2.3.2 2. Konsequenz: Abschluß der Klasse der automatischen Strukturen

Eine grundlegende Technik in der Logik ist die der „Interpretation“: dabei wird eine Struktur $\mathcal{B}$ in einer Struktur $\mathcal{A}$ „gefunden“ oder „beschrieben“.

Beispiel $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +)$ und $\mathcal{B} = (\mathbb{N}^2, <_{\text{lex}})$.

Die Elemente von $\mathcal{B}$ sind also Paare von Elementen von $\mathcal{A}$. Außerdem gilt $(b_1, b_2) <_{\text{lex}} (c_1, c_2)$ genau dann, wenn

$$\mathcal{A} \models (b_1 \neq c_1 \wedge \exists x\colon b_1 + x = c_1) \vee (b_1 = c_1 \wedge b_2 \neq c_2 \wedge \exists x\colon b_2 + x = c_2)\,.$$

Damit gibt es Formeln $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2)$ und $\psi(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1 \neq y_1 \wedge \exists z\colon x_1 + z = y_1) \vee (x_1 = y_1 \wedge x_2 \neq y_2 \wedge \exists z\colon x_2 + z = y_2)$, so daß gilt:

- Das Universum von $\mathcal{B}$ ist die Menge der Paare von Elementen von $\mathcal{A}$, die φ erfüllen.
- Die Relation $<_{\text{lex}}$ ist die Menge der Paare von Paaren von Elementen von $\mathcal{A}$, die ψ erfüllen.

Jetzt ersetzen wir die Struktur $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +)$ durch die Struktur $\mathcal{A}' = (\mathbb{Z}, +)$. Sei $\mathcal{B}'$ die Struktur mit:

- Das Universum von $\mathcal{B}'$ ist die Menge der Paare von Elementen von $\mathcal{A}'$, die φ erfüllen (also $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).
- Die binäre Relation $R^{\mathcal{B}'}$ ist die Menge der Paare von Paaren von Elementen von $\mathcal{A}'$, die ψ erfüllen.

Dann gilt $\mathcal{B}' = (\mathbb{Z}^2, <_{\mathrm{lex}})$.

Wir haben also zwei Formeln (nämlich φ und ψ), die aus der Struktur $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ die Struktur $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ „machen“. Umgekehrt kann man auch sagen, daß wir mit Hilfe dieser Formeln die Struktur $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ in $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ „gefunden“ oder „interpretiert“ haben.

Die Eigenschaft „Es gibt ein Element ohne direkten Vorgänger“ gilt in einer linearen Ordnung genau dann, wenn die Formel

$$\exists z\, \forall x\colon (x <_{\text{lex}} z \to \exists y\colon x <_{\text{lex}} y <_{\text{lex}} z)$$

gilt. Dies ist für $\mathcal{B}$ bzw. für $\mathcal{B}'$ genau dann der Fall, wenn in $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ die Formel

$$\begin{aligned}\exists z_1, z_2\colon \varphi(z_1, z_2) \wedge \\ &\forall x_1, x_2\colon \Big(\big(\varphi(x_1, x_2) \wedge \psi(x_1, x_2, z_1, z_2)\big) \\ &\qquad \longrightarrow \exists y_1, y_2\colon \big(\varphi(y_1, y_2) \wedge \psi(x_1, x_2, y_1, y_2) \wedge \psi(y_1, y_2, z_1, z_2)\big)\Big)\end{aligned}$$

gilt.

Eigentlich haben wir hierbei nur die Atomformel $x <_{\text{lex}} y$ durch $\psi(\overline{x}, \overline{y})$ ersetzt und die Quantifikation auf Elemente von $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ eingeschränkt (d.h. auf Paare, die φ erfüllen). Wir können also die Eigenschaften von $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ auf die von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ zurückführen (analog zu Reduktionen in der Berechenbarkeitstheorie).

