2.2 Automatische Strukturen

Definition. Eine τ-Struktur $\mathcal{A} = \big(A, (R^{\mathcal{A}})_{R\in\mathcal{R}}, (c^{\mathcal{A}})_{c\in\mathcal{C}}\big)$ ist *automatisch*, wenn es ein Alphabet Σ gibt, so daß die Grundmenge $A \subseteq \Sigma^*$ regulär und die Relationen $R^{\mathcal{A}} \subseteq (\Sigma^*)^{\mathrm{ar}(R)}$ synchron-rational sind (für alle $R \in \mathcal{R}$).

Eine τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist *automatisch darstellbar*, wenn es eine isomorphe automatische Struktur gibt.

Eine *automatische Präsentation* einer automatischen τ-Struktur $\mathcal{A}$ ist ein Tupel $P = \big(M, (M_R)_{R\in\mathcal{R}}, (w_c)_{c\in\mathcal{C}}\big)$ von synchronen Mehrbandautomaten und Wörtern mit

$$\mathcal{A} = \Big(L(M), \big(R(M_R)\big)_{R\in\mathcal{R}}, (w_c)_{c\in\mathcal{C}}\Big)\,.$$

Wir schreiben $\mathcal{A}(P)$ für die Struktur $\Big(L(M), \big(R(M_R)\big)_{R\in\mathcal{R}}, (w_c)_{c\in\mathcal{C}}\Big)$.

Bemerkung. Es wird nur etwas für die Grundmenge und die Relationen gefordert, aber nichts für die Konstanten. Dies ist auch nicht nötig, denn in einer jeden automatischen Struktur gibt es nur endlich viele Konstanten (siehe Definition „Signatur“) und diese sind endliche Wörter, können also mit endlichen Methoden angegeben werden.

Beispiel. Jede endliche Struktur $\mathcal{A} = \big(A, (R^{\mathcal{A}})_{R\in\mathcal{R}}, (c^{\mathcal{A}})_{c\in\mathcal{C}}\big)$ ist automatisch darstellbar: Wähle $\Sigma = A$. Dann ist A regulär und jede der Sprachen $(R^{\mathcal{A}})^{\otimes}$ ist endlich und daher regulär.

Beispiel 2.1 (Fortsetzung)

1. Der Konfigurationsgraph einer Turingmaschine ist automatisch.

2. Die Struktur $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ ist automatisch darstellbar: wähle $A = \{0\} \cup \{0,1\}^*1$ und die Abbildung $A \to \mathbb{N}\colon w \mapsto [w]$ wie in Beispiel 2.1 (3).

   Die Relation

$$\begin{aligned} R &= \big\{(u,v,w) \in A^3 \bigm| [u]+[v]=[w]\big\} \\ &= \big\{(u,v,w) \in (\Sigma^*)^3 \bigm| [u]+[v]=[w]\big\} \cap A^3 \end{aligned}$$

   ist nach Beispiel 2.1 und nach Lemmata 2.4 und 2.3 synchron-rational.

   Daher ist die Abbildung $[.]\colon A \to \mathbb{N}\colon u \mapsto [u]$ ein Isomorphismus von (A, R) auf $(\mathbb{N}, +)$, d.h. $(\mathbb{N}, +) \cong (A, R)$.

Es ist sogar $(\mathbb{N}, +, |_2, 0, 1)$ automatisch darstellbar mit $m \mid_2 n \iff m = 2^i \mid n$ für ein $i \in \mathbb{N}$: Die synchron-rationale Relation

$$S = \left\{(0^i1, 0^iw) \;\middle|\; w \in \{0,1\}^*1, i \in \mathbb{N}\right\} \cup \left(0^*1 \times \{0\}\right)$$

erfüllt $m \mid_2 n \iff \left(\mathrm{revbin}(m), \mathrm{revbin}(n)\right) \in S$ (dabei ist $\mathrm{revbin}(m) \in \{0\} \cup \{0,1\}^*\{1\}$ die umgekehrte Binärdarstellung von $m \in \mathbb{N}$).

Allgemeiner ist sogar (für jedes $k \geq 2$) die Struktur $(\mathbb{N}, +, |_k, 0, 1)$ mit $m \mid_k n \iff \exists i \geq 0\colon m = k^i \mid n$ automatisch darstellbar.

Beispiel 2.8. Für jedes Alphabet Σ ist die Struktur $\mathcal{T}_\Sigma = \left(\Sigma^*, \leq_{\mathrm{pref}}, (S_a)_{a\in\Sigma}, \mathrm{el}\right)$ automatisch:

- Σ^* ist regulär
- Betrachte die reguläre Sprache $L = \left\{(a,a) \;\middle|\; a \in \Sigma\right\}^* \left\{(\diamond, a) \;\middle|\; a \in \Sigma\right\}^*$. Dann gilt $\leq_{\mathrm{pref}}^{\otimes} = L$, d.h. $\leq_{\mathrm{pref}}$ ist synchron-rational.
- $S_a^{\otimes} = \left\{(a,a) \;\middle|\; a \in \Sigma\right\}^* \left\{(\diamond, a) \;\middle|\; a \in \Sigma\right\}$ ist ebenfalls regulär, d.h. S_a ist synchron-rational.
- $\mathrm{el}^{\otimes} = (\Sigma \times \Sigma)^*$ ist regulär, el also synchron-rational.

