TU Ilmenau, Fachgebiet Automaten und Logik
Prof. Dr. Dietrich Kuske, M.Sc. Christian Schwarz
Sommersemester 2023

TECHNISCHE UNIVERSITÄT
ILMENAU

Berechenbarkeit und Komplexität – