3 Erweiterungen des Hauptsatzes

Ziel: Erweiterung der Logik FO, so daß Satz 2.14 und damit Korollar 2.15, 2.16 und 2.19 weiter gelten.

3.1 Die Logik $\mathrm{FO}[\exists^\infty]$

Zu den Bildungsregeln für Formeln nehmen wir noch hinzu:

3. φ τ-Formel, $x \in \mathcal{V} \Rightarrow$
   - $\xi = \exists^\infty x\colon \varphi$ τ-Formel, $\mathrm{frei}(\xi) = \mathrm{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$, $\mathrm{qr}(\xi) = \mathrm{qr}(\varphi) + 1$

Die Gültigkeitsdefinition wird wie folgt erweitert: α Belegung in τ-Struktur $\mathcal{A}$.

3. φ τ-Formel, $x \in \mathcal{V} \Rightarrow$
   - $\mathcal{A} \models_\alpha \exists^\infty x\colon \varphi$ gdw. es unendlich viele $a \in ||\mathcal{A}||$ gibt mit $\mathcal{A} \models_{\alpha[\frac{a}{x}]} \varphi$

Bemerkung. Es gibt keine FO-Formel φ, so daß für alle Körper K gilt: $K \models \varphi \iff K$ ist endlich (analog für andere Strukturklassen), aber natürlich tut die $FO[\exists^\infty]$-Formel $\neg\exists^\infty x\colon x = x$ das gewünschte. Die Logik FO[$\exists^\infty$] ist also *ausdrucksstärker* als FO.

Satz 3.1. *Aus einer automatischen Präsentation* $P = \big(M, (M_R)_{R\in\mathcal{R}}, (w_c)_{c\in\mathcal{C}}\big)$ *und einer* FO[$\exists^\infty$]*-Formel* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *kann ein synchroner k-Bandautomat* M_φ *berechnet werden mit*

$$R(M_\varphi) = \big\{(u_1, \ldots, u_k) \in L(M)^k \;\big|\; \mathcal{A}(P) \models \varphi(u_1, \ldots, u_k)\big\}\,.$$

Beweis:
Die Relation $L = \big\{(u, v) \in L(M) \;\big|\; |u| < |v|\big\}$ ist effektiv synchron-rational.

Also ist $(\mathcal{A}(P), L)$ eine effektiv automatische Struktur.

Sei $\psi(x, \ldots)$ eine Formel. Dann besagt $\exists x\colon \psi$, daß wenigstens ein Zeuge für die Gültigkeit von ψ existiert. $\forall y \exists x\colon (L(y, x) \wedge \psi)$ besagt, daß für jedes Wort y ein längerer Zeuge x existiert, d.h. daß es beliebig lange Zeugen gibt. Da es zu jeder Länge aber nur endlich viele Wörter gibt, ist diese Formel äquivalent zu $\exists^\infty x\colon \psi$.

Wir verwenden diese Beobachtung, um den Beweis zu vervollständigen.

Ersetze in der Formel φ jede Teilformel der Gestalt $\exists^{\infty} x \colon \psi$ durch

$$\forall y \exists x \colon (L(y, x) \wedge \psi)$$

und nenne Ergebnis φ'. Dann gilt nach obiger Überlegung

$$\mathcal{A}(P) \models \varphi(\overline{u}) \iff (\mathcal{A}(P), L) \models \varphi'(\overline{u}) \,.$$

Da $\varphi' \in$ FO, kann nach Satz 2.14 ein synchroner Mehrbandautomat $M_{\varphi'}$ berechnet werden mit

$$\begin{aligned} R(M_{\varphi'}) &= \left\{ \overline{u} \in L(M)^k \;\middle|\; (\mathcal{A}(P), L) \models \varphi'(\overline{u}) \right\} \\ &= \left\{ \overline{u} \in L(M)^k \;\middle|\; \mathcal{A}(P) \models \varphi(\overline{u}) \right\} \end{aligned}$$

$\square$

Es folgt, daß auch die Korollare 2.15 (Entscheidbarkeit der Theorie), 2.16 (Abschluß unter Interpretationen) und 2.19 (Abschluß unter definierbaren Quotienten) für die Logik FO[$\exists^{\infty}$] gelten.