Beispiel 2.9. Sei $\Sigma = \{0, 1\}$ und (für $u, v \in \Sigma^*$)

$$u \leq_{\text{lex}} v \iff u \text{ ist Präfix von } v \text{ oder } \exists x, y, z \in \Sigma^* \colon x0y = u, x1z = v\,.$$

Es gilt

$$\leq_{\text{lex}}^{\otimes} = \leq_{\text{pref}}^{\otimes} \cup \left\{(a, a) \;\middle|\; a \in \Sigma\right\}^* \left\{(0, 1)\right\} (\Sigma^* \times \Sigma^*)^{\otimes}\,.$$

Aufgrund von Beispiel 2.8 und Lemma 2.2 ist diese Sprache regulär, $\leq_{\text{lex}}$ also synchron-rational. Also ist die Struktur $(\Sigma^*, \leq_{\text{lex}})$ automatisch.

Beispiel 2.10. $\Sigma = \{0,1\}$

Die Struktur $\omega = (\mathbb{N}, \leq)$ ist automatisch darstellbar: Setze $A = 1^*\,0$ und $R = \leq_{\text{lex}} \cap A \times A$. Diese Relation ist nach Lemmata 2.3 , 2.4 und 2.5 und nach Beispiel 2.9 synchron-rational.

Wegen $(1^m0 \leq_{\text{lex}} 1^n0 \iff m \leq n)$ gilt $\omega \cong (A, R)$.

Die Struktur $\omega^2 = (\mathbb{N}^2, \leq_{\text{lex}})$ ist automatisch darstellbar: $A = (1^*\,0)^2$ und $R = \leq_{\text{lex}} \cap A \times A$. Diese Relation ist wieder nach Lemmata 2.4, 2.5 und 2.3 und nach Beispiel 2.9 synchron-rational.

Es gilt

$$\begin{aligned} 1^{m_1}01^{m_2}0 \leq_{\text{lex}} 1^{n_1}01^{n_2}0 &\iff m_1 < n_1 \text{ oder } m_1 = n_1 \text{ und } m_2 \leq n_2 \\ &\iff (m_1, m_2) \leq_{\text{lex}} (n_1, n_2)\,, \end{aligned}$$

also $\omega^2 \cong (A, R)$.

Völlig analog: ω^k ist automatisch darstellbar für alle $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$: $A = (1^*0)^k$ und $R = \leq_{\text{lex}} \cap A \times A$.

Beispiel 2.11. Die lineare Ordnung $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, \leq)$ ist automatisch darstellbar: $\Sigma = \{0, 1\}$, $A = \Sigma^*$ und

$$(u, v) \in R \iff u = v \text{ oder } u \in v0\Sigma^* \text{ oder } v \in u1\Sigma^* \text{ oder } (u \not\leq_{\text{pref}} v, v \not\leq_{\text{pref}} u, u \leq_{\text{lex}} v)\,.$$

Dann ist (A, R) eine dichte lineare Ordnung ohne Endpunkte, also nach einem Satz von Cantor isomorph zu $\mathcal{Q}$. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} R^{\otimes} = {} & \big\{(a,a) \bigm| a \in \Sigma\big\}^* \\ & \cup \big\{(a,a) \bigm| a \in \Sigma\big\}^* \big\{(0,\diamond)\big\} \big(\Sigma^* \times \{\varepsilon\}\big)^{\otimes} \\ & \cup \big\{(a,a) \bigm| a \in \Sigma\big\}^* \big\{(\diamond,1)\big\} \big(\{\varepsilon\} \times \Sigma^*\big)^{\otimes} \\ & \cup \leq_{\text{lex}}^{\otimes} \setminus \big(\leq_{\text{pref}}^{\otimes} \cup \geq_{\text{pref}}^{\otimes}\big)\,, \end{aligned}$$

d.h. $R^{\otimes}$ ist regulär, so daß R synchron-rational ist.

Beispiel 2.12. Die Boolesche Algebra $\big(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq\big)$ ist nicht automatisch darstellbar, da $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar, Σ^* aber abzählbar ist.

Sei $\mathcal{B}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ die Boolesche Algebra der endlichen und koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Diese Struktur ist automatisch darstellbar:

$\Sigma = \{0, 1\}$ und $A_1 = \Sigma \cup \Sigma^+1$

für $u = a_0 a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ sei $\text{supp}(u) = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i = 1\}$ der *Träger* („support").

z.B. $\text{supp}(01001) = \text{supp}(0100100) = \{1, 4\}$.

