3.3 Der Ramsey-Quantor

Beispiel. Ein *(Ordnungs-)Wald* ist eine partiell geordnete Menge $(A, \leq)$, so daß $\{a \in A \mid a \leq b\}$ für alle $b \in A$ eine endliche lineare Ordnung ist. Ein *(Ordnungs-)Baum* ist ein Wald mit einem kleinsten Element.

Zu einem Wald $(A, \leq)$ betrachten wir den ungerichteten Graphen (A, E) mit $E = \big\{\{a, b\} \bigm| a \leq b\big\}$.

Die unendlichen vollständigen Teilgraphen (A, E) sind die unendlichen Äste von $(A, \leq)$. Daher folgt aus Kőnigs Lemma, daß zu jedem unendlichen Wald $(A, \leq)$ der Graph (A, E) einen unendlichen vollständigen oder diskreten induzierten Teilgraphen enthält.

Im Jahr 1930 verallgemeinerte Ramsey (übrigens ein enger Freund des Philosophen Wittgenstein) diese Beobachtung, indem er zeigte, daß jeder unendliche ungerichtete Graph einen unendlichen vollständigen oder einen unendlichen diskreten (induzierten) Teilgraphen enthält. Für einen effektiven Graphen ist (natürlich) unentscheidbar, welche dieser Alternativen gilt (Satz von Rice). Von Jokusch wurde 1972 ein unendlicher effektiver ungerichteter Graph (V, E) konstruiert, der keinen entscheidbaren unendlichen vollständigen oder diskreten induzierten Teilgraphen enthält. Es gibt auch effektive Bäume mit unendlichen Ästen, so daß die Knotenmenge keines unendlichen Astes entscheidbar ist.

Wir werden zeigen, daß sich automatische Graphen „besser“ verhalten: es ist entscheidbar, ob ein geg. unendlicher automatischer Graph einen unendlichen vollständigen induzierten Teilgraphen enthält und, falls ein solcher existiert, so kann auch einer konstruiert werden, dessen Knotenmenge regulär ist (analog für unendliche diskrete induzierte Teilgraphen).

Beispiel. Betrachte den unendlichen Baum mit Knotenmenge Σ^* und der Präfixordnung ($u \leq v$ gdw. $v \in u\,\Sigma^*$). Dieser Baum ist automatisch. Ist $|\Sigma| \geq 2$, so hat er überabzählbar viele unendliche Äste. Da es nur abzählbar viele reguläre Mengen gibt, hat der Baum einen unendlichen Ast, der nicht regulär ist.

Wir erweitern die Logik $\mathrm{FO}[\exists^\infty, \exists^{\,\mathrm{mod}}\,]$ weiter zu $\mathrm{FO}[\exists^\infty, \exists^{\,\mathrm{mod}}\,, \rotatebox[origin=c]{180}{R}]$ um

3. φ τ-Formel, $x, y \in \mathcal{V} \Rightarrow$

    - $\xi = \rotatebox[origin=c]{180}{R}xy\colon \varphi$ τ-Formel, $\mathrm{frei}(\xi) = \mathrm{frei}(\varphi) \setminus \{x, y\}$, $\mathrm{qr}(\xi) = \mathrm{qr}(\varphi) + 1$

Man beachte, daß der „Ramsey-Quantor“ $\rotatebox[origin=c]{180}{R}$ nicht nur eine, sondern zwei Variablen bindet.

Die Gültigkeitsdefinition wird wie folgt erweitert: α Belegung in τ-Struktur $\mathcal{A}$.

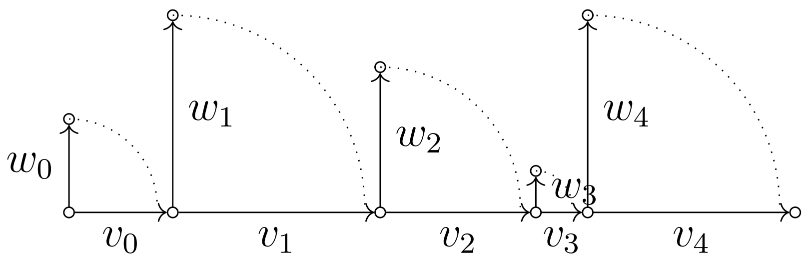
3. φ τ-Formel, $x, y \in \mathcal{V} \Rightarrow$
   - $\mathcal{A} \models_\alpha \text{ꓤ}xy\colon \varphi$ gdw. es eine unendliche Menge $C \subseteq ||\mathcal{A}||$ gibt mit $\mathcal{A} \models_{\alpha[\frac{a\,b}{x\,y}]} \varphi$ für alle $a, b \in C$.