3.2 Die Logik $\mathrm{FO}[\exists^{\infty}, \exists^{\bmod}]$

Wir erweitern die Logik $\mathrm{FO}[\exists^{\infty}]$ weiter um

3. φ τ-Formel, $x \in \mathcal{V}$, $0 \leq p < q \Rightarrow$

   - $\xi = \exists^{(p,q)}x\colon \varphi$ τ-Formel, $\mathrm{frei}(\xi) = \mathrm{frei}(\varphi) \setminus \{x\}$, $\mathrm{qr}(\xi) = \mathrm{qr}(\varphi) + 1$

Die Gültigkeitsdefinition wird wie folgt erweitert: α Belegung in τ-Struktur $\mathcal{A}$.

3. φ τ-Formel, $x \in \mathcal{V}$, $0 \leq p < q \Rightarrow$

   - $\mathcal{A} \models_{\alpha} \exists^{(p,q)}x\colon \varphi$ gdw. es die Anzahl der $a \in ||\mathcal{A}||$ mit $\mathcal{A} \models_{\alpha[\frac{a}{x}]} \varphi$ zu $q\mathbb{N} + p$ gehört (d.h. endlich und kongruent $p \mod q$ ist).

Bemerkung. Die Formel $\exists^{(0,2)}x\colon x = x$ besagt, daß das Universum endlich ist und eine gerade Anzahl von Elementen enthält. Also sind $\neg\exists^{\infty}x\colon \varphi$ und $\exists^{(0,2)}x\colon \varphi \vee \exists^{(1,2)}x\colon \varphi$ äquivalente Formeln.

Es gibt keine $\mathrm{FO}[\exists^{\infty}]$-Formel φ, so daß für alle endlichen linearen Ordnungen $(L, \leq)$ gilt $(L, \leq) \models \varphi \iff |L|$ ist gerade. Die $\mathrm{FO}[\exists^{\infty}, \exists^{\,\mathrm{mod}}\,]$-Formel $\exists^{(0,2)}x\colon x = x$ tut aber genau dies.

Die Logiken $\mathrm{FO}[\exists^{\,\mathrm{mod}}\,]$ und $\mathrm{FO}[\exists^{\infty}, \exists^{\,\mathrm{mod}}\,]$ sind also gleich ausdrucksstark, die Logik $\mathrm{FO}[\exists^{\infty}]$ und (damit erst recht die Logik FO) ist aber weniger ausdrucksstark.

Lemma 3.2. *Aus einem synchronen* $(k+1)$*-Bandautomaten* M *und* $0 \le p < q$ *kann ein synchroner* k*-Bandautomat* $M_{p,q}$ *berechnet werden mit*

$$(u_1, \ldots, u_k) \in R(M_{p,q}) \iff \exists^{(p,q)} u \colon (u_1, \ldots, u_k, u) \in R(M)\,.$$

Beweis:
Berechne aus M zunächst einen DFA $N = (S, \Sigma_\diamond^{k+1}, \iota, \delta, F)$ mit $L(N) = R(M)^\otimes$ (mgl. nach Lemma 2.4). Es gilt insbesondere $\delta \colon S \times \Sigma_\diamond^{k+1} \to S$.

Wir konstruieren daraus einen k-Bandautomaten (genauer: einen DFA über $\Sigma_\diamond^k$), der bei Eingabe von k Wörtern $u_1, \ldots, u_k$ für jeden Zustand $s \in s$ zählt, wieviele Wörter u_{k+1} den DFA N in den Zustand s führen. Hierbei wird natürlich modulo q gezählt (um die Zustandsmenge endlich zu halten). Außerdem müssen wir noch einen Unterschied zwischen den „kurzen“ und den „langen“ Wörter u_{k+1} machen.

