Automaten und Formale Sprachen
Vorlesung 5:
Abschlußeigenschaften (2)
Reguläre Ausdrücke und rechtslineare Sprachen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT ILMENAU

Prof. Dr. Dietrich Kuske

welt offenes Thüringen

FG Automaten und Logik, TU Ilmenau

Wintersemester 2026/27

unsere Konstruktion liefert also einen ε-NFA! Daher zunächst eine Umwandlung von ε-NFAs in NFAs.

Lemma

Aus einem ε-NFA M kann ein NFA M' berechnet werden mit $L(M) = L(M')$.

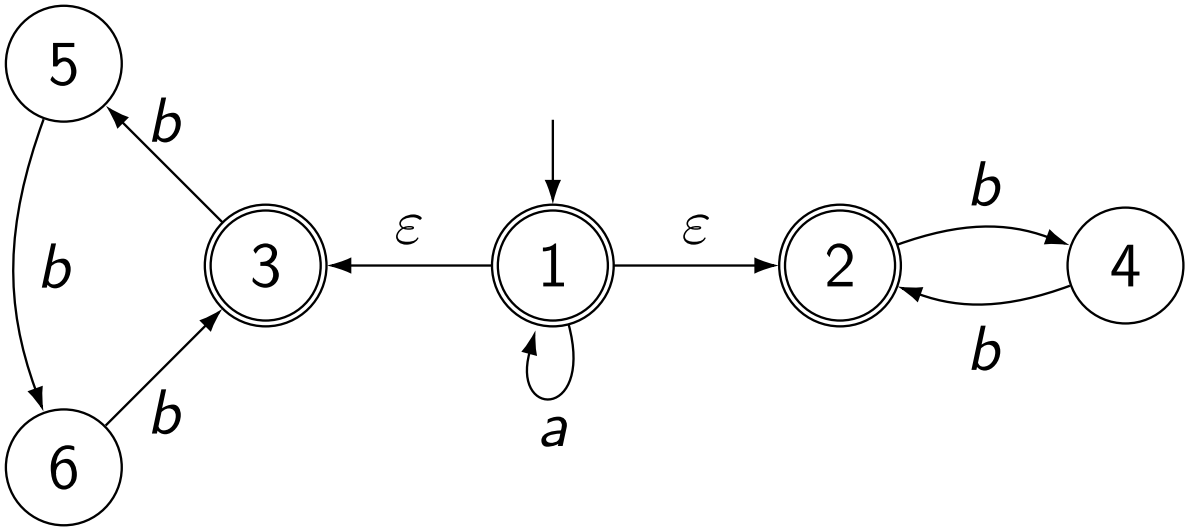
Idee: Der NFA M' erreicht mit w dieselben Zustände wie M (aber ohne ε-Transitionen)!

Beweis: Sei $M = (Z, \Sigma, S, \delta, E)$.

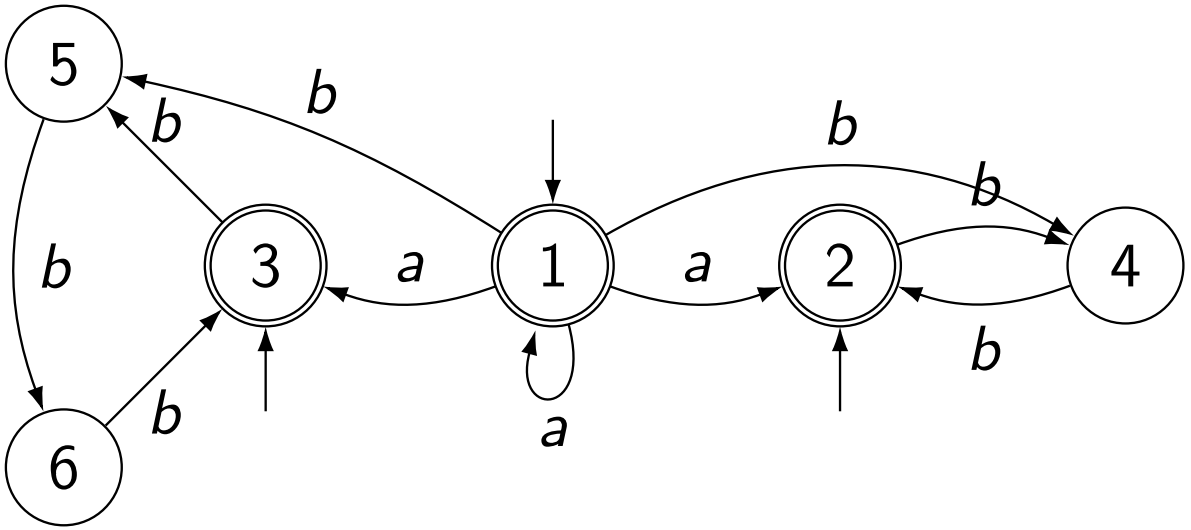
Setze $M' = (Z', \Sigma, S', \delta', E')$ gemäß