Beispiel.

- $\text{ꓤ}xy\colon (E(x,y) \vee x = y)$ besagt, daß ein Graph einen unendlichen vollständigen Teilgraphen enthält
- $\text{ꓤ}xy\colon (\neg E(x,y) \vee x = y)$ besagt, daß ein Graph einen unendliche diskreten induzierten Teilgraphen enthält
- $\text{ꓤ}xy\colon (x \leq y \vee y \leq x \vee x = y)$ besagt, daß ein Wald einen (Baum mit einem) unendlichen Ast enthält.

Definition. Sei $K = \Big((\Sigma \times \Sigma)^*(\Sigma \times \{\#\})\Big)^*$ die Menge der *Kämme*. Zu einem Kamm κ existieren also Wörter v_i und w_i mit $|v_i| = |w_i| + 1$ für alle $0 \leq i \leq n$ und $\kappa = \otimes(v_0 v_1 \ldots v_n, w_0 \# w_1 \# \ldots \# w_n)$. Für diesen Kamm schreiben wir auch $(v_i, w_i)_{0 \leq i \leq n}$.

Rechts finden Sie die schematische Darstellung eines Kamms mit $n = 4$, die Pfeile stellen die Wörter v_i bzw. w_i dar, die Längen der Pfeile verdeutlichen die Länge dieser Wörter und die gepunkteten Kreise deuten an, daß w_i „etwas kürzer" ist als v_i.



Dann ist

$$L(\kappa) = \{v_0 v_1 \ldots v_{i-1} w_i \mid 0 \leq i \leq n\} \subseteq \Sigma^*$$

die von κ kodierte Sprache. Für $u \in L(\kappa)$ sagen wir auch „u liegt auf dem Kamm κ". (Diese Wörter erhält man, indem man in der schematischen Darstellung vom Ursprung beliebig weit nach rechts und dann nach oben geht.)

Sei jetzt R eine sychron-rationale binäre Relation. Wir betrachten die Menge der Kämme κ mit der Eigenschaft „je zwei auf κ liegende Wörter gehören zu R“, d.h. $L(\kappa) \times L(\kappa) \subseteq R$. Wir werden zeigen, daß die Menge dieser Kämme regulär ist (man beachte, daß ein Kamm ja ein Wort über dem Alphabet $\Sigma \times \big(\Sigma \cup \{\#\}\big)$ ist). Für $k = 0$ ist dies genau die Aussage des folgenden Lemmas:

Lemma 3.4. *Aus einem synchronen $(k+2)$-Bandautomaten N kann ein synchroner $(k+1)$-Bandautomat N' berechnet werden mit*

$$R(N') = \left\{ (\overline{u}, \kappa) \in (\Sigma^*)^k \times K \;\middle|\; (\overline{u}, v, w) \in R(N) \textit{ für alle } v, w \in L(\kappa) \right\}.$$

Beweis:
Zunächst beobachten wir, daß die Menge K der Kämme regulär ist.

Sei $E = \left\{ (v, \kappa) \in \Sigma^* \times K \;\middle|\; v \in L(\kappa) \right\}$ die Menge aller Paare (v, κ), wobei v ein Wort ist, das auf dem Kamm κ liegt. Diese binäre Relation ist synchron-rational.

Sei weiter $R = R(N)$.

Dann ist $\mathcal{A} = (\Sigma^* \cup K, K, E, R)$ eine automatische Struktur.

Betrachte die Formel

$$\psi(\overline{x}, x') = \bigwedge_{1 \leq i \leq n} \neg K(x_i) \wedge K(x') \wedge \forall y, z\colon E(y, x') \wedge E(z, x') \to R(\overline{x}, y, z)\,.$$

Sie sagt aus, daß die Wörter x_i alle zu Σ^* gehören, daß x' ein Kamm ist und daß je zwei auf dem Kamm x' liegende Wörter y und z zu R gehören (genauer: $(\overline{x}, y, z)$ gehört zu R).

Nach Satz 2.14 kann hieraus ein synchroner $(k+1)$-Bandautomat N' berechnet werden mit

$$\begin{aligned} R(N') &= \big\{(\overline{u}, \kappa) \bigm| \mathcal{A} \models \psi[\overline{u}, \kappa]\big\} \\ &= \big\{(\overline{u}, \kappa) \in (\Sigma^*)^k \times K \bigm| (\overline{u}, v, w) \in R(N) \text{ für alle } v, w \in L(\kappa)\big\}\,. \end{aligned}$$

□

Sei wieder R eine synchron-rationale binäre Relation. Dann existiert genau dann eine unendliche Menge C mit $C \times C \subseteq R$ (d.h. eine unendlicher vollständiger Teilgraph), wenn es einen „unendlichen“ Kamm κ in $R(N')$ gibt (dabei ist N' der Bandautomat aus dem vorherigen Lemma). Kämme sind aber endlich, so daß diese Charakterisierung uns nicht hilft. Das folgende Lemma zeigt aber, daß die Existenz eines „ziemlich großen“ Kamms in $R(N')$ ausreicht.

Lemma 3.5. *Sei N ein synchroner $(k+2)$-Bandautomat, n die Anzahl der Zustände des in Lemma 3.4 berechneten synchronen $(k+1)$-Bandautomaten N' und $\overline{u} \in (\Sigma^*)^k$. Dann sind äquivalent:*

(1) Es gibt eine unendliche Menge $C \subseteq \Sigma^*$ mit $(\overline{u}, v, w) \in R(N)$ für alle $v, w \in C$

(2) Es gibt einen Kamm $\kappa = \otimes(v_0 v_1 \ldots v_n, w_0 \# w_1 \# \ldots w_n \#)$ mit $|v_0| \geq |\otimes(\overline{u})|$ und $(\overline{u}, v, w) \in R(N)$ für alle $v, w \in L(\kappa)$.

Gilt (2), so kann aus κ und $\overline{u}$ ein NFA M_C berechnet werden, so daß $L(M_C)$ unendlich ist mit $(\overline{u}, v, w) \in R(N)$ für alle $v, w \in L(M_C)$.

Beweis:
(1)$\Rightarrow$(2): wir zeigen die stärker Aussage, daß jede unendliche Menge $C \subseteq \Sigma^*$ einen „unendlichen Kamm enthält“:

Wähle $w_0 \in C$ beliebig mit $|w_0| \geq |\otimes(\overline{u})|$. Wähle $v_0 \in \Sigma^*$ mit $|v_0| = |w_0| + 1$ und $v_0\Sigma^* \cap C$ unendlich (d.h. v_0 ist Präfix von unendlich vielen Wörtern aus C). Dies ist möglich, da C unendlich ist und es nur endlich viele Wörter der Länge $|w_0| + 1$ gibt. Dann setze $\kappa_0 = (v_0, w_0)$.

Sei induktiv Kamm $\kappa_i = (v_i, w_i)_{0 \leq i \leq m}$ gewählt mit $v_0 v_1 \cdots v_m \Sigma^* \cap C$ unendlich.

Wähle $w_{m+1} \in \Sigma^*$ mit $v_0 v_1 \cdots v_m \, w_{m+1} \in C$ und wähle $v_{m+1} \in \Sigma^+$ mit $|v_{m+1}| = |w_{m+1}| + 1$ und $v_0 \cdots v_{m+1} \Sigma^* \cap C$ unendlich. Setze $\kappa_{m+1} = (v_i, w_{i+1})_{0 \leq i \leq m+1}$.

Dann ist κ_n Kamm mit $|v_0| = |w_0| + 1 > |\otimes(\overline{u})|$ und $L(\kappa_n) \subseteq C$, also $(\overline{u}, v, w) \in R(N)$ für alle $v, w \in L(\kappa_n)$.

(2)$\Rightarrow$(1) Sei $\kappa = (v_i, w_i)_{1 \le i \le n}$ Kamm mit $|v_0| \ge |\otimes(\overline{u})|$ und $(\overline{u}, v, w) \in R(N)$ für alle $v, w \in L(\kappa)$.

Es gilt $(\overline{u}, \kappa) \in R(N')$, also

$$\begin{aligned} L(N') &\ni \otimes(\overline{u}, \kappa) \\ &= \otimes(\overline{u}, v_0, w_0\#) \ \otimes(\varepsilon, v_1 v_2 \dots v_n, w_1\# w_2\# \dots w_n\#) && \text{da } |\otimes(\overline{u})| \le |v_0| = |w_0\#| \\ &= \underbrace{\otimes(\overline{u}, v_0, w_0\#)}_{\alpha_0} \ \underbrace{\otimes(\varepsilon, v_1, w_1\#)}_{\alpha_1} \cdots \underbrace{\otimes(\varepsilon, v_n, w_n\#)}_{\alpha_n} && \text{da } |v_i| = |w_i\#| \end{aligned}$$