Genauer hat der zu konstruierende DFA die Form $N' = (S', \Sigma_\diamond^k, \iota', \delta', F')$ mit Zustandsmenge $S' = \{0, 1, \ldots, q-1\}^S \times \{0, 1, \ldots, q-1\}^S$ (d.h. Zustände von N' sind Paare $(f_<, f_=)$ von Abbildungen von S nach $\{0, \ldots, q-1\}$).

Die Überführungsfunktion wollen wir so definieren, daß für alle $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in (\Sigma^*)^k$ gilt: $\delta'(\iota', \otimes(\overline{u})) = (f_<, f_=)$ mit

$$\begin{aligned} &\forall s \in S\, \exists^{(f_<(s),q)} u\colon |u| < \max_{1\le i\le k} |u_i| = |\otimes \overline{u}| \text{ und } \delta(\iota, \otimes(\overline{u}u)) = s \\ &\forall s \in S\, \exists^{(f_=(s),q)} u\colon |u| = \max_{1\le i\le k} |u_i| = |\otimes \overline{u}| \text{ und } \delta(\iota, \otimes(\overline{u}u)) = s \end{aligned} \tag{1}$$

Dazu setze

$$\iota' = (\iota_<, \iota_=) \text{ mit } \iota_<(s) = 0 \text{ und } \iota_=(s) = \begin{cases} 1 & \text{falls } s = \iota \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $\delta'\big((f_<, f_=), \overline{a}\big) = (g_<, g_=)$ (für $(f_<, f_=) \in S'$ und $\overline{a} \in \Sigma_\diamond^k$) mit

$$g_<(t) = \sum_{\substack{s\in S \\ \delta(s,(\overline{a}\diamond))=t}} \big(f_<(s) + f_=(s)\big)$$

$$g_=(t) = \sum_{s\in S} f_=(s) \cdot \left|\Big\{a \in \Sigma \mid \delta\big(s, (\overline{a}a)\big) = t\Big\}\right|$$

Wir beweisen (1) induktiv über $\max_{1\le i\le k} |u_i|$, d.h. über $|\otimes \overline{u}|$.

IA: $|\otimes(\overline{u})| = 0$, d.h. $u_1 = u_2 = \cdots = u_k = \varepsilon$. Es gilt $\delta'(\iota', \otimes\overline{u}) = \iota' = (\iota_<, \iota_=)$.

Es gibt kein Wort u mit $|u| < 0$. Und es gilt $\iota_<(s) = 0$ f.a. $s \in S$.

Für $s = \iota$ ist $u = \varepsilon$ das einzige Wort mit $|u| = 0$ und $\delta\big(\iota, \otimes(\overline{u}u)\big) = s$ und es gilt $\iota_=(s) = 1$.

Für $s \neq \iota$ existiert kein Wort u mit $|u| = 0$ und $\delta\big(\iota, \otimes(\overline{u}u)\big) = s$. Gleichzeitig gilt $\iota_=(s) = 0$.

Damit ist die IA gezeigt.

IS: Seien $u_1, \ldots, u_k \in \Sigma^*$ mit $\max_{1 \leq i \leq k} |u_i| = n + 1$. Sei $\overline{a} = (a_1, \ldots, a_k) \neq (\diamond, \ldots, \diamond)$ der letzte Buchstabe von $\otimes(\overline{u})$. Dann existieren Wörter $v_1, \ldots, v_k$ mit $\otimes(u_1, \ldots, u_k) = \otimes(v_1, \ldots, v_k)\, \overline{a}$ und daher $|\otimes(\overline{v})| = n$. Sei $\delta'\big(\iota', \otimes(\overline{v})\big) = (g_<, g_=)$.

