2.3 Definierbare Relationen in automatischen Strukturen

Eine Relation heißt definierbar, wenn es eine Formel φ gibt, die die Elemente der Relation beschreibt. In der Struktur $(\mathbb{N}, +, 0, 1)$ ist z.B. die einstellige Relation $\{7\}$ definierbar durch die folgende Formel mit freier Variable x:

$$\exists x_0, x_1, \ldots, x_7 \colon \Big(x_0 = 0 \wedge \bigwedge_{0 \leq i < 7} x_i + 1 = x_{i+1} \wedge x_7 = x\Big)\,,$$

denn 7 ist die einzige Zahl, die diese Formel erfüllt. Ebenso ist die unendliche zweistellige Relation $\{(n, 2n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ definierbar durch die Formel

$$\varphi(x, y) = (x + x = y)\,.$$

Hingegen ist die dreistellige Relation $\big\{(m, n, m \cdot n) \mid m, n \in \mathbb{N}\big\}$ nicht definierbar (den Beweis werden wir später führen).

In effektiven und in rationalen Strukturen lassen sich sehr „komplizierte“ Relationen definieren (z.B. unentscheidbare Relationen). Das Interesse von Informatikern an den automatischen Strukturen begründet sich dadurch, daß in ihnen nur „handhabbare“ Relationen definierbar sind. Der folgende Satz beweist genau dies, das restliche Kapitel widmet sich einigen Konsequenzen.

Satz 2.14 (Hauptsatz über automatische Strukturen)**.** *Aus einer automatischen Präsentation* $P = \big(M, (M_R)_{R\in\mathcal{R}}, (w_c)_{c\in\mathcal{C}}\big)$ *und einer Formel* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *kann ein synchroner* k*-Bandautomat* M_φ *berechnet werden mit*

$$R(M_\varphi) = \big\{(u_1, \ldots, u_k) \in L(M)^k \bigm| \mathcal{A}(P) \models \varphi(u_1, \ldots, u_k)\big\}\,.$$

Beweis:
Erinnerung: $\mathcal{A}(P) = \big(L(M), (R(M_R))_{R\in\mathcal{R}}, (w_c)_{c\in\mathcal{C}}\big)$.

Variablen und Konstanten können an denselben Stellen auftreten, müssen aber unterschiedlich behandelt werden. Um diese Komplikationen so gering wie möglich zu halten, machen wir zunächst die folgenden Änderungen in φ:

1. wir ersetzen jede Teilformel der Gestalt $x = y$ durch $\exists x', y' \colon x' = x \wedge y' = y \wedge x' = y'$

2. wir ersetzen jede Teilformel der Gestalt $R(x_1, \ldots, x_k)$ durch

$$\exists x_1', x_2', \ldots, x_k' \colon R(x_1', \ldots, x_k') \wedge \bigwedge_{1 \le i \le k} x_i' = x_i \,.$$

Im Ergebnis haben die Atomformeln die Form $x = c$, $x = y$ und $R(x_1, \ldots, x_k)$ für Variable $x, y, x_1, \ldots, x_k$ und $c \in \mathcal{C}$, ohne daß sich die Semantik der Formel geändert hat.

die Berechnung von M_φ erfolgt induktiv über den Aufbau der Formel φ:

- $\varphi = (x_1 = x_2)$: $L(M)$ regulär

  $\xRightarrow{\text{Lemma 2.4}}$ $L(M)$ effektiv synchron-rational

  $\xRightarrow{\text{Lemma 2.5}}$ $L(M) \times L(M)$ effektiv synchron-rational

  $\xRightarrow{\text{Lemma 2.4}}$ $\big(L(M) \times L(M)\big)^{\otimes}$ effektiv regulär

  $\Longrightarrow \big\{(a,a) \bigm| a \in \Sigma\big\}^* \cap \big(L(M) \times L(M)\big)^{\otimes} = \big\{\otimes(u,u) \bigm| u \in L(M)\big\}$ effektiv regulär

  $\xRightarrow{\text{Lemma 2.4}}$ $\big\{(u,u) \bigm| u \in L(M)\big\}$ effektiv synchron-rational.

- $\varphi = (x_1 = c)$ mit $c \in \mathcal{C}$: $\{w_c\}$ ist effektiv synchron-rational
- $\varphi = \big(R(x_1, \dots, x_k)\big)$: $\big\{\overline{u} \in L(M)^k \;\big|\; \overline{u} \in R(M_R)\big\} = R(M_R)$, also setze $M_\varphi = M_R$
- $\varphi = \alpha \wedge \beta$:

$$\begin{aligned} &\big\{\overline{u} \in L(M)^k \;\big|\; \mathcal{A}(P) \models (\alpha \wedge \beta)(\overline{u})\big\} \\ = &\big\{\overline{u} \in L(M)^k \;\big|\; \mathcal{A}(P) \models \alpha(\overline{u})\big\} \cap \big\{\overline{u} \in L(M)^k \;\big|\; \mathcal{A}(P) \models \beta(\overline{u})\big\} \\ \overset{\text{IV}}{=} &\, R(M_\alpha) \cap R(M_\beta)\,. \end{aligned}$$

  Nach Lemma 2.3 ist dieser Schnitt effektiv synchron-rational.