Da n die Anzahl der Zustände von N' ist, können aus κ Zahlen $0 \le i < j \le n$ berechnet werden mit

$$\alpha_0 \dots \alpha_i (\alpha_{i+1} \dots \alpha_j)^* \alpha_{j+1} \dots \alpha_n \subseteq L(N')\,.$$

Für $\ell \in \mathbb{N}$ setze

$$\begin{aligned}\kappa_\ell &= \otimes(v_0v_1 \dots v_i, w_0\#w_1 \dots w_i\#) \otimes(v_{i+1}v_{i+2} \dots v_j, w_{i+1}\#w_{i+2} \dots w_j\#)^\ell \\ &= \otimes\big(v_0v_1 \cdots v_i(v_{i+1} \cdots v_j)^\ell, w_0\#w_1\# \cdots w_i\#(w_{i+1}\# \cdots w_j\#)^\ell\big)\,, \\ \kappa_\ell^+ &= \kappa_\ell \otimes(v_{j+1}v_{j+2} \dots v_{n+1}, w_{j+1}\#w_{j+2} \dots w_n\#)\end{aligned}$$

und $C = \bigcup_{\ell\in\mathbb{N}} L(\kappa_\ell)$. Dann ist C eine unendliche Sprache in Σ^*.

Bemerkung. Da, für $\ell < m$, der Kamm κ_ℓ ein Präfix des Kamms κ_m ist, können wir den „Grenzwert“ dieser endlichen Wörter

$$\kappa_\infty = \otimes\big(v_0v_1 \cdots v_i(v_{i+1} \cdots v_j)^\ell, w_0\#w_1\# \cdots w_i\#(w_{i+1}\# \cdots w_j\#)^\omega\big)\,.$$

Dies ist ein „unendlicher Kamm“ und es gilt $C = L(\kappa_\infty)$.

Seien $v, w \in C$. Dann existieren $\ell, m \in \mathbb{N}$ mit $v \in L(\kappa_\ell)$ und $w \in L(\kappa_m)$. Ohne Einschränkung gilt $m \leq \ell$ und damit $w \in L(\kappa_\ell)$. Wir erhalten

$$v, w \in L(\kappa_\ell) \subseteq L(\kappa_\ell^+)$$

Wegen $\otimes(\overline{u}, \kappa_\ell^+) \in L(N')$ folgt $(\overline{u}, v, w) \in L(N)$. Da $v, w \in C$ beliebig gewählt waren, gilt also (1).

Damit ist die Äquivalenz von (1) und (2) gezeigt.

Es bleibt zu zeigen, daß C regulär ist und aus κ berechnet werden kann:

$$\begin{aligned} C &= \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} L(\kappa_\ell) \\ &= \{w_0, v_0 w_1, v_0 v_1 w_2, \ldots v_0 \cdots v_{i-1} w_i\} \\ &\quad \cup v_0 \cdots v_i (v_{i+1} \cdots v_j)^* \{w_{j+1}, v_{j+1} w_{j+2}, \ldots, v_{j+1} \cdots v_{n-1} w_n\} \end{aligned}$$

Da i und j aus κ berechnet werden können, kann ein NFA M_C berechnet werden mit $C = L(M_C)$. $\square$

Satz 3.6. *Aus einer automatischen Präsentation* $P = \big(M, (M_R)_{R\in\mathcal{R}}, (w_c)_{c\in\mathcal{C}}\big)$ *und einer* $\mathrm{FO}[\exists^\infty, \exists^{\bmod}, \rotatebox{180}{R}]$*-Formel* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_k)$ *kann ein synchroner* k*-Bandautomat* M_φ *berechnet werden mit*

$$R(M_\varphi) = \big\{(u_1, \ldots, u_k) \in L(M)^k \;\big|\; \mathcal{A}(P) \models \varphi(u_1, \ldots, u_k)\big\}\,.$$

Beweis:
erweitert den Beweis von Satz 2.14.