Nach dem ausführlichen einführenden Beispiel jetzt also die allgemeine Definition:

Definition. Seien $\tau_i = (\mathcal{R}_i, \mathcal{C}_i, \mathrm{ar}_i)$ Signaturen für $i = 1, 2$. Eine *Interpretation* ist ein Tupel $I = \big(d, \varphi, (\psi_R)_{R \in \mathcal{R}_2}, (\xi_c)_{c \in \mathcal{C}_2}\big)$, wobei

- $d \geq 1$ die *Dimension* von I ist,
- $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_d)$ eine $\mathrm{FO}[\tau_1]$-Formel,
- $\psi_R = \psi_R\big((x_j^i)_{1 \leq i \leq \mathrm{ar}_2(R), 1 \leq j \leq d}\big)$ für $R \in \mathcal{R}_2$ eine $\mathrm{FO}[\tau_1]$-Formel und
- $\xi_c = \xi_c(x_1, \ldots, x_d)$ für $c \in \mathcal{C}_2$ eine $\mathrm{FO}[\tau_1]$-Formel ist.

im obigen **Beispiel**:

- $d = 2$ und $\varphi = (x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2)$
- $\psi_{<_{\mathrm{lex}}} = (x_1^1 \neq x_1^2 \wedge \exists x \colon x_1^1 + x = x_1^2) \vee (x_1^1 = x_1^2 \wedge x_2^1 \neq x_2^2 \wedge \exists x \colon x_2^1 + x = x_2^2)$
- es gibt keine Formel ξ, da die Signatur τ_2 konstantenlos ist.

Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine τ_1-Struktur. Die darin definierte τ_2-Struktur $\mathcal{B} =: I(\mathcal{A})$ ist gegeben durch

- Die Grundmenge $B = \{(u_1, \ldots, u_d) \in A^d \mid \mathcal{A} \models \varphi(u_1, \ldots, u_d)\}$
- Die Relation $R^{\mathcal{B}}$ für $R \in \mathcal{R}_2$ durch $(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_{\mathrm{ar}_2(R)}}) \in R^{\mathcal{B}}$ gdw. $\mathcal{A} \models \psi_R(\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_{\mathrm{ar}_2(R)}})$ für alle $\overline{u_1}, \overline{u_2}, \ldots, \overline{u_{\mathrm{ar}_2(R)}} \in B \subseteq A^d$.
- Die Konstanten $c^{\mathcal{B}} = \overline{u} \in B \subseteq A^d$ für $c \in \mathcal{C}_2$ durch $\mathcal{A} \models \xi_c(\overline{u})$.

  Gibt es kein oder mehr als ein Tupel $\overline{u} \in B$ mit $\mathcal{A} \models \xi_c(\overline{u})$, so ist $I(\mathcal{A})$ nicht definiert (denn dann wäre nicht klar, was $c^{\mathcal{B}}$ ist).

Korollar 2.16. *Aus einer automatischen Präsentation P und einer Interpretation I kann eine automatische Präsentation einer Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{B} \cong I\big(\mathcal{A}(P)\big)$ berechnet werden und es kann insbes. entschieden werden, ob $I\big(\mathcal{A}(P)\big)$ definiert ist.*

Beweis:
Sei $I = \big(\varphi, (\varphi_R)_{R \in \mathcal{R}_2}, (\xi_c)_{c \in \mathcal{C}_2}\big)$ und $A \subseteq \Sigma^*$ das Universum von $\mathcal{A}(P)$.

Die Struktur $I\big(\mathcal{A}(P)\big)$ ist genau dann definiert, wenn die automatische Struktur $\mathcal{A}(P)$ den folgenden Satz erfüllt:

$$\bigwedge_{c \in \mathcal{C}_2} \left(\exists x_1, \ldots, x_d \, \forall y_1, \ldots, y_d \colon \xi_c(y_1, \ldots, y_d) \leftrightarrow \bigwedge_{1 \leq i \leq d} x_i = y_i \right) .$$

Dies ist aber nach Korollar 2.15 entscheidbar.

