4.3 Strukturen beschränkten Grades

Zur Vereinfachung der Notationen, betrachten wir nur konstantenlose Signaturen.

Die nichtelementare Komplexität unseres Algorithmus' für MC(AutPr, FO) beruht auf den Automatenkonstruktionen. Wir analysieren einen „naïven“ Auswertungsalgorithmus:

Gegeben: Struktur $\mathcal{A}$
$\texttt{Auswertung}\big(\varphi(x_1,\ldots,x_k)\colon\ \text{Formel}, \overline{a}\colon A^k\big)$
$\texttt{case}$
$\varphi = R(x_1,\ldots,x_k)$: $\texttt{if}\ \overline{a} \in R^{\mathcal{A}}\ \texttt{then return}\ 1;\ \texttt{else return}\ 0;$
$\varphi = \alpha \wedge \beta$: $\texttt{return}\ \min\big(\texttt{Auswertung}(\alpha,\overline{a}), \texttt{Auswertung}(\beta,\overline{a})\big);$
$\varphi = \neg\alpha$: $\texttt{return}\ 1 - \texttt{Auswertung}(\alpha,\overline{a});$
$\varphi = \exists x_{k+1}\colon \alpha$: $\texttt{return}\ \max\big\{\texttt{Auswertung}(\alpha,\overline{a}b) \bigm| b \in A\big\}$
$\texttt{endcase}$

Problematisch ist natürlich der letzte Fall, denn wir können nicht alle $b \in A$ durchprobieren. Wir werden zeigen, daß wir für automatische Strukturen „von beschränktem Grad“ nur endlich viele Wörter b zu testen brauchen.

Definitionen Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur. Ihr *Gaifman-Graph* $G(\mathcal{A}) = (A, E)$ ist definiert durch $(a, b) \in E$ gdw. $a, b \in A$ verschieden und wenn es Relationsnamen $R \in \mathcal{R}$ und $(a_1, \dots, a_{\mathrm{ar}(R)}) \in R^{\mathcal{A}}$ gibt mit $a, b \in \{a_1, \dots, a_{\mathrm{ar}(R)}\}$.

Die Struktur $\mathcal{A}$ hat *beschränkten Grad*, wenn ihr Gaifman-Graph $G(\mathcal{A})$ beschränkten Grad hat (d.h. es gibt $n \in \mathbb{N}$, so daß jeder Knoten in $G(\mathcal{A})$ höchstens n Nachbarn hat).

Für $a, b \in A$ sei $d^{\mathcal{A}}(a, b)$ der Abstand von a und b im Gaifman-Graphen $G(\mathcal{A})$, d.h. die Länge eines kürzesten Weges zwischen a und b (u.U. $d_{\mathcal{A}}(a, b) = \infty$). Für $\overline{a} \in A^k$ ist $d^{\mathcal{A}}(\overline{a}, b) = \min_{1 \leq i \leq k} d_{\mathcal{A}}(a_i, b)$.

Sei $r \in \mathbb{N}$ und $\overline{a} \in A^k$. Die *Kugel um* $\overline{a}$ *vom Radius* r ist die Menge $B^{\mathcal{A}}(\overline{a}, r) = \{b \in A \mid d^{\mathcal{A}}(\overline{a}, b) \leq r\}$, die *Nachbarschaft* oder *Sphäre um* $\overline{a}$ *vom Radius* r ist die Struktur $S^{\mathcal{A}}(\overline{a}, r) = \big(\mathcal{A} \restriction B^{\mathcal{A}}(\overline{a}, r), \overline{a}\big)$, d.h. die Einschränkung von $\mathcal{A}$ auf die Kugel $B^{\mathcal{A}}(\bar{a}, r)$ mit zusätzlichen Konstanten $a_1, \dots, a_k$.