Die Relation $R_1 \subseteq A_1 \times A_1$ umfaßt alle Paare (au, bv) mit $a, b \in \Sigma$ und $u, v \in \Sigma^*$ mit

- $a = b = 1$ und $\text{supp}(u) \subseteq \text{supp}(v)$ oder
- $a > b$ und $\text{supp}(u) \subseteq \mathbb{N} \setminus \text{supp}(v)$ oder
- $a = b = 0$ und $\text{supp}(u) \supseteq \text{supp}(v)$.

Dann ist (A_1, R_1) eine automatische Struktur.

Definiere $[.]\colon A_1 \to \mathcal{B}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ durch

$$[au] = \begin{cases} \operatorname{supp}(u) & \text{falls } a = 1 \\ \mathbb{N} \setminus \operatorname{supp}(u) & \text{falls } a = 0 \end{cases}$$

Also z.B. $[1] = \emptyset$, $[0] = \mathbb{N}$, $[11101] = \{0, 1, 3\}$ und $[01101] = \{2, 4, 5, 6, \dots\}$.

Die Abbildung $[.]$ ist ein Isomorphismus von (A_1, R_1) auf $\big(\mathcal{B}(\mathbb{N}), \subseteq\big)$. Da A_1 regulär und R_1 synchron-rational ist, ist $\big(\mathcal{B}(\mathbb{N}), \subseteq\big)$ also automatisch darstellbar.

Auch $\mathcal{B}(\mathbb{N})^2$ mit der Relation

$$(R, S) \subseteq (T, U) \iff R \subseteq T \text{ und } S \subseteq U$$

ist automatisch darstellbar: $A_2 = (A_1 \times A_1)^{\otimes}$ und $(\otimes(u_1, u_2), \otimes(v_1, v_2)) \in R_2 \iff (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in R_1$.

Allgemeiner: jede Boolesche Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{N})^k$ ist automatisch darstellbar.

Als nächstes beweisen wir, daß die disjunkte Vereinigung von zwei automatisch darstellbaren τ-Strukturen wieder automatisch darstellbar ist. Hierzu zunächst die Definition: Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ τ-Strukturen. Dann ist ihre *disjunkte Vereinigung*

$$\mathcal{A} \uplus \mathcal{B} = \Big(C, A^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}}, B^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}}, \big(R^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}}\big)_{R\in\mathcal{R}}, \big((c^{\mathcal{A}},0)\big)_{c\in\mathcal{C}}, \big((c^{\mathcal{B}},1)\big)_{c\in\mathcal{C}}\Big)$$

gegeben durch

- $C = \big(A \times \{0\}\big) \cup \big(B \times \{1\}\big)$
- $A^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}} = A \times \{0\}$ und $B^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}} = B \times \{1\}$
- $\big((c_1, x_1), (c_2, x_2), \ldots, (c_{\mathrm{ar}(R)}, x_{\mathrm{ar}(R)})\big) \in R^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}}$, falls
  - $x_1 = x_2 = \cdots = x_{\mathrm{ar}(R)} = 0$ und $\big(c_1, c_2, \ldots, c_{\mathrm{ar}(R)}\big) \in R^{\mathcal{A}}$ oder
  - $x_1 = x_2 = \cdots = x_{\mathrm{ar}(R)} = 1$ und $\big(c_1, c_2, \ldots, c_{\mathrm{ar}(R)}\big) \in R^{\mathcal{B}}$

Bemerkung: die Strukturen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ haben dieselbe Signatur, die Signatur der disjunkten Vereinigung besteht aus

- 2 unären Relationszeichen für die Grundmengen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$,
- den Relationszeichen aus τ und
- je zwei Konstantensymbolen für jedes Konstantensymbol aus τ.

Satz 2.13. *Aus zwei automatischen Präsentationen P_0 und P_1 (über derselben Signatur τ) kann eine automatische Präsentation P mit*

$$\mathcal{A}(P) \cong \mathcal{A}(P_0) \uplus \mathcal{A}(P_1)$$

berechnet werden.

Beweis:
Sei $P_i = \big(M_i, (M_{iR})_{R\in\mathcal{R}}, (w_{ic})_{c\in\mathcal{C}}\big)$ für $i \in \{0,1\}$.

Die automatischen Präsentation P besteht aus

- einem NFA M mit $L(M) = 0\,L(M_0) \cup 1\,L(M_1)$
- den zwei NFAs M_A und M_B mit $L(M_A) = 0\,L(M_0)$ und $L(M_B) = 1\,L(M_1)$
- für $R \in \mathcal{R}$ einem Mehrbandautomaten M_R mit

$$L(M_R) = (0,0,\dots,0) \cdot L(M_{0R}) \cup (1,1,\dots,1) \cdot L(M_{1R})\,.$$

- und den Wörtern $0w_{0c}$ und $1w_{1c}$ für $c \in \mathcal{C}$

Die Abbildung $f\colon L(M) \to \big(L(M_0) \times \{0\}\big) \cup \big(L(M_1) \times \{1\}\big)$ mit $f(au) = (u,a)$ für $a \in \{0,1\}$ und $u \in \Sigma^*$ ist ein Isomorphismus von $\mathcal{A}(P)$ auf $\mathcal{A}(P_0) \uplus \mathcal{A}(P_1)$. $\square$