- $\varphi = \neg\alpha$:

$$\begin{aligned} &\big\{\overline{u} \in L(M)^k \;\big|\; \mathcal{A}(P) \models \neg\alpha(\overline{u})\big\} \\ = &\, L(M)^k \setminus \big\{\overline{u} \in L(M)^k \;\big|\; \mathcal{A}(P) \models \alpha(\overline{u})\big\} \\ \overset{\text{IV}}{=} &\, L(M)^k \setminus R(M_\alpha) \end{aligned}$$

  Nach Lemmata 2.4, 2.5 und 2.3 ist diese Differenz effektiv synchron-rational.

- $\varphi = \exists x_{k+1}\, \alpha$:

$$\begin{aligned}
&\bigl\{\overline{u} \in L(M)^k \bigm| \mathcal{A}(P) \models \exists x_{k+1}\, \alpha(\overline{u}, x_{k+1})\bigr\} \\
=& \bigl\{\overline{u} \in L(M)^k \bigm| \text{ es gibt } u_{k+1} \in L(M) \text{ mit } \mathcal{A}(P) \models \alpha(\overline{u}, u_{k+1})\bigr\} \\
\overset{\text{IV}}{=}& \bigl\{\overline{u} \in L(M)^k \bigm| \text{ es gibt } u_{k+1} \in L(M) \text{ mit } (\overline{u}, u_{k+1}) \in R(M_\alpha)\bigr\}
\end{aligned}$$

Nach Lemmata 2.4 und 2.5 ist $(\Sigma^*)^k \times L(M)$ effektiv synchron-rational. Nach Lemma 2.3 kann also ein synchroner Mehrbandautomat M' berechnet werden mit

$$\begin{aligned}
R(M') &= \bigl((\Sigma^*)^k \times L(M)\bigr) \cap R(M_\alpha) \\
&= \bigl\{(\overline{u}, u_{k+1}) \in R(M_\alpha) \bigm| u_{k+1} \in L(M)\bigr\}\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$\begin{aligned}
&\bigl\{\overline{u} \in L(M)^k \bigm| \mathcal{A}(P) \models \exists x_{k+1}\, \alpha(\overline{u}, x_{k+1})\bigr\} \\
=& \bigl\{\overline{u} \in L(M)^k \bigm| \text{ es gibt } u_{k+1} \text{ mit } (\overline{u}, u_{k+1}) \in R(M')\bigr\}
\end{aligned}$$

Nach Lemma 2.7 ist diese Relationa effektiv synchron-rational. $\square$

Korollar. *Es gibt keine Formel* $\varphi(x,y,z)$ *mit* $(\mathbb{N},+,0,1) \models \varphi(k,\ell,m) \iff k \cdot \ell = m$ *für alle* $k,\ell,m \in \mathbb{N}$.

Mit anderen Worten, die Relation $\{(m,n,m{\cdot}n) \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ *ist in der Struktur* $(\mathbb{N},+,0,1)$ *nicht definierbar.*

Beweis:
Wir betrachten die automatische Darstellung der Struktur $(\mathbb{N},+,0,1)$ vom Anfang des Kapitels (d.h. natürliche Zahlen werden durch umgekehrte Binärdarstellung codiert).

Dann gelten insbesondere $[0^a1] = 2^a$ für alle $a \in \mathbb{N}$ und damit

$$[0^a1] \cdot [0^b1] = [0^c1] \iff a+b=c$$

für alle $a,b,c \in \mathbb{N}$. Hieraus folgt, daß die ternäre Relation

$$\Big\{(u,v,w) \in \big(\{0\} \cup \{0,1\}^*1\big)^3 \;\Big|\; [u]\cdot[v]=[w]\Big\}$$

nicht synchron-rational ist. Nach dem Hauptsatz ist sie also nicht definierbar. $\square$

2.3.1 1. Konsequenz: Entscheidbarkeit

Korollar 2.15. *Für eine automatische Präsentation P, eine Formel $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ und Wörter $u_1, \ldots, u_k \in \mathcal{A}(P)$ ist entscheidbar, ob $\mathcal{A}(P) \models \varphi(u_1, \ldots, u_k)$.*

Beweis:
Berechne zunächst nach Satz 2.14 einen synchronen k-Bandautomaton M_φ mit

$$(v_1, \ldots, v_k) \in R(M_\varphi) \iff \mathcal{A}(P) \models \varphi(v_1, \ldots, v_k)$$

für alle $v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{A}(P)$.

Teste dann, ob $\otimes(u_1, \ldots, u_k) \in L(M_\varphi)$. $\square$

Bemerkung Sei φ ein Satz, d.h. $k = 0$. Es gelten $L(M)^0 = \{()\}$ und $\otimes() = \varepsilon$. Also haben wir $R(M_\varphi) \subseteq \{\varepsilon\}$ und $\varepsilon \in R(M_\varphi) \iff \mathcal{A}(P) \models \varphi$.

Daher ist insbesondere die Theorie jeder automatischen (und daher jeder automatisch darstellbaren) Struktur entscheidbar.

Beispiel.

1. Für jedes $k \geq 2$ hat die Struktur $(\mathbb{N}, +, 0, 1, |_k)$ eine entscheidbare Theorie (Presburger '29), denn sie ist automatisch darstellbar.

2. Die Strukturen $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, $(\Sigma^*, \cdot)$ und $(\Sigma^*, \preceq)$ mit $|\Sigma| \geq 2$ sind nicht automatisch darstellbar, denn sie haben unentscheidbare Theorien (Arithmetik: Gödel '31 bzw. Turing '36, Monoid: Quine '46, Teilwortordnung: Kuske '06)