Für $s \in S$ gelten:

$$
\begin{aligned}
\left|\left\{u \in \Sigma^{<n+1} \colon \delta\big(\iota, \otimes(\overline{u}u)\big) = s\right\}\right| &= \left|\left\{u \in \Sigma^{\leq n} \colon \delta\Big(\delta\big(\iota, \otimes(\overline{v}u)\big), (\overline{a}, \diamond)\Big) = s\right\}\right| \\
&= \sum_{\substack{t \in S \\ \delta(t,(\overline{a},\diamond))=s}} \left|\left\{u \in \Sigma^{\leq n} \colon \delta\big(\iota, \otimes(\overline{v}u)\big) = t\right\}\right| \\
&\equiv_q \sum_{\substack{t \in S \\ \delta(t,(\overline{a},\diamond))=s}} \big(g_<(t) + g_=(t)\big) \equiv_q f_<(s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left|\left\{u \in \Sigma^{=n+1} \colon \delta\big(\iota, \otimes(\overline{u}u)\big) = s\right\}\right| &= \left|\left\{va \in \Sigma^{=n+1} \colon \delta\Big(\delta\big(\iota, \otimes(\overline{v}v)\big), (\overline{a}, a)\Big) = s\right\}\right| \\
&= \sum_{t \in S} \left|\left\{v \in \Sigma^{\leq n} \colon \delta\big(\iota, \otimes(\overline{v}v)\big) = t\right\}\right| \cdot \left|\left\{a \in \Sigma \colon \delta\big(t, (\overline{a}, a)\big) = s\right\}\right| \\
&\equiv_q \sum_{t \in S} g_=(t) \cdot \left|\left\{a \in \Sigma \mid \delta\big(t, (\overline{a}, a)\big) = s\right\}\right| \equiv_q f_=(s)
\end{aligned}
$$

Damit erfüllt der DFA N' tatsächlich die Forderung (1).

Es müssen noch die akzeptierenden Zustände des DFA N' definiert werden. Wenn man mit den Wörtern $u_1, \ldots, u_k$ zum Zustand $(f_<, f_=)$ kommt, so kennt man (modulo q) für jeden Zustand s von N die Anzahl der Wörter u_{k+1} der Länge $\leq |\otimes(u_1, \ldots, u_k)|$, so daß $\otimes(u_1, \ldots, u_k)$ in N nach s führt. Unbekannt ist die Anzahl der längeren Wörter mit dieser Eigenschaft. Um auch diese zu erhalten, definieren wir eine Funktion $h\colon S \to \mathbb{N}$ gemäß

$$h(s) = \left|\left\{u \in \Sigma^*\colon \delta\big(s, \otimes(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, u)\big) \in F\right\}\right|.$$

Dann ist ein Zustand $(f_<, f_=)$ akzeptierend (d.h. gehört zu F'), wenn gilt

- $\sum_{s \in F} f_<(s) + \sum_{s \in S} f_=(s) \cdot h(s) \equiv_q p$ (mit $0 \cdot \infty = 0$) und
- $|u| = |\otimes(\overline{u})| \implies h\Big(\delta\big(\iota, \otimes(\overline{u}, u)\big)\Big) < \infty$

Wir zeigen jetzt noch, daß der so konstruierte DFA N' die richtigen Verklebungen akzeptiert. Sei also $\overline{u} = (u_1, \ldots, u_k) \in (\Sigma^*)^k$, $n = |\otimes(\overline{u})|$ und $\delta'(\iota', \otimes\overline{u}) = (f_<, f_=)$.