Im positiven Fall können nach Satz 2.14 synchrone Mehrbandautomaten M und M_R für $R \in \mathcal{R}_2$ berechnet werden, so daß $R(M)$ bzw. $R(M_R)$ das Universum bzw. die Relationen in $I\big(\mathcal{A}(P)\big)$ sind. Sei $c \in \mathcal{C}_2$. Dann können wir einen synchronen d-Bandautomat M_c berechnen mit $R(M_c) = \big\{(u_1, \ldots, u_d) \in A^d \mid \mathcal{A} \models \xi_c(u_1, \ldots, u_d)\big\}$. Da $I\big(\mathcal{A}(P)\big)$ definiert ist, enthält diese Relation genau ein Tupel $\overline{c} \in A^d$. Dieses Tupel kann aus M_c berechnet werden.

Damit erhalten wir

$$I\big(\mathcal{A}(P)\big) = \big(R(M), (R(M_R))_{R\in\mathcal{R}_2}, (\overline{c})_{c\in\mathcal{C}_2}\big)\,.$$

Diese Struktur ist durch die Automaten M und M_R und durch die Tupel $\overline{c}$ beschrieben und damit „fast“ automatisch. Das verbleibende Problem ist, daß das Universum keine *Sprache*, sondern eine d-stellige *Relation* ist. Wir müssen also noch diese Relation durch eine Sprache ersetzen. Hierfür verwenden wir die Verklebung $R(M)^{\otimes}$ der Relation.

Nach Lemma 2.4 können wir annehmen, daß $L(M) = R(M)^{\otimes}$ und $L(M_R) = R(M_R)^{\otimes}$ für alle $R \in \mathcal{R}_2$ gelten. Sei nun $R \in \mathcal{R}_2$ ein n-stelliges Relationssymbol (sodaß M_R ein $d \cdot n$-Bandautomat ist). Durch Zusammenfassung der Bänder 1 bis d, $d+1$ bis $2d$, ..., $d(n-1)+1$ bis dn zu jeweils einem Band können wir aus M_R einen synchronen n-Bandautomat M'_R berechnen mit

$$L(M'_R) = \Big\{ \otimes\big(\otimes\overline{u^1}, \dots, \otimes\overline{u^d}\big) \;\Big|\; \otimes\big(\overline{u^1}, \overline{u^2}, \dots, \overline{u^d}\big) \in L(M_R) \Big\}$$

(dabei steht $\overline{u^i}$ für das Tupel $(u_1^i, u_2^i, \dots, u_d^i)$ von Wörtern über Σ). Dann gilt aber

$$R(M_R') = \left\{ \left(\otimes\overline{u^1}, \dots, \otimes\overline{u^d}\right) \;\middle|\; \left(\overline{u^1}, \overline{u^2}, \dots, \overline{u^d}\right) \in R(M_R) \right\}.$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} I\big(\mathcal{A}(P)\big) &= \big(R(M), (R(M_R))_{R\in\mathcal{R}_2}, (\overline{c})_{c\in\mathcal{C}_2}\big) \\ &\cong \big(L(M), (R(M_R'))_{R\in\mathcal{R}_2}, (\otimes\overline{c})_{c\in\mathcal{C}_2}\big) . \end{aligned}$$

Damit ist also $I\big(\mathcal{A}(P)\big)$ effektiv automatisch darstellbar. □

Anwendung von Interpretationen, um zu beweisen, daß eine Struktur automatisch darstellbar ist:

Korollar 2.17. *Das direkte Produkt von zwei automatischen τ-Strukturen ist effektiv automatisch darstellbar.*

Beweis:
Sei $\tau = (\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathrm{ar})$ Signatur und seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ τ-Strukturen. Nach Satz 2.13 ist $\mathcal{A} \uplus \mathcal{B} = \big(C, A^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}}, B^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}}, (R^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}})_{R\in\mathcal{R}}, (c_1^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}}, c_2^{\mathcal{A}\uplus\mathcal{B}})_{c\in\mathcal{C}}\big)$ effektiv automatisch darstellbar.

