2 Automatische Strukturen

2.1 Synchron-rationale Relationen

Das Problem bei rationalen Relationen ist, daß sie nicht unter Schnitt und Komplement abgeschlossen sind, da die Bänder mit unterschiedlicher Geschwindigkeit gelesen werden können. Dies soll jetzt korrigiert werden.

Idee: die Bänder werden mit gleicher Geschwindigkeit gelesen.

Sei Σ ein Alphabet und $\diamond \notin \Sigma$. Setze $\Sigma_\diamond = \Sigma \cup \{\diamond\}$.

Seien $u_i = a_1^i a_2^i \cdots a_{n_i}^i$ Wörter (u.U. unterschiedlicher Länge) mit $a_j^i \in \Sigma$ für alle $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq n_i$. Setze $n := \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ und

$$b_j^i = \begin{cases} a_j^i & \text{falls } j \leq n_i \\ \diamond & \text{sonst} \end{cases}$$

für $1 \leq i \leq k$ und $1 \leq j \leq n$. Dann ist $\otimes(u_1, u_2, \dots, u_k)$ das Wort

$$\begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ \vdots \\ b_1^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \\ \vdots \\ b_2^k \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_n^1 \\ b_n^2 \\ \vdots \\ b_n^k \end{pmatrix}$$

über $\Sigma_\diamond^k := (\Sigma_\diamond)^k$.

Beispiel. $u_1 = abba$, $u_2 = aab$ und $u_3 = aaabbb$. Dann ist $\otimes(u_1, u_2, u_3)$ das Wort

$$\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ a \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \diamond \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diamond \\ \diamond \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diamond \\ \diamond \\ b \end{pmatrix}$$

Für eine Relation $R \subseteq (\Sigma^*)^k$ setze

$$R^\otimes = \left\{ \otimes(\overline{u}) \;\middle|\; \overline{u} \in R \right\}.$$

Diese Sprache über $\Sigma_\diamond^k$ heißt *Verklebung* von R.

Ein *synchroner* k*-Bandautomat über* Σ ist ein NFA M über dem Alphabet $\Sigma_\diamond^k$. Die von M akzeptierte *Relation* $R(M)$ ist die Menge der Tupel $(u_1, \ldots, u_k) \in (\Sigma^*)^k$ mit $\otimes(u_1, \ldots, u_k) \in L(M)$, d.h. $R(M)^\otimes = L(M) \cap \left(\left(\Sigma^*\right)^k\right)^\otimes$.

Wir nennen eine Relation R *synchron-rational*, wenn es einen synchronen Mehrbandautomaten M gibt mit $R = R(M)$.

Bemerkung. Es wird *nicht* gefordert, daß $L(M) \subseteq \left(\left(\Sigma^*\right)^k\right)^\otimes$ ist, d.h. M kann auch Wörter über $\Sigma_\diamond^k$ akzeptieren, die keine Verklebung eines Tupels darstellen (später werden wir sehen, daß dies aber sichergestellt werden kann).

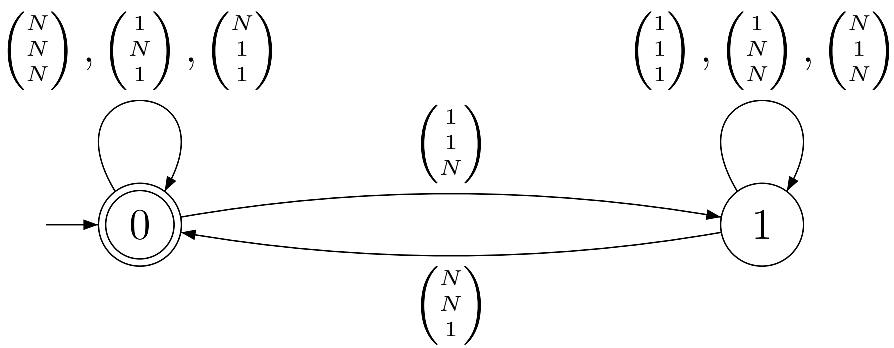
Beispiel 2.1. 1. Sei M eine Turingmaschine mit Bandalphabet Γ und Zustandsmenge Q. Eine Konfiguration ist ein Word aus $\Gamma^* \, Q \, \Gamma^+$. Dann ist die Einschrittrelation

$$\left\{(upv, u'p'v') \;\middle|\; upv \vdash_M u'p'v'\right\}$$

synchron-rational.