Dann gelten

$$\begin{aligned}\sum_{s \in F} f_<(s) &\equiv_q \sum_{s\in F} \Big|\Big\{u \in \Sigma^{<n} \colon \delta'\big(\iota', \otimes(\overline{u}, u)\big) = s\Big\}\Big| \\ &= \Big|\big\{u \in \Sigma^{<n} \mid \otimes(\overline{u}, u) \in L(N)\big\}\Big|\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sum_{s\in S} f_=(s)\cdot h(s) &\equiv_q \sum_{s\in S}\Big|\Big\{u \in \Sigma^{=n} \colon \delta'\big(\iota', \otimes(\overline{u}, u)\big) = s\Big\}\Big| \cdot \Big|\Big\{u \in \Sigma^* \colon \delta\big(s, \otimes(\varepsilon, \ldots, \varepsilon, u)\big) \in F\Big\}\Big| \\ &= \Big|\Big\{u \in \Sigma^{\geq n} \colon \delta'\big(\iota', \otimes(\overline{u}, u)\big) \in F\Big\}\Big| = \Big|\big\{u \in \Sigma^{\geq n} \colon \otimes(\overline{u}, u)) \in L(N)\big\}\Big|\end{aligned}$$

und damit

$$\sum_{s\in F} f_<(s) + \sum_{s \in S} f_=(s) \cdot h(s) \equiv_q \Big|\big\{u \in \Sigma^* \colon \otimes(\overline{u}, u) \in L(N)\big\}\Big|$$

d.h. $\otimes\overline{u} \in L(N')$ gdw. $\exists^{(p,q)}u\colon\ \otimes(\overline{u}, u) \in L(N)$ gdw. $\exists^{(p,q)}u\colon (\overline{u}, u) \in R(M)$. Mit $M_{p,q} = N'$ folgt also, daß es einen synchronen Mehrbandautomaten $M_{p,q}$ wie gewünscht gibt.

Es bleibt noch die Frage, ob $M_{p,q}$ tatsächlich aus M berechenbar ist. Die kritische Stelle ist die Funktion h, d.h. die Frage, ob $h(s)$ aus N berechnet werden kann - bitte überlegen Sie selber, wie dies möglich ist. $\square$

Satz 3.3. *Aus einer automatischen Präsentation* $P = (M, (M_R)_{R\in\mathcal{R}}, (w_c)_{c\in\mathcal{C}})$ *und einer* FO$[\exists^\infty, \exists^{\,\mathrm{mod}}\,]$*-Formel* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *kann ein synchroner* k*-Bandautomat* M_φ *berechnet werden mit*

$$R(M_\varphi) = \left\{(u_1, \ldots, u_k) \in L(M)^k \mid \mathcal{A}(P) \models \varphi(u_1, \ldots, u_k)\right\}.$$

Beweis:
erweitert den Beweis von Satz 2.14. Der Quantor $\exists^\infty$ wird wie im Beweis von Satz 3.1 behandelt, der Quantor $\exists^{(p,q)}$ so wie der Quantor $\exists$ im Beweis von Satz 2.14 unter Zuhilfenahme von Lemma 3.2. $\square$

Es folgt, daß auch die Korollare 2.15 (Entscheidbarkeit der Theorie), 2.16 (Abschluß unter Interpretationen) und 2.19 (Abschluß unter definierbaren Quotienten) für die Logik $\mathrm{FO}[\exists^\infty, \exists^{\mathrm{mod}}]$ gelten.

Beispiel: Sei $P \subseteq \mathbb{N}$ schließlich periodisch (d.h., es gibt $n, p > 0$ mit $m \in P \iff m + p \in P$ für alle $m \geq n$). Dann ist $(\mathbb{N}, \leq, P)$ automatisch darstellbar.

Es gilt

$$P = \big(P \cap \{0, 1, \ldots, n-1\}\big) \cup \bigcup_{\substack{m \in P \\ n \leq m < 2n}} m + p\,\mathbb{N}\,.$$

Die Menge P ist also in der automatisch darstellbaren Struktur $(\mathbb{N}, \leq)$ definierbar mittels

$$\bigvee_{a \in P \cap \{0,1,\ldots,n-1\}} x = a \vee \left(x \geq n \wedge \bigvee_{m \in P \cap \{n, n+1, \ldots, 2n-1\}} \exists^{(0,p)} y\colon m < y \leq x\right).$$