Betrachte nun die folgenden Interpretation I:

- $d = 2$
- $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2)$
- $\psi_R\big((x^i_j)_{i\in\{1,2\},1\leq j\leq k}\big) = \big(R(x^1_1, x^1_2, \ldots, x^1_k) \wedge R(x^2_1, x^2_2, \ldots, x^2_k)\big)$ für $R \in \mathcal{R}$ mit $k = \mathrm{ar}_2(R)$
- $\xi_c(x_1, x_2) = (x_i = c_1 \wedge x_2 = c_2)$ für $c \in \mathcal{C}$.

Dann gilt $I(\mathcal{A} \uplus \mathcal{B}) \cong \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, also ist $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ effektiv automatisch darstellbar. $\square$

Beispiel. Sei $\mathcal{B}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ die Boolesche Algebra der endlichen und koendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$. Diese Struktur ist nach Beispiel 2.12 automatisch darstellbar. Also ist auch $\mathcal{B}_{\text{fin}}(\mathbb{N})^n$ für jedes $n \geq 1$ automatisch darstellbar.

Beispiel 2.18. Eine lineare Ordnung $(L, \leq)$ ist eine *Wohlordnung*, wenn jede nichtleere Teilmenge von L ein kleinstes Element enthält. Zum Beispiel sind $(\mathbb{N}, \leq)$ und $(\mathbb{N}^2, \leq_{\text{lex}})$ Wohlordnungen, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ und $(\Sigma^*, \leq_{\text{lex}})$ hingegen nicht. Eine *Ordinalzahl* ist eine Isomorphieklasse von Wohlordnungen, z.B. ist ω die Isomorphieklasse von $(\mathbb{N}, \leq)$ und ω^2 die von $(\mathbb{N}^2, \leq_{\text{lex}})$. Im Folgenden betrachten wir lineare Ordnungen nur bis auf Isomorphie, so daß wir $\omega^3 = (\mathbb{N}^3, \leq_{\text{lex}})$ schreiben für „ω^3 ist die Klasse aller linearen Ordnungen, die isomorph zu $(\mathbb{N}^3, \leq_{\text{lex}})$ sind“.

Weitere Beispiele von Ordinalzahlen sind $\omega^k = (\mathbb{N}^k, \leq_{\text{lex}})$ für alle $k \geq 1$ und $\omega^\omega = (\mathbb{N}^*, \leq_{\text{llex}})$, wobei

- $\mathbb{N}^* = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{N}^k$ und
- $\overline{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k) \leq_{\text{llex}} (n_1, n_2, \ldots, n_\ell) = \overline{n}$ genau dann gilt, wenn $k < \ell$ oder $k = \ell$ und $\overline{m} \leq_{\text{lex}} \overline{n}$ (diese lineare Ordnung $\leq_{\text{llex}}$ heißt die *längen-lexikographische Ordnung*).

Auf der Klasse aller Ordinalzahlen können wir eine *Addition* definieren: Seien $\alpha = (K, \leq_K)$ und $\beta = (L, \leq_L)$ Ordinalzahlen. Wir können o.E. annehmen, daß $K \cap L = \emptyset$. Dann ist auch $\alpha + \beta = \big(K \cup L, \leq_K \cup (K \times L) \cup \leq_L\big)$ eine Ordinalzahl (sie entsteht aus α und β, indem die lineare Ordung β „hinter“ oder „über“ die lineare Ordnung α gesetzt wird). Diese Operation ist assoziativ, aber nicht kommutativ (z.B. $\mathbf{1} + \omega = \omega \neq \omega + \mathbf{1}$ wobei $\mathbf{1}$ die einelementige Ordinalzahl ist).

Diese Addition kann man auf unendlich viele Summanden erweitern, so gilt insbes.

$$\omega^0 + \omega^1 + \omega^2 + \omega^3 \cdots = \omega^\omega \,.$$

Auf der Klasse aller Ordinalzahlen können wir eine lineare Ordnung definieren gemäß $\alpha \leq \gamma$ genau dann, wenn es eine Ordinalzahl β gibt mit $\alpha + \beta = \gamma$. Zum Beispiel gilt $\omega^k < \omega^\omega$ für alle $k \in \mathbb{N}$, es ist sogar ω^ω die kleinste Ordinalzahl mit dieser Eigenschaft.