2. Für $w = a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \in \{0,1\}^*$ sei $[w] = \sum_{0 \le i \le n} a_i s^i$, also z.B. $[110] = [0110] = 6$ (d.h. $w \in \{0,1\}^+$ ist eine Binärdarstellung von $[w]$ mit, u.U., führenden Nullen). Die Relation $\left\{(u, v, w) \;\middle|\; [u] + [v] = [w]\right\}$ ist nicht synchron-rational.

3. Für $w = a_0 a_1 \dots a_{n-1} a_n \in \{0,1\}^*$ sei $[w] = \sum_{0 \le i \le n} a_i s^i$, also z.B. $[110] = [11] = 3$ (d.h. $w^R \in \{0,1\}^+$ ist eine Binärdarstellung von $[w]$ mit, u.U., führenden Nullen). Der folgende DFA (in dem N für beliebige Elemente aus $\{0, \diamond\}$ steht) akzeptiert eine Verklebung $\otimes(u, v, w)$ genau dann, wenn $[u] + [v] = [w]$ gilt



Also ist die Relation $\{(u, v, w) \mid [u] + [v] = [w]\}$ synchron-rational.

Lemma 2.2. *Aus $k \in \mathbb{N}$ und Σ kann ein synchroner k-Bandautomat M berechnet werden mit $L(M) = \left(\left(\Sigma^*\right)^k\right)^{\otimes}$.*

Beweis:
Es gilt

$$\left(\Sigma_\diamond^k\right)^* \setminus \left(\left(\Sigma^*\right)^k\right)^{\otimes} = \left(\Sigma_\diamond^k\right)^* \begin{pmatrix} \diamond \\ \vdots \\ \diamond \end{pmatrix} \left(\Sigma_\diamond^k\right)^* \cup \bigcup_{(*)} \left(\Sigma_\diamond^k\right)^* \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \left(\Sigma_\diamond^k\right)^*$$

wobei die Vereinigung $(*)$ über alle Paare $\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}\right)$ aus $\Sigma_\diamond^k$ gebildet wird mit $a_i = \diamond$ und $b_i \in \Sigma$ für ein $1 \leq i \leq k$. Also kann ein NFA über $\Sigma_\diamond^k$ für diese Sprache (und damit auch für ihr Komplement, das uns ja interessiert) berechnet werden. $\square$

Lemma 2.3. *Aus $k \in \mathbb{N}$ und synchronen k-Bandautomaten M_1 und M_2 über Σ können synchrone k-Bandautomaten M und M' berechnet werden mit $R(M) = R(M_1) \cap R(M_2)$ und $R(M') = (\Sigma^*)^k \setminus R(M_1)$.*

Bemerkung. Damit können auch synchrone k-Bandautomaten für $R(M_1) \cup R(M_2)$ und $R(M_1) \setminus R(M_2)$ berechnet werden, d.h. die Klasse der synchron-rationalen Relationen ist effektiv unter Booleschen Operationen abgeschlossen.

Beweis:
Berechne NFAs über $\Sigma_\diamond^k$ mit $L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$ und $L(M') = \left(\Sigma_\diamond^k\right)^* \setminus L(M_1)$

Für $\overline{u} \in \left(\Sigma^*\right)^k$ gelten dann

$$\begin{aligned} \overline{u} \in R(M) &\iff \otimes\overline{u} \in L(M) \\ &\iff \otimes(\overline{u}) \in L(M_1) \cap L(M_2) \\ &\iff \overline{u} \in R(M_1) \text{ und } \overline{u} \in R(M_2) \\ &\iff \overline{u} \in R(M_1) \cap R(M_2) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \overline{u} \in R(M') &\iff \otimes(\overline{u}) \in L(M') \\ &\iff \otimes(\overline{u}) \notin L(M_1) \\ &\iff \overline{u} \notin R(M_1) \end{aligned}$$

$\square$

Nach Definition ist eine Relation $R \subseteq \left(\Sigma^*\right)^k$ genau dann synchron-rational, wenn die Sprache $R^\otimes \cap \left(\left(\Sigma^*\right)^k\right)^\otimes$ regulär ist. Das folgende Lemma zeigt, daß dies effektiv genau dann der Fall ist, wenn die Sprache $R^\otimes$ regulär ist.

