TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christopher Hugenroth
SS 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT **ILMENAU**

Automatentheorie – Übung 1

Besprechung: Montag, der 18. April 2022, um 13:00 Uhr

Aufgabe 1

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

(a) Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \emptyset, X)$ und $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, X, \emptyset)$ Semiringe sind.

(b) Sei Σ ein Alphabet. Überprüfen Sie, für welche der folgenden Sprachklassen $\mathcal{K}$ über Σ die Tupel $(\mathcal{K}, \cup, \cdot, \emptyset, \{\varepsilon\})$ und $(\mathcal{K}, \cap, \cdot, \Sigma^*, \{\varepsilon\})$ Semiringe sind.

  (i) $\mathcal{K}$ ist die Klasse der regulären Sprachen.

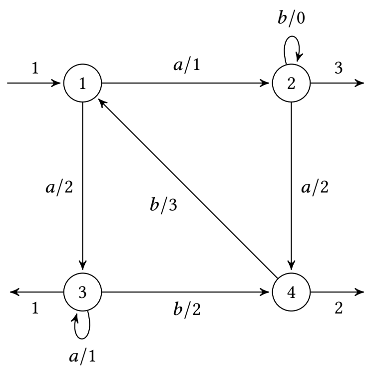
  (ii) $\mathcal{K}$ ist die Klasse der kontextfreien Sprachen.

  (iii) $\mathcal{K}$ ist die Klasse der deterministisch kontextfreien Sprachen.

(c) Wir betrachten die Menge $[0,1]$ mit der Minimumsfunktion min und der Multiplikation $\cdot$. Zeigen Sie, dass es keine Elemente $n, e \in [0,1]$ gibt, für die $([0,1], \min, \cdot, n, e)$ ein Semiring ist.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den folgenden gewichteten Automaten $\mathcal{A}$.



Berechnen Sie $\|\mathcal{A}\|(abba)$ über den folgenden Semiringen. Gehen Sie dabei davon aus, dass die nicht gezeichneten Transitionen mit dem neutralen Element der ersten Operation (also einem absorbierendem Element) gewichtet sind.

(a) $\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$.

(b) $\mathbb{N}_{\min,+} = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$.

(c) $\mathbb{R}_{+,\cdot} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Hinweis: Die Gewichte "0" und "1" in $\mathcal{A}$ stehen für die natürlichen Zahlen 0 bzw. 1 und damit nicht zwingend für das Null- bzw. Einselement des betrachteten Semirings.

Bitte wenden!

Aufgabe 3

Sei $\Gamma = \{a, b\}$ und $S = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \Gamma^* \to S$ mit

$$f(w) = \begin{cases} 6^n & \text{, falls } w = a^{2n} \text{ für ein } n \geq 0 \\ 2|w| & \text{, falls in } w \text{ ein } b \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

realisierbar ist.

Aufgabe 4

Sei Δ ein Alphabet und $\overline{\Delta} = \{\overline{\gamma} \mid \gamma \in \Delta\}$ eine disjunkte Kopie von Δ. Für $M, N \subseteq \overline{\Delta}^* \Delta^*$ sei

$$M \odot N := \{uv \in \overline{\Delta}^* \Delta^* \mid \exists w \in \Delta^* \colon uw \in M, \overline{w}^R v \in N\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(\overline{\Delta}^* \Delta^*), \cup, \odot, \emptyset, \{\varepsilon\})$ ein Semiring ist.

Hinweis: Dieser Semiring wird in der dritten Vorlesung vorgestellt.

Aufgabe 5

Sei Γ ein Alphabet und $S = (S, +, \cdot, 0, 1)$ ein Semiring mit $0 \neq 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $s \colon \Gamma^* \to S$ mit $s(w) = 1$ für alle $w \in \Gamma^*$ über S realisierbar ist, aber nicht durch einen normalisierten gewichteten Automaten.

Hinweis: Normalisierte Automaten werden in der vierten Vorlesung definiert.