Satz 4.8 (Satz von Hanf (1965))**.** *Sei $\mathcal{A}$ eine konstantenlose Struktur von beschränktem Grad, $q \in \mathbb{N}$, $\overline{a}, \overline{b} \in A^k$ mit*

$$S^{\mathcal{A}}(\overline{a}, 4^q) \cong S^{\mathcal{A}}(\overline{b}, 4^q)$$

und $\varphi = \varphi(\overline{x})$ eine Formel vom Quantorenrank $\leq q$. Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi(\overline{a}) \iff \mathcal{A} \models \varphi(\overline{b})\,.$$

Bemerkung. Da der Quantorenrank von φ höchstens $|\varphi|$ ist, haben wir also

$$S^{\mathcal{A}}(\overline{a}, 4^{|\varphi|}) \cong S^{\mathcal{A}}(\overline{b}, 4^{|\varphi|}) \implies \big(\mathcal{A} \models \varphi(\overline{a}) \iff \mathcal{A} \models \varphi(\overline{b})\big)\,.$$

Notation: für $n \in \mathbb{N}$ sei $\exp_2(n) = 2^{2^n}$ die doppelte Exponentialfunktion.

Im folgenden sei $\mathcal{A}$ eine automatische Struktur mit konstantenloser Signatur σ und Präsentation $P = \big(M, (M_R)_{R\in\sigma}\big)$. Sei der Grad von $\mathcal{A}$ höchstens d.

Lemma 4.9. *Seien $q \in \mathbb{N}$, $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in A^k$ und $v \in A$. Dann existiert ein NFA M' mit $|\otimes\overline{v}| \cdot \exp_2\Big(O\big((k+1) \cdot d^{4^q}\big)\Big)$ Zuständen und*

$$L(M') = \left\{w \in A \;\middle|\; S^{\mathcal{A}}(\overline{v}v, 4^q) \cong S^{\mathcal{A}}(\overline{v}w, 4^q)\right\}.$$

Beweis:
Sei $B^{\mathcal{A}}(\overline{v}v, 4^q) = \{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ mit $v = u_1$ und $v_j = u_{i_j}$. Wir haben $N \leq (k+1) \cdot d^{4^q}$.

Für $w \in A$ gilt $S^{\mathcal{A}}(\overline{v}v, 4^q) \cong S^{\mathcal{A}}(\overline{v}w, 4^q)$ genau dann, wenn es Wörter $w_1, w_2, \ldots, w_N$ gibt mit

(i) $w = w_1$ und $v_j = w_{i_j}$

(ii) $w_i \in A$ für alle $1 \leq i \leq N$

(iii) $w_i \neq w_j$ für alle $1 \leq i < j \leq N$

(iv) $(w_{i_1}, w_{i_2}, \ldots, w_{i_m}) \in R^{\mathcal{A}} \iff (v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_m}) \in R^{\mathcal{A}}$ für alle $R \in \sigma$ und $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_m \leq N$

(v) es gilt nicht: es gibt $w' \in A$ mit

  (v.i) $w' \notin \{w_1, w_2, \ldots, w_N\}$ und

  (v.ii) $(w_j, w') \in E$ für ein $1 \leq j \leq N$ mit $d^{\mathcal{A}}(\overline{v}v, u_j) < 4^q$.

Hierfür konstruieren wir synchrone N-Bandautomaten $M_{(i)}$, $M_{(ii)}$ etc. wie folgt:

(i) Der Automat $M_{(i)}$ überprüft, daß auf den Bändern i_j für $1 \leq j \leq k$ das richtige Wort v_j steht. Er hat damit $\max\{|v_j| \mid 1 \leq j \leq k\} + 1$ viele Zustände.

(ii) $M_{(ii)}$ überprüft auf jedem Band, daß dort ein Wort aus A steht und läßt hierfür den NFA M aus der automatischen Präsentation P laufen - insgesamt hat $M_{(i)}$ also $2^{O(N)}$ Zustände

(iii) $M_{(iii)}$ kontrolliert, daß auf den N Bändern paarweise verschiedene Wörter stehen. Hierfür sind $2^{N(N-1)}$ Zustände ausreichend.

(iv) Für jedes $R \in \sigma$ sei $\overline{M_R}$ der Komplementärautomat zu M_R (der, da M_R ein fester Automat ist, eine feste Anzahl von Zuständen hat). Für jedes $R \in \sigma$ mit $m = \mathrm{ar}(R)$ und jedes Tupel $i_1, i_2 \ldots, i_m \in \{1, \ldots, N\}$ läuft in $M_{(iii)}$ eine Kopie von M_R oder von $\overline{M_R}$. Insgesamt sind dies höchstens $|\sigma| \cdot N^M$ viele Kopien (M ist die maximale Arität eines Relationsnamens aus σ), also hat $M_{(iv)}$ höchstens $2^{N^{O(1)}}$ viele Zustände.