$$
\begin{aligned}
Z' &= Z \\
S' &= \overline{S} \\
\delta'(z,a) &= \begin{cases} \widehat{\delta}(\{z\}, a) & \text{for } a \in \Sigma \\ \emptyset & \text{for } a = \varepsilon \end{cases} \\
E' &= E
\end{aligned}
$$

Beispiel: Betrachte den ε-NFA M von Folie 3.22.



Beispiel: Betrachte den ε-NFA M von Folie 3.22. Dann erhalten wir den folgenden NFA M'.



Behauptung: Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt $\widehat{\delta'}(S', w) = \widehat{\delta}(S, w)$.

Beweis: per Induktion über $|w|$ (siehe Zusatzmaterial auf Folien 5.32 ff.)

Damit gilt für alle Wörter $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w \in L(M) &\iff \widehat{\delta}(S, w) \cap E \neq \emptyset \\ &\overset{\text{Beh.}}{\iff} \widehat{\delta'}(S', w) \cap E \neq \emptyset \\ &\iff \widehat{\delta'}(S', w) \cap E' \neq \emptyset \\ &\iff w \in L(M') \end{aligned}$$

Also gilt tatsächlich $L(M) = L(M')$. □

nebenbei erhaltenes Ergebnis

Satz auf Folie 4.9 kann erweitert werden zu

Satz

Seien Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind äquivalent:

1. L ist regulär (d.h. von einem DFA akzeptiert)
2. L wird von einem NFA akzeptiert
3. L ist rechtslinear (d.h. von einer Typ-3-Grammatik erzeugt)
4. L wird von einen ε-NFA akzeptiert

Beweis: Die Äquivalenz der ersten drei Aussagen ist schon gezeigt.

„4⇒2“: Lemma auf Folie 5.2

„2⇒4“: trivial □

Satz

Seien M und M_a für $a \in \Sigma$ NFAs mit $K = L(M)$ und $L_a = L(M_a)$. Sei weiter $\sigma = (L_a)_{a \in \Sigma}$ die definierte Substitution.
Dann kann ein ε-NFA M' für $\sigma(K)$ berechnet werden.

Beweis: Seien $M = (Z, \Sigma, S, \delta, E)$ und $M_a = (Z_a, \Sigma, S_a, \delta_a, E_a)$. Der ε-NFA $M' = (Z', \Sigma, S', \delta', E')$ ergibt sich wie folgt (wobei $a, b \in \Sigma$, $z, z' \in Z$ und $q \in Z_a$): $S' = S$, $E' = E$ und

$$
\begin{aligned}
Z' &= Z \cup \bigcup_{c \in \Sigma, z' \in \widehat{\delta}(Z,c)} Z_c \times \{z'\} \\
\delta'((q, z'), b) &= \delta_a(q, b) \times \{z'\} \\
\delta'(z, a) &= \emptyset \\
\delta'(z, \varepsilon) &= \{(\iota, z') \mid z' \in \delta(z, a), \iota \in S_a\} \\
\delta'((q, z'), \varepsilon) &= \begin{cases} \{z'\} & \text{falls } q \in E_a \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}
$$

Behauptung: Für alle $z, z' \in Z$, $q \in Z_b$ und $w \in \Sigma^*$ gelten

$$
\begin{aligned}
z \in \widehat{\delta'}(S', w) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists a_1, \ldots, a_k \in \Gamma : \\
&\qquad w \in \{\varepsilon\} L_{a_1} L_{a_2} \cdots L_{a_k}, \\
&\qquad z \in \widehat{\delta}(S, a_1 \cdots a_k) \\
(q, z') \in \widehat{\delta'}(S', w) \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists a_1, \ldots, a_k, b \in \Gamma, x \in \Sigma^* : \\
&\qquad w \in \{\varepsilon\} L_{a_1} L_{a_2} \cdots L_{a_k} x, \\
&\qquad q \in \widehat{\delta_b}(S_b, x), \\
&\qquad z' \in \widehat{\delta}(S, a_1 a_2 \cdots a_k\, b)
\end{aligned}
$$

Beweis: per Induktion über $|w|$, hier nicht ausgeführt **q.e.d.**

Sei nun $w \in \Sigma^*$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned} w \in \sigma(K) &\iff \exists a_1 a_2 \cdots a_k \in K = L(M) \colon w \in L_{a_1} L_{a_2} \cdots L_{a_k} \\ &\overset{\text{Beh.}}{\iff} \exists e \in E' \colon e \in \widehat{\delta'}(S', w) \\ &\iff w \in L(M') \end{aligned}$$

Es gilt also tatsächlich $\sigma(K) = L(M')$. □

Folgerung

Aus NFAs M_a und M_b können NFAs $M_\cup, M_\cdot$ und M_* berechnet werden mit $L(M_\cup) = L(M_a) \cup L(M_b)$, $L(M_\cdot) = L(M_a) \cdot L(M_b)$ und $L(M_*) = L(M_a)^*$.

Insbes. ist die Klasse der regulären Sprachen also abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Iteration.

Beweis: Folie 4.19: diese Sprachen erhält man mittels regulärer Substitutionen aus regulären Sprachen

Folie 5.6: man kann ε-NFAs für sie konstruieren

Folie 5.2: aus diesen ε-NFAs kann man NFAs kontruieren $\square$

Folgerung

Aus NFAs M_a und M_b kann ein NFA $M_\cap$ berechnet werden mit $L(M_\cap) = L(M_a) \cap L(M_b)$.

Insbes. ist die Klasse der regulären Sprachen abgeschlossen unter Schnitten.

Beweis: Wegen $L(M_a) \cap L(M_b) = \Sigma^* \setminus (\Sigma^* \setminus L(M_a) \cup \Sigma^* \setminus L(M_b))$ folgt die Behauptung aus dem Satz auf Folie 4.11 und der Folgerung auf Folie 5.9. □

Für einen alternativen Beweis (der zu deutlich kleinerem NFA führt) siehe Zusatzmaterial, Folie 5.34.

Reguläre Ausdrücke

reguläre Ausdrücke erlauben es, die regulären Sprachen kompakt in „Textform“ zu beschreiben

Definition

Die Menge $\mathrm{Reg}(\Sigma)$ der regulären Ausdrücke über dem Alphabet Σ ist die kleinste Menge mit folgenden Eigenschaften:

- $\varnothing \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, $\lambda \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, $\Sigma \subseteq \mathrm{Reg}(\Sigma)$.
- Wenn $\alpha, \beta \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$, dann auch $(\alpha \cdot \beta), (\alpha + \beta), (\alpha^*) \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$.

Bemerkungen:

- für $(\alpha \cdot \beta)$ schreibt man oft $(\alpha\,\beta)$
- für $(\alpha + \beta)$ schreibt man auch $(\alpha \mid \beta)$

Beispiel

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$: $\lambda \quad ((ab)b) \quad ((a+d)a)$

$$\Big(\big((ab)a\big) + \big(\big(((ba)b)\big)^*\big)\Big)$$

$$\Big(\big((ab)\big((a+b)^*\big)\big)(ba)\Big)$$

$\Sigma = \{0, 1\}$: $\Big(1\big((0+1)^*\big)\Big) \quad \Big(\big((0^*)(1^*)\big)(0^*)\Big)$

Beobachtung: Jeder reguläre Ausdruck über Σ ist ein Wort über dem Alphabet $\Sigma \cup \{\varnothing, \lambda, \cdot, +, ^*, (,)\}$.

Nach der Festlegung der Syntax regulärer Ausdrücke müssen wir auch deren Bedeutung (= Semantik) festlegen.
Dabei betrachten wir einen regulären Ausdruck α als ein „Wortschema“, $L(\alpha)$ soll die Menge der Wörter sein, die zum „Wortschema“ „passen“.

Definition

Für einen regulären Ausdruck $\alpha \in \mathrm{Reg}(\Sigma)$ ist die Sprache $L(\alpha) \subseteq \Sigma^*$ induktiv definiert:

$$L(\alpha) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } \alpha = \varnothing \\ \{\varepsilon\} & \text{falls } \alpha = \lambda \\ \{a\} & \text{falls } \alpha = a \in \Sigma \\ L(\beta) \cup L(\gamma) & \text{falls } \alpha = (\beta + \gamma) \\ L(\beta)L(\gamma) & \text{falls } \alpha = (\beta \cdot \gamma) \\ \big(L(\beta)\big)^* & \text{falls } \alpha = (\beta^*) \end{cases}$$

Beispiel (vgl. Folie 5.12)

$\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

$$
\begin{aligned}
L(\lambda) &= \{\varepsilon\} \\
L\Big(\big((ab)b\big)\Big) &= \{abb\} \\
L\Big(\big((a+d)a\big)\Big) &= \{aa, da\} \\
L\Big(\Big(\big((ab)a\big) + \big(((ba)b)\big)^*\Big)\Big) &= \{aba\} \cup \{bab\}^* \\
L\Big(\Big(\big((ab)((a+b)^*)\big)(ba)\Big)\Big) &= \{ab\} \cdot \{a, b\}^* \cdot \{ba\}
\end{aligned}
$$

$\Sigma = \{0, 1\}$:

$$
\begin{aligned}
L\Big(\big(1((0+1)^*)\big)\Big) &= \{1\} \cdot \{0, 1\}^* \\
L\Big(\big(((0^*)(1^*))(0^*)\big)\Big) &= \{0^i 1^j 0^k \mid i, j, k \in \mathbb{N}\}
\end{aligned}
$$

Klammern sparen:

- Äußere Klammern weglassen: $(0+1)^*$ statt $\big((0+1)^*\big)$.
- Da $(L_1L_2)L_3 = L_1(L_2L_3)$ und $(L_1 \cup L_2) \cup L_3 = L_1 \cup (L_2 \cup L_3)$, läßt man Klammern bei Operatoren auf gleicher Ebene weg:
  $(0+1+2+3)$ statt $\big((0+1)+(2+3)\big)$ oder $\Big(0+\big(1+(2+3)\big)\Big)$
- **Präferenzregeln:**
  * bindet stärker als $\cdot$
  $\cdot$ bindet stärker als $+$.

Damit erhalten die Beispiel-Ausdrücke die lesbarere Form:

λ	abb	$(a+d)a$
$aba+(bab)^*$	$ab(a+b)^*ba$	
$1(0+1)^*$	$0^*1^*0^*$	

Beispiel

$\Sigma = \{a, b\}$.

- $L\big(a(a+b)^*bb\big)$ ist die Menge der Wörter, die mit a beginnen und mit bb enden.
- $L\big((a+b)^*aba(a+b)^*\big)$ ist die Menge der Wörter, die den Faktor aba enthalten.
- $L\big((b^*ab^*a)^*b^*\big)$ ist die Menge der Wörter, die eine gerade Anzahl von Vorkommen von a enthalten.

Proposition

Ist γ ein regulärer Ausdruck, so ist $L(\gamma)$ eine reguläre Sprache.

Beweis: per Induktion über den Aufbau von γ.

- IA Da die Sprachen $\emptyset$, $\{\varepsilon\}$ und $\{a\}$ für $a \in \Sigma$ regulär sind, gilt die Aussage für die regulären Ausdrücke $\gamma \in \{\varnothing, \lambda\} \cup \Sigma$.
- IS Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter Vereinigung, Konkatenation und Kleene-Iteration (Folgerung auf Folie 5.9). □

Proposition

Zu jedem DFA M gibt es einen regulären Ausdruck γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Beweis:
Sei $M = \big(\{1, \ldots, n\}, \Sigma, 1, \delta, E\big)$ ein DFA.

Wir konstruieren einen regulären Ausdruck γ mit $L(M) = L(\gamma)$.
Für ein Wort $w \in \Sigma^*$ sei

$$\mathrm{Pref}(w) = \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \colon w = uv, \varepsilon \neq u \neq w\}$$

die Menge aller nicht-leeren echten Präfixe von w.

Für $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ sei

$$L_{i,j}^k = \left\{ w \in \Sigma^* \;\middle|\; \widehat{\delta}(i, w) = j, \forall u \in \mathrm{Pref}(w) \colon 1 \leq \widehat{\delta}(i, u) \leq k \right\}.$$

Intuitiv: Ein Wort w gehört zu $L_{i,j}^k$ genau dann, wenn w den Zustand i in den Zustand j überführt und wenn dabei kein Zwischenzustand (außer vielleicht ganz am Anfang und ganz am Ende) $> k$ vorkommt.

Behauptung: Für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ und $k \in \{0, \ldots, n\}$ existieren reguläre Ausdrücke $\gamma_{i,j}^k$ mit $L(\gamma_{i,j}^k) = L_{i,j}^k$.