Lemma 2.4. *Aus einem synchronen k-Bandautomaten M kann ein NFA M' mit $L(M') = R(M)^\otimes$ (und damit insbes. $R(M') = R(M)$) berechnet werden.*

Beweis:
Es gilt

$$R(M)^\otimes = L(M) \cap \left(\left(\Sigma^*\right)^k\right)^\otimes .$$

Da $L(M)$ regulär ist, ist (unter Verwendung von Lemma 2.2) auch $R(M)^\otimes$ regulär und ein NFA kann berechnet werden. $\square$

Wir können also ab jetzt annehmen, daß jeder synchrone Mehrbandautomat M auch $L(M) = R(M)^\otimes$ erfüllt.

Lemma 2.5. *Aus einem synchronen k_1-Bandautomaten M_1 und einem synchronen k_2-Bandautomaten M_2 kann ein synchroner (k_1+k_2)-Bandautomat M berechnet werden mit $R(M) = R(M_1) \times R(M_2)$.*

Beweis:
Nach Lemma 2.4 können wir annehmen, daß $L(M_i) = R(M_i)^{\otimes}$ für $i \in \{1, 2\}$ gilt. Aus M_i kann NFA $M_i' = (Q_i, \Sigma_\diamond^{k_i}, \iota_i, \delta_i, F_i)$ berechnet werden mit

$$L(M_i') = L(M_i) \cdot \left(\diamond^{k_i}\right)^* .$$

Setze $M = (Q, \Sigma_\diamond^{k_1+k_2}, I, \delta, F)$ mit $Q = Q_1 \times Q_2$, $I = I_1 \times I_2$,

$$\delta\big((p_1, p_2), (\overline{c_1}, \overline{c_2})\big) = \delta_1(p_1, \overline{c_1}) \times \delta_2(p_2, \overline{c_2})$$

für alle $(p_1, p_2) \in Q$, $\overline{c_1} \in \Sigma_\diamond^{k_1}$, $\overline{c_2} \in \Sigma_\diamond^{k_2}$ und $F = F_1 \times F_2$.

<u>Vorüberlegung:</u> Für $u_1, \ldots, u_{k_i}, v_1, \ldots, v_{k_i} \in \Sigma^*$ und $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\otimes(u_1, \ldots, u_{k_i}) \cdot (\diamond^{k_i})^m = \otimes(v_1, \ldots, v_{k_i}) \cdot (\diamond^{k_i})^n$ gilt $u_1 = v_1$, $\ldots$, $u_{k_i} = v_{k_i}$ und $m = n$.

Seien u_i, a^i_j, n_i, n und b^i_j wie in der Definition der Verklebung von Wörtern (mit $k = k_1 + k_2$). Dann gilt

$$
\begin{aligned}
(u_1, \ldots, u_k) \in R(M) &\iff \delta\big(I, \otimes(u_1, \ldots, u_k)\big) \cap F \neq \emptyset \\
&\iff \begin{pmatrix} b^1_1 \\ b^2_1 \\ \vdots \\ b^{k_1}_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b^1_n \\ b^2_n \\ \vdots \\ b^{k_1}_n \end{pmatrix} \in L(M'_1) = L(M_1) \cdot (\diamond^{k_1})^* \text{ und} \\
& \begin{pmatrix} b^{k_1+1}_1 \\ b^{k_1+2}_1 \\ \vdots \\ b^{k}_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b^{k_1+1}_n \\ b^{k_1+2}_n \\ \vdots \\ b^{k}_n \end{pmatrix} \in L(M'_2) = L(M_2) \cdot (\diamond^{k_2})^* \\
&\overset{(*)}{\iff} \otimes(u_1, \ldots, u_{k_1}) \in L(M_1) \text{ und } \otimes(u_{k_1+1}, \ldots, u_k) \in L(M_2) \\
&\iff (u_1, \ldots, u_{k_1}) \in R(M_1) \text{ und } (u_{k_1+1}, \ldots, u_k) \in R(M_2) \\
&\iff (u_1, \ldots, u_k) \in R(M_1) \times R(M_2)
\end{aligned}
$$

Die Äquivalenz $(*)$ verwendet die Vorüberlegung und die Annahme $L(M_i) = R(M_i)^{\otimes}$. □

Lemma 2.6. *Aus einem NFA M kann ein synchroner 2-Bandautomat M' berechnet werden mit $R(M') = \{(u, u) \mid u \in L(M)\}$.*

Beweis:
Da die Sprache $L(M) \subseteq \Sigma^*$ regulär ist, ist die einstellige Relation $L(M) \subseteq (\Sigma^*)^1$ synchron-rational.