Wir werden jetzt zeigen: Jede Ordinalzahl $< \omega^\omega$ ist automatisch darstellbar.

Beweis:
Sei $\alpha < \omega^\omega$. Wir zeigen, daß α in der Struktur $(\mathbb{N}, \leq, c_1, \ldots, c_k)$ interpretiert werden kann.

Da ω^ω die kleinste Ordinalzahl ist, die größer ist als alle Ordinalzahlen ω^k, existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $\alpha < \omega^k = (\mathbb{N}^k, \leq_{\mathrm{lex}})$. Also existiert $\overline{c} = (c_1, \ldots, c_k) \in \mathbb{N}^k$ mit

$$\alpha \cong \big(\{\overline{m} \in \mathbb{N}^k \mid \overline{m} <_{\mathrm{lex}} \overline{c}\}, \leq_{\mathrm{lex}}\big) .$$

Wir definieren jetzt die gesuchte Interpretation I von α in der Struktur $(\mathbb{N}, \leq, c_1, \ldots, c_k)$:

$$\begin{aligned} d &= k \\ \psi_{\leq}\big((x_j^i)_{i \in \{1,2\}, 1 \leq j \leq d}\big) &= \bigwedge_{1 \leq j \leq d} x_j^1 = x_j^2 \\ &\quad \vee \bigvee_{1 \leq j \leq d} \big(x_1^1 = x_1^2 \wedge x_2^1 = x_2^2 \wedge \cdots \wedge x_{j-1}^1 = x_{j-1}^2 \wedge x_j^1 < x_j^2\big) \\ \varphi(x_1, \ldots, x_d) &= \psi_{\leq}(x_1, \ldots, x_d, c_1, \ldots, c_d) \wedge \bigvee_{1 \leq i \leq d} x_i \neq c_i \end{aligned}$$

Dann gilt tatsächlich $\alpha \cong I(\mathbb{N}, \leq, c_1, \ldots, c_k)$. Da $(\mathbb{N}, \leq)$ automatisch darstellbar ist, ist auch die Erweiterung um die Konstanten $c_1, \ldots, c_k$ automatisch darstellbar. Also ist nach Korollar 2.16 auch α automatisch darstellbar. $\square$

Definition. Sei $\mathcal{A}$ eine τ-Struktur mit Universum A und $\tau = (\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathrm{ar})$. Eine *Kongruenz auf* $\mathcal{A}$ ist eine Äquivalenzrelation $\equiv \subseteq A \times A$ mit

$$(a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}}, a_i \equiv b_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq k \Longrightarrow (b_1, \dots, b_k) \in R^{\mathcal{A}}$$

für alle $R \in \mathcal{R}$ und $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k \in A$.

Der *Quotient von* $\mathcal{A}$ *bzgl.* $\equiv$ ist die Struktur $\mathcal{B}$ mit

- $B = A/_{\equiv}$,
- $R^{\mathcal{B}} = \Big\{ \big([a_1], \dots, [a_k]\big) \;\Big|\; (a_1, \dots, a_k) \in R^{\mathcal{A}} \Big\}$ für $R \in \mathcal{R}$ und
- $c^{\mathcal{B}} = [c^{\mathcal{A}}]$ für $c \in \mathcal{C}$.

Wir bezeichnen $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A}/_{\equiv}$.

Korollar 2.19. *Aus einer automatischen Präsentation* $P = \big(M, (M_R)_{R\in\mathcal{R}}, (w_c)_{c\in\mathcal{C}}\big)$ *und einer Formel* $\eta = \eta(x_1, x_2)$*, so daß die definierte Relation*

$$\equiv\; = \big\{(a_1, a_2) \mid \mathcal{A}(P) \models \eta(a_1, a_2)\big\}$$

eine Kongruenz auf $\mathcal{A}(P)$ *ist, kann eine automatische Präsentation des Quotienten* $\mathcal{B} = \mathcal{A}(P)/_{\equiv}$ *berechnet werden.*

Beweis:
Wir werden zeigen, daß die Struktur $\big(\mathcal{A}(P), \leq_{\mathrm{llex}}\big)$ effektiv automatisch ist und daß der Quotient $\mathcal{A}(P)/_{\equiv}$ hierin interpretiert werden kann.