Bemerkung: Falls $E = \{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\}$, ergibt sich dann

$$L(\gamma_{1,i_1}^n + \gamma_{1,i_2}^n + \cdots + \gamma_{1,i_\ell}^n) = L(M),$$

womit der Beweis abgeschlossen sein wird.

Beweis der Behauptung, d.h. Konstruktion von $\gamma_{i,j}^k$ durch Induktion über $k \in \{0, \ldots, n\}$.

IA $k = 0$. Es gilt:

$$L_{i,j}^0 = \begin{cases} \{a \in \Sigma \mid \delta(i,a) = j\} & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma \mid \delta(i,a) = j\} \cup \{\varepsilon\} & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Gilt $\{a_1, \ldots, a_m\} = \{a \in \Sigma \mid \delta(i,a) = j\}$, so setzen wir:

$$\gamma_{i,j}^0 = \begin{cases} a_1 + a_2 + \cdots + a_m + \varnothing & \text{falls } i \neq j \\ a_1 + a_2 + \cdots + a_m + \lambda & \text{falls } i = j \end{cases}$$

In jedem Fall gilt dann $L(\gamma_{i,j}^0) = L_{i,j}^0$.

IV Sei $0 \leq k < n$ und seien die regulären Ausdrücke $\gamma_{p,q}^k$ für alle $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ bereits konstruiert.

IS Sei $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

Dann gilt:

$$L_{i,j}^{k+1} = L_{i,j}^k \cup L_{i,k+1}^k \left(L_{k+1,k+1}^k\right)^* L_{k+1,j}^k$$

Begründung:

„$\subseteq$“: Sei $w \in L_{i,j}^{k+1}$ und sei $\ell \geq 0$ so, daß der Zustand $k+1$ auf dem eindeutigen mit w beschrifteten Pfad von i nach j genau ℓ mal als echter Zwischenzustand auftaucht.

1.Fall: $\ell = 0$, d.h. $k+1$ kommt nicht als echter Zwischenzustand vor.

$\rightsquigarrow \quad w \in L^k_{i,j}$

2.Fall: $\ell > 0$.

$\rightsquigarrow w = w_0 w_1 \cdots w_{\ell-1} w_\ell$, wobei:

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}(i, w_0) &= k+1 \\ \widehat{\delta}(k+1, w_p) &= k+1 \text{ für } 1 \leq p \leq \ell - 1 \\ \widehat{\delta}(k+1, w_\ell) &= j \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow \quad w_0 \in L^k_{i,k+1}$, $w_p \in L^k_{k+1,k+1}$ $(1 \leq p \leq \ell - 1)$, $w_\ell \in L^k_{k+1,j}$

$\rightsquigarrow \quad w = w_0(w_1 \cdots w_{\ell-1})w_\ell \in L^k_{i,k+1}\big(L^k_{k+1,k+1}\big)^* L^k_{k+1,j}$

Damit ist die Inklusion „$\subseteq$“ der Behauptung von Folie 5.21 gezeigt.

„$\supseteq$“:
Für alle $p, q \in \{1, \ldots, n\}$ gilt $L_{p,q}^k \subseteq L_{p,q}^{k+1}$.

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} & L_{i,j}^k \cup L_{i,k+1}^k \big(L_{k+1,k+1}^k\big)^* L_{k+1,j}^k \\ \subseteq \quad & L_{i,j}^{k+1} \cup L_{i,k+1}^{k+1} \big(L_{k+1,k+1}^{k+1}\big)^* L_{k+1,j}^{k+1} \\ \subseteq \quad & L_{i,j}^{k+1} \end{aligned}$$

Damit ist auch die Inklusion „$\supseteq$“ der Behauptung von Folie 5.21 gezeigt.

Es gilt also wirklich

$$L_{i,j}^{k+1} = L_{i,j}^{k} \cup L_{i,k+1}^{k} \left(L_{k+1,k+1}^{k}\right)^{*} L_{k+1,j}^{k} \,.$$

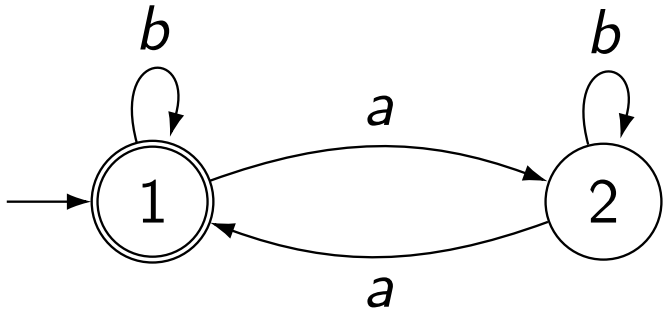
Außerdem haben wir bereits reguläre Ausdrücke $\gamma_{p,q}^{k}$ mit $L(\gamma_{p,q}^{k}) = L_{p,q}^{k}$ konstruiert.

Mit

$$\gamma_{i,j}^{k+1} = \gamma_{i,j}^{k} + \gamma_{i,k+1}^{k} \left(\gamma_{k+1,k+1}^{k}\right)^{*} \gamma_{k+1,j}^{k}$$

erhalten wir $L(\gamma_{i,j}^{k+1}) = L_{i,j}^{k+1}$. □

Beispiel: Betrachte den folgenden DFA:



Damit ergibt sich (bei Durchführung offensichtlicher Vereinfachungen):

$$\gamma^0_{1,1} = \lambda + b \qquad \gamma^0_{1,2} = a \qquad \gamma^0_{2,1} = a \qquad \gamma^0_{2,2} = \lambda + b$$

$$\gamma^1_{1,1} = \gamma^0_{1,1} + \gamma^0_{1,1}(\gamma^0_{1,1})^*\gamma^0_{1,1} = \lambda + b + (\lambda + b)(\lambda + b)^*(\lambda + b) \widehat{=} b^*$$

$$\gamma^1_{1,2} = \gamma^0_{1,2} + \gamma^0_{1,1}(\gamma^0_{1,1})^*\gamma^0_{1,2} = a + (\lambda + b)(\lambda + b)^* a \widehat{=} b^* a$$

$$\gamma^1_{2,1} = \gamma^0_{2,1} + \gamma^0_{2,1}(\gamma^0_{1,1})^*\gamma^0_{1,1} = a + a(\lambda + b)^*(\lambda + b) \widehat{=} ab^*$$

$$\gamma^1_{2,2} = \gamma^0_{2,2} + \gamma^0_{2,1}(\gamma^0_{1,1})^*\gamma^0_{1,2} = \lambda + b + a(\lambda + b)^* a \widehat{=} \lambda + b + ab^* a$$

$$\gamma^2_{1,1} = \gamma^1_{1,1} + \gamma^1_{1,2}(\gamma^1_{2,2})^*\gamma^1_{2,1} = b^* + b^* a(\lambda + b + ab^* a)^* ab^*$$

Zusammenfassender Satz

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache. Dann sind äquivalent

1. L ist regulär, d.h. es gibt einen DFA M mit $L(M) = L$.
2. Es gibt einen NFA bzw. einen ε-NFA M mit $L(M) = L$.
3. L ist rechtslinear, d.h. es gibt eine rechtslineare Grammatik G mit $L(G) = L$.
4. Es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L(\gamma) = L$.
5. L ist erste Komponente einer Lösung eines linearen Gleichungssystems.
6. L ist in monadischer Logik 2. Stufe definierbar.
7. L ist abgeschlossen unter einer Kongruenz endlichen Indexes.
8. Es gibt Homomorphismus $\eta\colon \Sigma^* \to S$ in ein endliches Monoid S mit $L = \eta^{-1}\eta(L)$.
9. L wird von einem alternierenden Automaten akzeptiert.
10. L wird von einem 2-Weg-Automaten akzeptiert.

Weitere Forschungsfragen

1. DFAs mit speziellen Eigenschaften (z.B. „zählerfrei“): Welche Sprachen akzeptieren diese? Kann ich feststellen, ob ein allgemeiner DFA äquivalent zu einem mit spezieller Eigenschaft ist?
2. Größenvergleich von äquivalenten Mechanismen (z.B. „DFAs sind notwendigerweise exponentiell größer als NFAs“ oder „Übersetzung von regulären Ausdrücken in NFA ist in polynomieller Zeit möglich“)

Zusammenfassung

verschiedene Modelle zur Beschreibung aller regulären Sprachen:

- Rechtslineare Grammatiken:
  - Verbindung zur Chomsky-Hierarchie
  - erzeugen Sprachen
  - nicht geeignet, um zu entscheiden, ob ein geg. Wort zur Sprache gehört
- NFAs:
  - erlauben kleine, kompakte Darstellung
  - intuitive graphische Notation
  - nicht geeignet, um zu entscheiden, ob ein geg. Wort zur Sprache gehört
- DFAs:
  - für effiziente Beantwortung der Frage, ob ein Wort zur Sprache gehört
  - sind u.U. exponentiell größer als NFA
- Reguläre Ausdrücke:
  - erlauben kompakte Darstellung in Textform

