

## Automatentheorie – Übung 3

Besprechung: Dienstag, der 16. Mai 2023, um 13:00 Uhr

### Aufgabe 1

Sei  $\Gamma = \{a, b\}$ . Wir betrachten folgendes lineares Gleichungssystem  $\mathcal{G}_2$  im Semiring  $\mathbb{N}_+, :$

$$\begin{aligned}X_1 &= r_{1,0} + r_{1,1} \cdot X_1 + r_{1,2} \cdot X_2 \\X_2 &= r_{2,0} + r_{2,1} \cdot X_1 + r_{2,2} \cdot X_2,\end{aligned}$$

wobei  $r_{1,0}(w) = |w|$ ,  $r_{2,0}(w) = 2^{|w|}$ ,  $r_{1,1}(w) = r_{2,2}(w) = |w|_a$  und  $r_{1,2}(w) = r_{2,1}(w) = |w|_b$  für alle  $w \in \Sigma^*$  gilt. Konstruieren Sie gewichtete Automaten  $\mathcal{B}_1$  und  $\mathcal{B}_2$  über  $\mathbb{N}_+$ , so, dass  $(X_1, X_2) = (\|\mathcal{B}_1\|, \|\mathcal{B}_2\|)$  eine Lösung des Gleichungssystem  $\mathcal{G}_2$  ist.

### Aufgabe 2

Sei  $S$  ein *endlicher* Semiring. Geben Sie einen Algorithmus an, welcher folgendes Problem entscheidet:

**Eingabe:** Gewichtete Automaten  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  über  $S$

**Frage:** Gilt  $\|\mathcal{A}\| = \|\mathcal{B}\|$ ?

Begründen Sie die Korrektheit Ihres Verfahrens.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Ergebnisse aus Übung 2 Aufgabe 2.

### Aufgabe 3

Seien  $S$  ein Körper,  $D_1$  und  $D_2$  zwei lineare Darstellungen über  $S$  und  $c \in S$ . Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben.

- Zeigen Sie, dass es einen gewichteten Automaten  $\mathcal{A}$  mit  $\|\mathcal{A}\| = \|D_1\|$  gibt.
- Zeigen Sie, dass  $c \cdot \|D_1\|$  eine lineare Darstellung besitzt.
- Zeigen Sie, dass  $\|D_1\| + \|D_2\|$  eine lineare Darstellung besitzt.