- $\varphi = \rotatebox{180}{R}yz\,\psi(\overline{x}, y, z)$: Nach Induktionsannahme haben wir einen synchronen $(k+2)$-Bandautomaten M_ψ mit $R(M_\psi) = \big\{(\overline{u}, v, w) \in L(M)^{k+2} \;\big|\; \mathcal{A}(P) \models \varphi[\overline{u}, v, w]\big\}$. Setze $N = M_\psi$ in Lemma 3.4 und n die Anzahl der Zustände des berechneten synchronen $(k+1)$-Bandautomaten N'. Berechne aus N' synchronen $(k+1)$-Bandautomaten N'' mit

$$R(N'') = \Big\{\big(\overline{u}, \otimes(v_0 \ldots v_{n+1}, w_0\# \ldots w_n\#)\big) \in R(N') \;\Big|\; |v_0| \geq |\otimes(\overline{u})|\Big\}$$

  und (mithilfe von Lemma 2.7) synchronen k-Bandautomaten M_φ mit

$$R(M_\varphi) = \big\{\overline{u} \in (\Sigma^*)^k \;\big|\; \text{es gibt } \kappa \in K \text{ mit } (\overline{u}, \kappa) \in R(N'')\big\}\,.$$

$\square$

Es folgt, daß auch die Korollare 2.15 (Entscheidbarkeit der Theorie), 2.16 (Abschluß unter Interpretationen) und 2.19 (Abschluß unter definierbaren Quotienten) für die Logik $\mathrm{FO}[\exists^\infty, \exists^{\,\mathrm{mod}}, \text{ᴚ}]$ gelten.

Beispiel Sei $\mathcal{T} = (T, \leq)$ ein automatischer Baum. Dann ist entscheidbar, ob $\mathcal{T}$ einen unendlichen Ast hat. Ist dies der Fall, so hat $\mathcal{T}$ auch einen regulären unendlichen Ast.

Beweis:
Sei $\psi(x,y) = (x \leq y \vee y \leq x)$. Der Baum $\mathcal{T}$ hat genau dann einen unendlichen Ast, wenn

$$\mathcal{T} \models \text{ᴚ} x, y \colon \psi\,,$$

was nach Korollar 2.15 für die Logik $\mathrm{FO}[\exists^\infty, \exists^{\,\mathrm{mod}}, \text{ᴚ}]$ entscheidbar ist.

Angenommen, dies ist der Fall. Berechne den synchronen 2-Bandautomaten N mit $R(N) = \big\{(v,w) \in T \;\big|\; \mathcal{T} \models \psi[v,w]\big\}$ (mgl. nach Satz 2.14). Seien N' der in Lemma 3.4 berechnete synchrone 1-Bandautomat (d.h. NFA) und n die Anzahl seiner Zustände. Durch „Ausprobieren“ kann man einen Kamm κ wie in Satz 3.6(2) finden. Hieraus läßt sich nach Satz 3.6 ein NFA M_C berechnen, so daß ($v \leq w$ oder $w \leq v$) für alle $v, w \in L(M_C)$ gilt und $L(M_C)$ unendlich ist.

Also ist $\big(\mathcal{T}, L(M_C)\big)$ effektiv automatisch. Betrachte die Formel $\varphi(x) = \exists y\colon y \in L(M_C) \wedge x \leq y$. Dann ist

$$\big\{w \in T \mid \mathcal{T} \models \varphi[w]\big\}$$

ein unendlicher Ast in $\mathcal{T}$ und nach Satz 2.14 effektiv regulär. $\square$

Bemerkung.

- Für effektive Bäume ist die Existenz eines unendlichen Pfades „höchst“ unentscheidbar (*highly undecidable*, Σ_1^1-vollständig)
- Ebenso kann entschieden werden, ob ein automatischer Graph eine unendliche Clique enthält, die analoge Frage für effektive Graphen ist wieder Σ_1^1-vollständig.
- Die Logik kann man auch erweitern, indem man n-stellige Bedingungen an die Elemente von C stellt (für beliebiges $n \geq 1$): $(\mathcal{A}, \overline{u}) \models \reflectbox{$\forall$}^n y_1, y_2, \ldots, y_n\, \varphi(\overline{x}, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ bedeutet „Es gibt eine unendliche Menge $C \subseteq A$ mit $(\mathcal{A}, \overline{u}, v_1, v_2, \ldots, v_n) \models \varphi$ für alle $v_1, v_2, \ldots, v_n \in C$“. Man erhält dieselben Ergebnisse.
- Analoge Ergebnisse gelten für den Beschränktheitsquantor[2] und die Logik FSO[3].

---

[2]vgl. D. Kuske. Theories of automatic structures and their complexity. In *CAI 2009*, Lecture Notes in Comp. Science vol. 5725, Seiten 81–98. Springer, 2009.

[3]vgl. D. Kuske und M. Lohrey. Some natural decision problems in automatic graphs. *Journal of Symbolic Logic*, 75(2):678–710, 2010.