(v) Zunächst konstruieren wir synchrone $(N+1)$-Bandautomaten für die Aussagen (v.i) bzw. (v.ii):

Für (v.i) muß überprüft werden, daß das Wort w' von Band $N+1$ auf keinem der Bänder 1 bis N steht - was mit 2^N Zuständen gelingt.

Da die Relation E in der automatischen Struktur $\mathcal{A}$ FO-definierbar ist, existiert ein synchroner 2-Bandautomat M_E mit $R(M_E) = \big\{(u, v) \in A^2 \bigm| (u, v) \in E\big\}$. Die Bedingung (v.ii) wird von höchstens N Kopien von M_E auf den Bändern j und $N+1$ überprüft. Dadurch entstehen $2^{O(N)}$ Zustände.

Damit hat der synchrone $(N+1)$-Bandautomat für die Bedingung (v.i) und (v.ii) $2^{O(N)}$ viele Zustände. Es gibt also einen synchronen N-Bandautomaten $\overline{M_{(v)}}$ mit

$2^{O(N)}$ Zuständen mit

$$R(\overline{M_{(v)}}) = \big\{(w_1, \ldots, w_N) \bigm| \exists w' \in A\colon (iv.i)\&(iv.ii)\big\}\,.$$

Es gibt also einen synchronen N-Bandautomaten $M_{(iv)}$ mit $\exp_2\big(O(N)\big)$ Zuständen und

$$R(\overline{M_{(v)}}) = \big\{(w_1, \ldots, w_N) \bigm| \neg\exists w' \in A\colon (iv.i)\&(iv.ii)\big\}\,.$$

Die Konjunktion dieser Bedingungen kann mit dem direkten Produkt dieser Automaten überprüft werden, d.h. mit einem synchronen N-Bandautomaten mit $|\otimes\overline{v}| \cdot \exp_2\big(O(N)\big)$ Zuständen. Die Projektion auf das erste Band liefert den NFA M' mit ebensovielen Zuständen. $\square$

Korollar 4.10. *Seien* $\overline{v} = (v_1, \ldots, v_k) \in A^k$ *und* $\varphi = \varphi(\overline{x}, y)$ *eine Formel mit Quantorenrank* q *mit* $(\mathcal{A}, \overline{v}) \models \exists y\, \varphi$. *Dann existiert ein Wort* $w \in A$ *mit* $|w| \leq |\otimes\overline{v}| \cdot \exp_2\Big(O\big((k+1) \cdot d^{4^q}\big)\Big)$ *und* $(\mathcal{A}, \overline{v}, w) \models \varphi$.

Beweis:
Wegen $(\mathcal{A}, \overline{v}) \models \exists y\, \varphi$ existiert $v \in A$ mit $(\mathcal{A}, \overline{v}, v) \models \varphi$. Nach Lemma 4.9 existiert ein NFA M', der alle Wörter w akzeptiert mit $S^{\mathcal{A}}(\overline{v}v, 4^q) \cong S^{\mathcal{A}}(\overline{v}w, 4^q)$. Wegen $L(M') \neq \emptyset$ akzeptiert er ein Wort w mit

$$|w| \leq \text{ Anzahl der Zustände von } M' \leq |\otimes\overline{v}| \cdot \exp_2\Big(O\big((k+1) \cdot d^{4^q}\big)\Big)\,.$$

Nach Satz 4.8 gilt $(\mathcal{A}, \overline{v}, w) \models \varphi$. $\square$

Satz 4.11. *Die* FO*-Theorie von* $\mathcal{A}$ *ist in elementarer Zeit entscheidbar (d.h. es gibt* $N \in \mathbb{N}$*, so daß das Problem in* N*-fach exponentieller Zeit lösbar ist).*

Beweis:
Sei $\varphi = Q_1 x_1\, Q_2 x_2\, \ldots\, Q_q x_q\, \psi$ ein FO-Satz mit $Q_i \in \{\exists, \forall\}$ und ψ quantorenfrei. Setze $h = \exp_2\Big(O\big((k+1) \cdot d^{4^q}\big)\Big)$ und $\varphi_i = Q_i x_i\, Q_{i+1} x_{i+1}\, \cdots\, Q_q x_q\, \psi$ für $1 \leq i \leq q+1$, so daß $\varphi_1 = \varphi$ und $\varphi_{q+1} = \psi$.