Die Relation $D = \{(u, u) \mid u \in \Sigma^*\}$ ist synchron-rational, denn ihre Verklebung ist $D^{\otimes} = \{(b, b) \mid b \in \Sigma\}^*$ und damit regulär.

Damit ist nach Lemma 2.3 auch

$$\big(L(M) \times L(M)\big) \cap D = \{(u, u) \mid u \in L(M)\}$$

synchron-rational. $\square$

Lemma 2.7. *Aus einem synchronen $(k+1)$-Bandautomaten M kann ein synchroner k-Bandautomat $\overline{M}$ berechnet werden mit*

$$R(\overline{M}) = \{(u_1, \dots, u_k) \mid \text{ es gibt } u_{k+1} \text{ mit } (u_1, \dots, u_k, u_{k+1}) \in R(M)\}\,.$$

Beweis:
Sei $M = (Q, \Sigma_\diamond^{k+1}, \iota, \delta, F)$ mit $L(M) = R(M)^{\otimes}$.

Setze $\overline{M} = (Q, \Sigma_\diamond^{k}, \iota, \overline{\delta}, \overline{F})$ mit

$$\overline{\delta}\big(p, (b_1, \dots, b_k)\big) = \Big\{q \;\Big|\; \text{es gibt } b \in \Sigma_\diamond \text{ mit } q \in \delta(p, \big(b_1, \dots, b_k, b)\big)\Big\}$$

und

$$\overline{F} = \Big\{q \in Q \;\Big|\; \text{es gibt } u \in \Sigma^* \text{ mit } \delta\big(q, \otimes(\varepsilon, \dots, \varepsilon, u)\big) \cap F \neq \emptyset\Big\}\,.$$

Seien u_i, a^i_j, n, b^i_j wie in Definition der Verklebung (für $1 \leq i \leq k$). Dann gilt

$$\otimes(u_1, \ldots, u_k) = \begin{pmatrix} b^1_1 \\ b^2_1 \\ \vdots \\ b^k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_2 \\ b^2_2 \\ \vdots \\ b^k_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b^1_n \\ b^2_n \\ \vdots \\ b^k_n \end{pmatrix} \in L(\overline{M})$$

genau dann, wenn einer der beiden folgenden Fälle eintritt:

(1) es gibt $m \leq n$ und $u = a_1 a_2 \cdots a_m \in \Sigma^*$ mit

$$\otimes(u_1, \ldots, u_k, u) = \begin{pmatrix} b^1_1 \\ b^2_1 \\ \vdots \\ b^k_1 \\ a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_2 \\ b^2_2 \\ \vdots \\ b^k_2 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b^1_m \\ b^2_m \\ \vdots \\ b^k_m \\ a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^1_{m+1} \\ b^2_{m+1} \\ \vdots \\ b^k_{m+1} \\ \diamond \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b^1_n \\ b^2_n \\ \vdots \\ b^k_n \\ \diamond \end{pmatrix} \in L(M)$$

(2) es gibt $m > n$ und $u = a_1 a_2 \cdots a_m \in \Sigma^*$ mit

$$\otimes(u_1, \ldots, u_k, u) = \begin{pmatrix} b_1^1 \\ b_1^2 \\ \vdots \\ b_1^k \\ a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2^1 \\ b_2^2 \\ \vdots \\ b_2^k \\ a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_n^1 \\ b_n^2 \\ \vdots \\ b_n^k \\ a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \diamond \\ \diamond \\ \vdots \\ \diamond \\ a_{n+1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} \diamond \\ \diamond \\ \vdots \\ \diamond \\ a_m \end{pmatrix} \in L(M)$$

Dies ist aber genau dann der Fall, wenn es ein Wort u gibt mit $\otimes(u_1, \ldots, u_k, u) \in L(M)$, d.h. mit $(u_1, \ldots, u_k, u) \in R(M)$. □

Bemerkung Sind R_1 und R_2 binäre synchron-rationale Relationen, so ist $R_1 R_2 = \{(u_1 u_2, v_1 v_2) \mid (u_i, v_i) \in R_i\}$ i.a. nicht synchron-rational.

Beweis:
$R_1 = \{(a^n, \varepsilon) \mid n \in \mathbb{N}\}$ und $R_2 = \{(b^n, c^n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. □