

Automatentheorie – Übung 2

Besprechung: Dienstag, den 30. April 2024, um 13:15 Uhr

Aufgabe 1

Sei $\Gamma = \{a, b\}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen realisierbar sind.

(a) $s : \Gamma^* \rightarrow S$ mit $s(w) = \max\{|w|_a, |w|_b\}$ für alle $w \in \Gamma^*$, wobei $S = (\mathbb{N} \cup \{-\infty\}, \max, +, -\infty, 0)$

(b) $s : \Gamma^* \rightarrow S$ mit $s(w) = \begin{cases} |w|_b & \text{falls in } w \text{ wenigstens ein } a \text{ vorkommt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ für alle $w \in \Gamma^*$, wobei
 $S = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ bzw. $S = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$

(c) $s : \Gamma^* \rightarrow S$ mit $s(w) = |w|^2$ für alle $w \in \Gamma^*$, wobei $S = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$

(d) $s : \Gamma^* \rightarrow S$ mit $s(w) = 2^{|w|} - 1$ für alle $w \in \Gamma^*$, wobei $S = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$

Aufgabe 2

Sei Γ ein Alphabet.

(a) Geben Sie eine realisierbare injektive Funktion $f : \Gamma^* \rightarrow S$ über dem Semiring $S = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1)$ an.

(b) Gelte $|\Gamma| \geq 2$. Zeigen Sie, dass es keine realisierbare injektive Funktion $g : \Gamma^* \rightarrow S$ über dem tropischen Semiring $S = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \min, +, \infty, 0)$ gibt.

Aufgabe 3

Sei Γ ein Alphabet und S ein endlicher Semiring. Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion einer Sprache $L \subseteq \Gamma^*$ genau dann über S realisierbar ist, wenn L regulär ist.

Hinweis. Konstruieren Sie zu einem gewichteten Automaten $\mathcal{A} = (Q, \Gamma, \text{in}, \text{wt}, \text{out})$ über $S = (S, +, \cdot, 0, 1)$ einen DFA $D = (Z, \Gamma, \iota, \delta, F)$ mit $Z = S^{Q \times Q}$ (der Menge der Abbildungen von $Q \times Q$ nach S). Wählen Sie ι und δ so, dass für alle $w \in \Gamma^*$ und $z \in Z$ gilt: $\delta(\iota, w) = z$ gdw. $z(p, q) = \sum(\text{wt}(\rho) \mid \rho : p \xrightarrow{w} q)$ für alle $p, q \in Q$.

Aufgabe 4

Sei Γ ein Alphabet und $S = (S, +, \cdot, 0, 1)$ ein Semiring mit $0 \neq 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion $s : \Gamma^* \rightarrow S$ mit $s(w) = 1$ für alle $w \in \Gamma^*$ über S realisierbar ist, aber nicht durch einen normalisierten gewichteten Automaten.