Da $\leq_{\mathrm{llex}}$ eine synchron-rationale Relation ist, ist auch $\leq_{\mathrm{llex}} \cap \big(L(M) \times L(M)\big)$ effektiv synchron-rational (nach Lemmata 2.3 und 2.5). Also ist $\big(\mathcal{A}(P), \leq_{\mathrm{llex}}\big)$ effektiv automatisch.

Wir betrachten die folgende Interpretation I:

- $d = 1$
- $\varphi(x) = \forall y\colon \eta(x, y) \to x \leq_{\text{lex}} y$
- $\psi_R(x_1, \ldots, x_k) = R(x_1, \ldots, x_k)$ für $R \in \mathcal{R}$ mit $\text{ar}(R) = k$
- $\xi_c(x) = \eta(x, c)$ für $c \in \mathcal{C}$

Dann ist $\mathcal{B} = I\big(\mathcal{A}(P), \leq_{\text{lex}}\big)$ die Einschränkung von $\mathcal{A}(P)$ auf diejenigen Elemente, die minimal in ihrer Äquivalenzklasse sind. Also gilt $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}(P)/_{\equiv}$. $\square$

Beispiel. Jede endlich erzeugte abelsche Gruppe $(G, +)$ ist automatisch darstellbar.

Beweis:
Nach dem Struktursatz für abelsche Gruppen ist $(G, +)$ isomorph zum direkten Produkt von endlich vielen Kopien von $(\mathbb{Z}, +)$ und einer endlichen abelschen Gruppe. Wir zeigen zunächst die automatische Darstellbarkeit von $(\mathbb{Z}, +)$, indem wir eine geeignete Struktur $\mathcal{A}$ in $(\mathbb{N}, +)$ interpretieren und dann zeigen, daß $(\mathbb{Z}, +)$ eine geeigneter Quotient von $\mathcal{A}$ ist.

Die Interpretation I:

- $d = 2$
- $\varphi(x_1, x_2) = (x_1 = x_1 \wedge x_2 = x_2)$
- $\psi_+(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = (x_1 + y_1 + z_2 = z_1 + x_2 + y_2)$ (was äquivalent zu $(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = (z_1 - z_2)$ ist).

Dann ist $I(\mathbb{N},+) = (\mathbb{N}^2, R)$ mit $\big((k_1,k_2),(\ell_1,\ell_2),(m_1,m_2)\big) \in R \iff (k_1-k_2)+(\ell_1-\ell_2) = (m_1-m_2)$ nach Korollar 2.16 automatisch darstellbar.

Für diese Struktur $(\mathbb{N}^2, R)$ betrachten wir die Formel

$$\eta(x,y) = \forall a,b\colon \big(R(x,a,b) \longleftrightarrow R(y,a,b)\big)\,.$$

Für $(m_1,m_2),(n_1,n_2) \in \mathbb{N}^2$ gilt

$$\begin{aligned}(\mathbb{N}^2, R) \models \eta\big((m_1,m_2),(n_1,n_2)\big) &\iff (m_1-m_2)+(a_1-a_2) = (n_1-n_2)+(a_1-a_2) \\ &\qquad\qquad \text{für alle } a_1,a_2 \in \mathbb{N} \\ &\iff m_1-m_2 = n_1-n_2\end{aligned}$$

Die von η in $(\mathbb{N}^2, R)$ definierte Relation $\equiv$ ist eine Kongruenz auf $(\mathbb{N}^2, R)$ und es gilt $(\mathbb{N}^2, R)/_{\equiv} \cong (\mathbb{Z},+)$. Also ist $(\mathbb{Z},+)$ nach Korollar 2.19 automatisch darstellbar.

Da jede endliche Struktur automatisch darstellbar ist, ist nach Satz 2.17 also G automatisch darstellbar. $\square$