hat{\delta}'(S, v), a) \\ &= \hat{\delta}'(\hat{\delta}(S, v), a) \\ &= \delta'(\hat{\delta}(S, v), a) \\ &= \delta(\hat{\delta}(S, v), a) \\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(S, v), a) \\ &= \hat{\delta}(S, va)\end{aligned}$$

Lemma auf Folien 3.8

da Beh. für v stimmt

da M' DFA ist

Definition von M'

da M NFA ist

Lemma auf Folie 3.20(2)



Beweis der Behauptung auf Folien 4.24

IA $w = \varepsilon$. Es gilt:

$$\hat{\delta}'(S', \varepsilon) = S'$$

da M' NFA ist

$$= \overline{S}$$

$$= \hat{\delta}(S, \varepsilon)$$

da M ε -NFA ist

IS Sei $w = va$ und gelte die Behauptung für v . Dann gilt

$$\hat{\delta}'(S', va) = \hat{\delta}'(\hat{\delta}'(S', v), a)$$

Lemma auf Folie 3.20(2)

$$= \hat{\delta}'(\hat{\delta}(S, v), a)$$

Beh. gilt für v

$$= \bigcup_{z \in \hat{\delta}(S, v)} \hat{\delta}'(\{z\}, a)$$

Lemma auf Folie 3.20(4)

$$= \bigcup_{z \in \hat{\delta}(S, v)} \delta'(z, a)$$

M' ist NFA

$$= \bigcup_{z \in \widehat{\delta}(S, v)} \widehat{\delta}(z, a)$$

Definition von M'

$$= \widehat{\delta}(\widehat{\delta}(S, v), a)$$

Lemma auf Folie 3.20(4)

$$= \widehat{\delta}(S, va)$$

Lemma auf Folie 3.20(2)



Alternativer Beweis der Folgerung von Folie 4.30.

Folgerung von Folie 4.30

Aus NFAs M_a und M_b kann ein NFA $M_\cap$ berechnet werden mit $L(M_\cap) = L(M_a) \cap L(M_b)$.

Beweis:

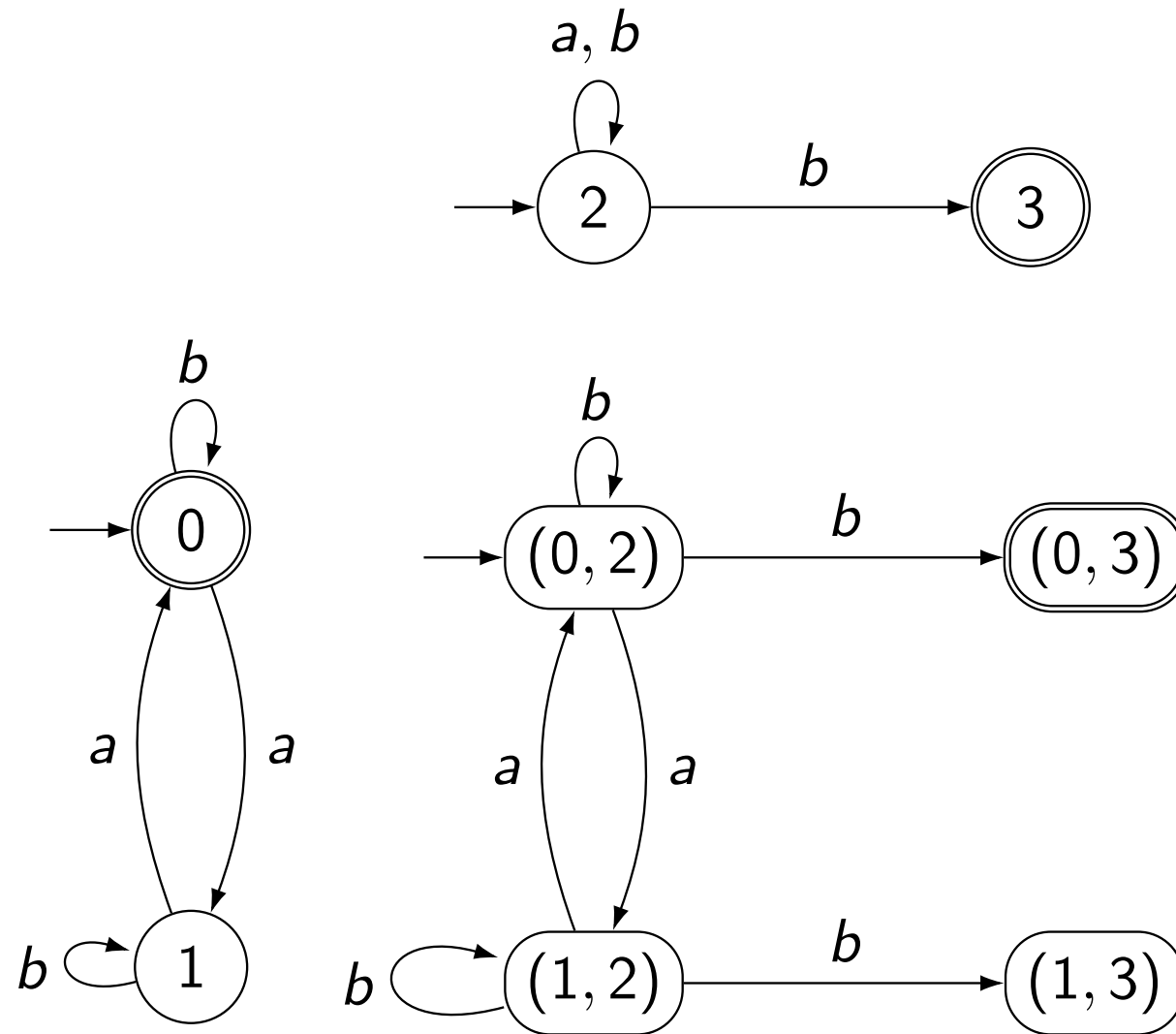
Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ NFAs mit $L(M_i) = L_i$. Wir betrachten den NFA

$$M = (\underbrace{Z_1 \times Z_2}_Z, \Sigma, \underbrace{S_1 \times S_2}_S, \delta, \underbrace{E_1 \times E_2}_E),$$

mit

$$\begin{aligned} \delta((z_1, z_2), a) &= \{(z'_1, z'_2) \mid z'_1 \in \delta_1(z_1, a), z'_2 \in \delta_2(z_2, a)\} \\ &= \delta_1(z_1, a) \times \delta_2(z_2, a). \end{aligned}$$

Bildung des Kreuzprodukts zweier NFAs:



Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z_1 \times Z_2$ und alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}(Y, w) &= \bigcup_{(z_1, z_2) \in Y} \left(\widehat{\delta}_1(\{z_1\}, w) \times \widehat{\delta}_2(\{z_2\}, w) \right) \\ &= \left\{ (z'_1, z'_2) \mid \exists (z_1, z_2) \in Y : z'_1 \in \widehat{\delta}_1(\{z_1\}, w), z'_2 \in \widehat{\delta}_2(\{z_2\}, w) \right\}\end{aligned}$$

(der Beweis erfolgt per Induktion über $|w|$).

Konsequenz: Das Kreuzprodukt der NFS M_1 und M_2 akzeptiert $L(M_1) \cap L(M_2)$.

Nach der Proposition auf Folie 4.4 ist $L(M_1) \cap L(M_2)$ also regulär. □