Beispielhafte Testfragen aus dieser Vorlesung (andere sind möglich):

- Lückentext „Die Klasse der regulären Sprachen ist abgeschlossen unter den folgenden 6 Operationen: ...“
- Definition Reg(Σ)
- Definition $L(\alpha)$ für regulären Ausdruck α
- Lückentext „Ist α regulärer Ausdruck, so ist $L(\alpha)$ ...“
- Lückentext „Zu jedem DFA M gibt es ... mit ...“

Zusammenfassung 5. Vorlesung

in dieser Vorlesung neu

- Abschluß der Klasse der rechtslinearen Sprachen unter regulärer Substitution (und daher Vereinigung, Konkatenation, Kleene-Iteration) und Schnitt).
  Für die Konstruktionen sind ε-NFAs sehr hilfreich.
- reguläre Ausdrücke beschreiben genau die rechtslinearen Sprachen, sind also gleich ausdrucksstark wie Typ-3-Grammatiken, DFAs und NFAs

kommende Vorlesung

- Gibt es Sprachen, die nicht rechtslinear sind?
- Wie kannn ich von einer geg. Sprachen zeigen, daß sie nicht rechtslinear ist?

Zusatzmaterial

Beweis der Behauptung auf Folien 5.4

IA $w = \varepsilon$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta'}(S', \varepsilon) &= S' && \text{da } M' \text{ NFA ist} \\
&= \overline{S} \\
&= \widehat{\delta}(S, \varepsilon) && \text{da } M \ \varepsilon\text{-NFA ist}
\end{aligned}$$

IS Sei $w = va$ und gelte die Behauptung für v. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\widehat{\delta'}(S', va) &= \widehat{\delta'}\big(\widehat{\delta'}(S', v), a\big) && \text{Lemma auf Folie 3.20(2)} \\
&= \widehat{\delta'}\big(\widehat{\delta}(S, v), a\big) && \text{Beh. gilt für } v \\
&= \bigcup_{z \in \widehat{\delta}(S,v)} \widehat{\delta'}(\{z\}, a) && \text{Lemma auf Folie 3.20(4)} \\
&= \bigcup_{z \in \widehat{\delta}(S,v)} \delta'(z, a) && M' \text{ ist NFA}
\end{aligned}$$

$$= \bigcup_{z \in \widehat{\delta}(S,v)} \widehat{\delta}(z,a) \qquad \text{Definition von } M'$$

$$= \widehat{\delta}\big(\widehat{\delta}(S,v),a\big) \qquad \text{Lemma auf Folie 3.20(4)}$$

$$= \widehat{\delta}(S,va) \qquad \text{Lemma auf Folie 3.20(2)}$$

□

Alternativer Beweis der Folgerung von Folie 5.10.

Folgerung von Folie 5.10

Aus NFAs M_a und M_b kann ein NFA $M_\cap$ berechnet werden mit $L(M_\cap) = L(M_a) \cap L(M_b)$.

