TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
WS 2021/22

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automaten, Sprachen und Komplexität – Übung 12

Abgabe: bis Montag, der 17. Januar 2022, um 15:00 Uhr via Moodle.

Bonusaufgaben

Aufgabe 1* 3+2+2 Punkte

Für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathrm{bin}(n)$ die Binärdarstellung von n. In den unten angegebenen Funktionen sei das Verhalten auf ε beliebig. Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Geben Sie (formal als Tupel) eine Turingmaschine M_a an, welche die Funktion

$$f_a : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*, \mathrm{bin}(n) \mapsto \mathrm{bin}(4n+1)$$

berechnet. Geben Sie die Berechnung von M auf 101 an.

(b) Beschreiben Sie eine Turingmaschine M_b, welche die Funktion

$$f_b : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*, \mathrm{bin}(n) \mapsto \mathrm{bin}(2^n)$$

berechnet (eine Beschreibung in Textform reicht aus).

(c) Beschreiben Sie eine Turingmaschine M_c, welche die Funktion

$$f_c : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*, \mathrm{bin}(n) \mapsto \begin{cases} \mathrm{bin}(\sqrt{n}), & \text{falls } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

berechnet (eine Beschreibung in Textform reicht aus).

Aufgabe 2* 4 Punkte

Das Band einer Turingmaschine ist laut Vorlesung in beide Richtungen unbeschränkt. Wir betrachten ein alternatives Modell, in dem das Band nur nach rechts unbeschränkt ist. Eine einseitig beschränkte Turingmaschine ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, \#, E)$, wobei $(Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \square, E)$ eine Turingmaschine ist mit

- $\# \in \Gamma \setminus (\Sigma \cup \{\square\})$
  (# markiert das linke Ende des Bandes),
- $\delta(z, \#) \in Z \times \{\#\} \times \{R\}$ für alle $z \in Z$
  (Befindet sich der Kopf von M am linken Rand des Bandes, so muss sich dieser als nächstes nach rechts bewegen ohne den Inhalt des Bandes zu verändern) und
- $\delta(z, a) \in Z \times (\Gamma \setminus \{\#\}) \times \{L, N, R\}$ für alle $z \in Z$, $a \in \Gamma \setminus \{\#\}$
  (Die Markierung # wird nie an eine andere Stelle als den linken Rand geschrieben).

Eine einseitig beschränkte Turingmaschine berechnet die partielle Funktion f_M mit

$$f_M(v) = w \Leftrightarrow \exists z \in E, i \in \mathbb{N} : \#z_0 v \vdash_M^* \#zw\square^i \text{ und } \#zw\square^i \text{ ist Haltekonfiguration.}$$

Zeigen Sie, dass jede Turing-berechenbare Funktion f durch eine einseitig beschränkte Turingmaschine berechenbar ist. Es genügt, wenn Sie das Verhalten einer einseitig beschränkten Turingmaschine für f beschreiben, ohne diese explizit als Tupel anzugeben.

Bitte wenden!

Aufgabe 3*

4 Punkte

Ein 2-Keller-Automat ist ein Tupel $M = (Z, \Sigma, \Gamma, \delta, z_0, \#, E)$, wobei die einzelnen Komponenten die gleiche Bedeutung haben wie bei einem Kellerautomaten mit Endzuständen. Jedoch besitzt ein 2-Keller-Automat zwei Kellerspeicher, die in jedem Berechnungsschritt gelesen und aktualisiert werden. Somit hat die Transitionsfunktion die Gestalt

$$\delta\colon Z \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \to \mathcal{P}_e(Z \times \Gamma^* \times \Gamma^*)$$

und eine Konfiguration von A ist beschrieben durch ein Tupel $(z, w, \alpha_1, \alpha_2) \in Z \times \Sigma^* \times \Gamma^* \times \Gamma^*$. Ein Konfigurationsübergang hat die Form

$$(z, aw, b_1\alpha_1, b_2\alpha_2) \vdash_M (z', w, \gamma_1\alpha_1, \gamma_2\alpha_2)$$

mit $z, z' \in Z, a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, w \in \Sigma^*, b_1, b_2 \in \Gamma, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma^*$ und ist genau dann möglich, wenn $(z', \gamma_1, \gamma_2) \in \delta(z, a, b_1, b_2)$ gilt. Eine Haltekonfiguration ist eine Konfiguration ohne Nachfolger und eine Konfiguration $(z, w, \alpha_1, \alpha_2)$ ist akzeptierend, wenn $z \in E$ und $w = \varepsilon$ gilt.

Zeigen Sie, dass es zu jeder Turing-berechenbaren Funktion $f\colon \Sigma^* \dashrightarrow \Sigma^*$ einen 2-Keller-Automaten gibt, der für jedes Wort $w \in \Sigma^*$ von der initialen Konfiguration $(z_0, w, \#, \#)$ genau dann eine akzeptierende Haltekonfiguration erreicht, wenn $f(w)$ definiert ist und in diesem Fall der Inhalt des zweiten Kellers genau $f(w)\#$ ist. Es genügt, wenn Sie das Verhalten des 2-Keller-Automaten für f beschreiben, ohne diesen explizit anzugeben.

Präsenzaufgaben

Aufgabe 4

Seien Σ ein Alphabet, $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache und $f\colon \Sigma^* \to \Sigma^*$ eine totale, berechenbare Funktion. Welche der folgenden Aussagen gelten? Begründen Sie.

(a) Wenn L entscheidbar ist, so ist $\{f(w) \mid w \in L\}$ entscheidbar.

(b) Wenn L entscheidbar ist, so ist $\{f(w) \mid w \in L\}$ semi-entscheidbar.

(c) Wenn L semi-entscheidbar ist, so ist $\{f(w) \mid w \in L\}$ semi-entscheidbar.

(d) Wenn L entscheidbar ist, so ist $\{w \in \Sigma^* \mid f(w) \in L\}$ entscheidbar.

(e) Wenn L semi-entscheidbar ist, so ist $\{w \in \Sigma^* \mid f(w) \in L\}$ semi-entscheidbar.

Aufgabe 5

Wir betrachten die Sprache der Namen von Turingmaschinen, deren Definitionsbereich nicht leer ist.

$$D = \{w \in L_{\mathrm{TM}} \mid \text{es existiert } x \in \{0,1\}^*\colon M_w \text{ angesetzt auf } x \text{ hält}\}$$

(a) Begründen Sie, dass D semi-entscheidbar ist.

(b) Zeigen Sie per Reduktion von einem geeigneten Problem, dass D unentscheidbar ist.

(c) Was folgt daraus für die Sprache $\overline{D} = \{0,1\}^* \setminus D$?

Aufgabe 6

Sei $\mathcal{E}$ die Menge der rekursiv aufzählbaren Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}$ und $K \subseteq \mathcal{E}$ mit $\emptyset \subsetneq K \subsetneq \mathcal{E}$. Zeigen Sie, dass die Sprache $\{w \in L_{TM} \mid L(M_w) \in K\}$ unentscheidbar ist.