Behauptung $\mathcal{A} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{A} \models Q_1 x_1 (|x_1| \leq h)\, Q_2 x_2 (|x_2| \leq h^2)\, \ldots Q_q x_q (|x_q| \leq h^q)\, \psi$

Beweis per Induktion

IA o.E. $Q_1 = \exists$

$$\mathcal{A} \models \exists x_1\, \varphi_2 \overset{Kor.\ 4.10}{\Longleftrightarrow} \mathcal{A} \models \exists x_1\, (|x_1| \leq h)\, \varphi_2$$

IS o.E. $Q_{i+1} = \exists$

$$\mathcal{A} \models \varphi \overset{IV}{\Leftrightarrow} \mathcal{A} \models \exists x_1\,(|x_1| \leq h)\,Q_2 x_2\,(|x_2| \leq h^2)\ldots Q_i x_i\,(|x_i| \leq h^i)\,\exists x_{i+1}\,\varphi_{i+2}.$$
$$\xLeftrightarrow{Kor.\ 4.10} \mathcal{A} \models \exists x_1\,(|x_1| \leq h)\ldots Q_i x_i\,(|x_i| \leq h^i)\,\exists x_{i+1}\,(|x_{i+1}| \leq h^{i+1})\,\varphi_{i+2}.$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Um die Gültigkeit von φ zu überprüfen, brauchen also nur die Wörter der Länge $\leq h^q$ betrachtet zu werden, von denen es nur elementar viele gibt. $\square$

Bemerkungen Sei AutPr(besch) die Klasse der automatischen Präsentationen von Strukturen beschränkten Grades.

Eine sehr viel genauere Analyse (Kuske & Lohrey 2011) zeigt, daß das Auswertungsproblem MC(AutPr(besch), FO) in 2−$\mathsf{EXPSPACE}$ liegt und daß es eine automatische Struktur $\mathcal{A}(P)$ von beschränktem Grad gibt, so daß MC($\{P\}$, FO) vollständig für 2−$\mathsf{EXPSPACE}$ ist.

Eine wesentliche Quelle des Exponententurms ist der Satz von Hanf, in dem über exponentiellen Radius gesprochen wird. Wir vermuten in der genannten Arbeit:

Vermutung: Sei $\mathcal{A}$ eine konstantenlose Struktur von beschränktem Grad, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi = \varphi(\overline{x}) \in \Sigma_n$ und $\overline{a}, \overline{b} \in A^k$ mit

$$S^{\mathcal{A}}(\overline{a}, |\varphi|^n) \cong S^{\mathcal{A}}(\overline{b}, |\varphi|^n)$$

Dann gilt

$$\mathcal{A} \models \varphi[\overline{a}] \iff \mathcal{A} \models \varphi[\overline{b}]\,.$$

Sollte diese Vermutung stimmen (was ich seit längerem mit Prof. Nicole Schweikardt aus Berlin zu zeigen versuche), so würde wohl folgen: Das Auswertungsproblem $\mathrm{MC}(\mathrm{AutPr}, \Sigma_n)$ liegt in $1-\mathsf{EXPSPACE}$.

Die *Wachstumsfunktion* einer Struktur $\mathcal{A}$ ist die Funktion

$$r \mapsto \max\{|B^{\mathcal{A}}(a, r)| \mid a \in A\}\,.$$

Hat $\mathcal{A}$ beschränkten Grad, so ist diese Funktion höchstens exponentiell. Ist $\mathcal{A}(P)$ automatische Struktur beschränkten Grades mit polynomieller Wachstumsfunktion, so ist $\mathrm{MC}(\{P\}, \mathrm{FO})$ sogar in $1-\mathsf{EXPSPACE}$.