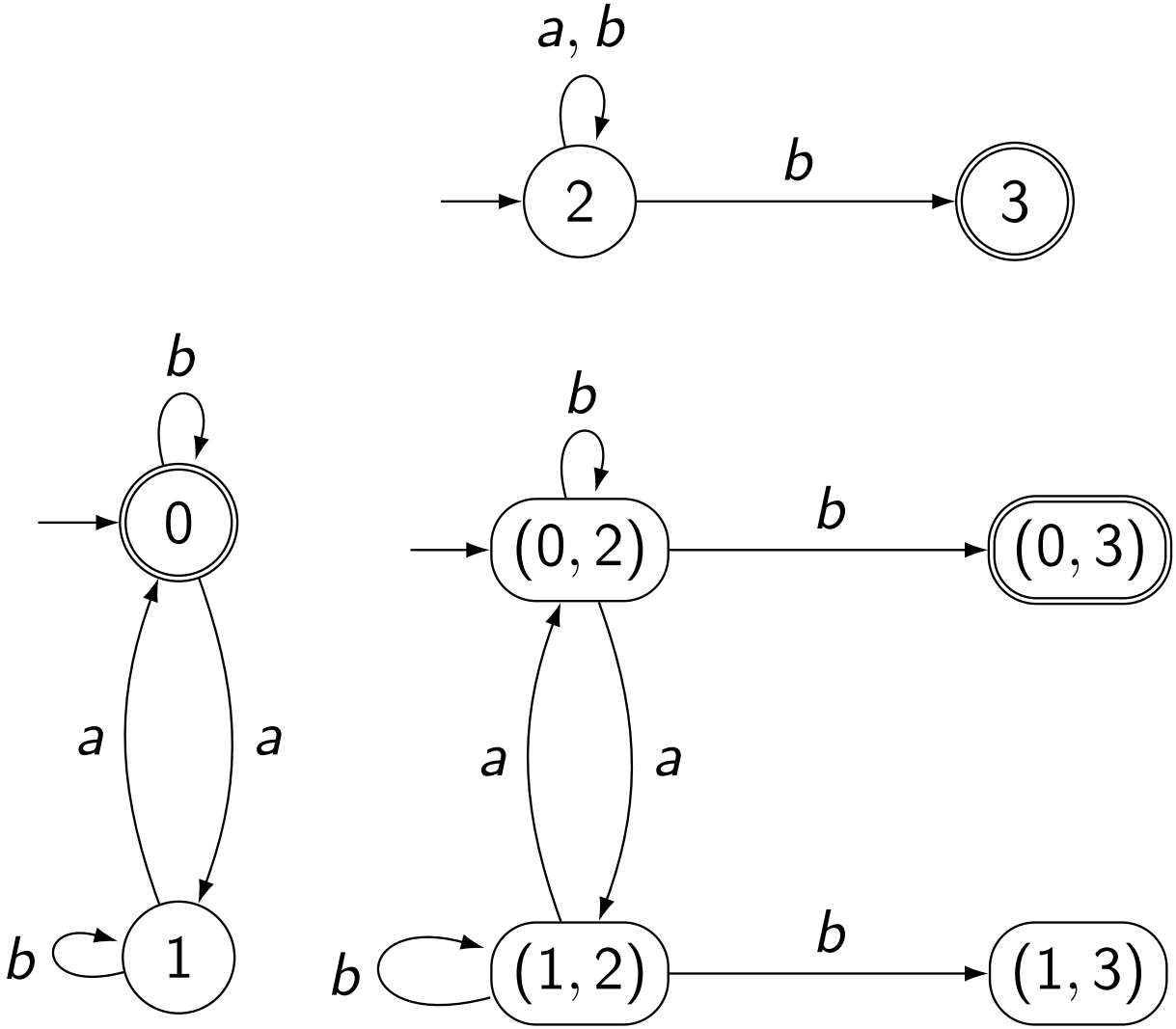
Beweis:
Seien $M_i = (Z_i, \Sigma, S_i, \delta_i, E_i)$ NFAs mit $L(M_i) = L_i$. Wir betrachten den NFA

$$M = (\underbrace{Z_1 \times Z_2}_{Z}, \Sigma, \underbrace{S_1 \times S_2}_{S}, \delta, \underbrace{E_1 \times E_2}_{E}),$$

mit

$$\begin{aligned} \delta\big((z_1, z_2), a\big) &= \big\{(z_1', z_2') \;\big|\; z_1' \in \delta_1(z_1, a), z_2' \in \delta_2(z_2, a)\big\} \\ &= \delta_1(z_1, a) \times \delta_2(z_2, a)\,. \end{aligned}$$

Bildung des Kreuzprodukts zweier NFAs:



Behauptung: Für alle $Y \subseteq Z_1 \times Z_2$ und alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$\begin{aligned}\widehat{\delta}(Y, w) &= \bigcup_{(z_1,z_2)\in Y} \Big(\widehat{\delta_1}\big(\{z_1\}, w\big) \times \widehat{\delta_2}\big(\{z_2\}, w\big)\Big) \\ &= \Big\{(z_1', z_2') \;\Big|\; \exists (z_1, z_2) \in Y : z_1' \in \widehat{\delta_1}\big(\{z_1\}, w\big), z_2' \in \widehat{\delta_2}\big(\{z_2\}, w\big)\Big\}\end{aligned}$$

(der Beweis erfolgt per Induktion über $|w|$).

Konsequenz: Das Kreuzprodukt der NFS M_1 und M_2 akzeptiert $L(M_1) \cap L(M_2)$.

Nach der Proposition auf Folie 4.4 ist $L(M_1) \cap L(M_2)$ also regulär. □