TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
SS 2024

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Automatentheorie – Übung 1

Besprechung: Dienstag, den 16. April 2024, um 13:00 Uhr

Aufgabe 1

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \emptyset, X)$ und $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, X, \emptyset)$ Semiringe sind.

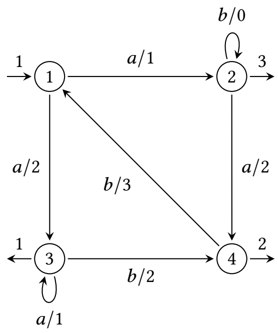
(b) Sei Σ ein Alphabet. Überprüfen Sie, für welche der folgenden Sprachklassen $\mathcal{K}$ über Σ die Tupel $(\mathcal{K}, \cup, \cdot, \emptyset, \{\varepsilon\})$ und $(\mathcal{K}, \cap, \cdot, \Sigma^*, \{\varepsilon\})$ Semiringe sind.

  (i) $\mathcal{K}$ ist die Klasse der regulären Sprachen über Σ.
  (ii) $\mathcal{K}$ ist die Klasse der kontextfreien Sprachen über Σ.
  (iii) $\mathcal{K}$ ist die Klasse der semi-entscheidbaren Sprachen über Σ.

(c) Wir betrachten das abgeschlossene Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ mit der Minimumsfunktion min und der Multiplikation $\cdot$. Zeigen Sie, dass es keine Elemente $n, e \in [0, 1]$ gibt, für die $([0, 1], \min, \cdot, n, e)$ ein Semiring ist.

Aufgabe 2

Gegeben sei der folgende gewichtete Automat $\mathcal{A}$.



Hinweis: Die Gewichte "0" und "1" in $\mathcal{A}$ stehen für die natürlichen Zahlen 0 bzw. 1 und damit nicht zwingend für das Null- bzw. Einselement des betrachteten Semirings!

Berechnen Sie $[\![\mathcal{A}]\!](abba)$ über den folgenden Semiringen. Gehen Sie dabei davon aus, dass die nicht gezeichneten Transitionen mit dem neutralen Element (der ersten Operation) gewichtet sind.

(a) $\mathbb{R}_{\max,+} = (\mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$.

(b) $\mathbb{N}_{\min,+} = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$.

(c) $\mathbb{R}_{+,\cdot} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$.

Aufgabe 3

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ und $S = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $f : \Sigma^* \to S$ realisierbar ist:

$$f(w) = \begin{cases} 3^n & \text{falls } w = a^{2n} \text{ für ein } n \geq 0 \\ 2|w| & \text{falls } w \text{ wenigstens ein } b \text{ enthält} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{f.a. } w \in \Sigma^* .$$

Aufgabe 4

Sei Δ ein Alphabet und $\overline{\Delta} = \{\overline{a} : a \in \Delta\}$ eine disjunkte Kopie von Δ. Für $M, N \subseteq \overline{\Delta}^* \Delta^*$ sei

$$M \odot N := \{uw \in \overline{\Delta}^* \Delta^* : \exists v \in \Delta^* \text{ mit } uv \in M \text{ und } \overline{v}^R w \in N\} .$$

Zeigen Sie, dass $\left(\mathcal{P}(\overline{\Delta}^* \Delta^*), \cup, \odot, \emptyset, \{\varepsilon\}\right)$ ein Semiring ist.