1.2 Rationale Strukturen

Definition. Ein k-*Bandautomat* ist ein Tupel $M = (Q, \Sigma, \iota, \Delta, F)$ mit

- endlicher Menge (von *Zuständen*) Q,
- Alphabet Σ,
- *Startzustand* $\iota \in Q$,
- endlicher *Transitionsrelation* $\Delta \subseteq Q \times (\Sigma^*)^k \times Q$ und
- *Finalzustandsmenge* $F \subseteq Q$.

Die von M akzeptierte Relation $R(M) \subseteq (\Sigma^*)^k$ ist definiert durch $(u^1, u^2, \ldots, u^k) \in R(M)$ gdw. es Zustände $\iota = q_0,\ q_1, \ldots, q_n$ mit $q_n \in F$ und Wörter $u_i^j \in \Sigma^*$ für $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq k$ gibt mit

- $u^j = u_1^j u_2^j \ldots u_n^j$ für alle $1 \leq j \leq k$ und
- $(q_{i-1}, (u_i^1, u_i^2, \ldots, u_i^k), q_i) \in \Delta$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Eine Relation $R \subseteq (\Sigma^*)^k$ heißt *rational*, wenn es einen k-Bandautomaten M mit $R = R(M)$ gibt.

Beispiel 1.1. Sei Σ ein Alphabet. Für $u, v \in \Sigma^*$ heißt u *Teilwort* von v ($u \preceq v$), wenn es Wörter $u_1, u_2, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \Sigma^*$ gibt mit $u = u_1 u_2 \cdots u_n$ und $v = u_1 v_1 u_2 v_2 \cdots u_n v_n$.

Die Relationen $\{(u, u) \mid u \in \Sigma^*\}$ und $\{(u, v) \mid u \preceq v\}$ sind rational.

Beweis:
$Q = \{\iota\} = F$ und

$$\Delta = \{(\iota, a, a, \iota) \mid a \in \Sigma\}$$

bzw.

$$\Delta = \{(\iota, a, a, \iota), (\iota, a, \varepsilon, \iota) \mid a \in \Sigma\}.$$

$\square$

Definition. Eine τ-Struktur $\mathcal{A}$ ist *rational*, wenn es ein Alphabet Σ gibt, so daß die Grundmenge $A \subseteq \Sigma^*$ rational (d.h. regulär) und die Relationen $R^{\mathcal{A}} \subseteq (\Sigma^*)^{\mathrm{ar}(R)}$ rational sind (für alle $R \in \mathcal{R}$).

Eine τ-Struktur $\mathcal{B}$ ist *rational darstellbar*, wenn es eine isomorphe rationale Struktur gibt.

Beispiel 1.1 (Fortsetzung)

- Die Struktur $(\Sigma^*, \preceq)$ ist rational.
- Sei $u \leq v$, wenn es Wörter x, y gibt mit $v = xuy$ (d.h. u ist Faktor von v). Dann ist auch $(\Sigma^*, \leq)$ rational.
- Sei $\mathcal{M}$ Turingmaschine. Dann ist der Konfigurationsgraph von $\mathcal{M}$ rational.

Jede rationale Struktur ist endlich beschreibbar: man nehme z.B. k-Bandautomaten, die die Grundmenge bzw. die Relationen akzeptieren.

Also: D ist die Menge der Tupel von Mehrbandautomaten, die τ-Strukturen beschreiben. Für ein solches Tupel d ist $\mathcal{S}(d)$ die beschriebene rationale Struktur.

Satz 1.2. *Das uniforme Auswertungsproblem für rationale Strukturen ist unentscheidbar.*

Beweis:
Wir reduzieren das Post'sche Korrespondenzproblem auf das uniforme Auswertungsproblem. Fixiere also ein Alphabet Σ mit wenigstens 2 Buchstaben.

Sei nun $I = (u_i, v_i)_{1 \leq i \leq n}$ Instanz des PCP (d.h. $n \in \mathbb{N}$ und $u_i, v_i \in \Sigma^*$).

Wir berechnen hieraus eine rationale Struktur $\mathcal{A}_I$ und einen Satz φ mit $\mathcal{A}_I \models \varphi \iff I$ hat eine Lösung:

Die rationale Struktur $\mathcal{A}_I$ Grundmenge: $A = \Sigma^*$ ist rational

$E = \{(u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_k}, v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_k}) \mid k \in \mathbb{N}, 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n\}$ ist rational: $Q = \{\iota, f\}$, $F = \{f\}$ und $\Delta = \{(\iota, (u_i, v_i), f), (f, (u_i, v_i), f) \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Dann ist $\mathcal{A} = (A, E)$ eine rationale Struktur.

Der Satz Die Formel $\varphi = \exists x\colon E(x, x)$ ist Satz.

Es gilt $\mathcal{A} \models \varphi$ gdw. PCP-Instanz I hat Lösung. $\square$

Bemerkung.

- Wir haben sogar gezeigt, daß es Satz φ gibt, so daß das folgende Problem unentscheidbar ist:

  Eingabe: 2-Bandautomat M
  Frage: Gilt $(\Sigma^*, R(M)) \models \varphi$?

- Umgekehrt gibt es auch rationale Graphen $\mathcal{A}$, deren Theorie unentscheidbar ist.

  (Bsp.: $(\Sigma^*, \preceq)$ und $(\Sigma^*, \leq)$[1])

[1] D. Kuske. Theories of orders on the set of words. *Theoretical Informatics and Applications*, 40:53–74, 2006.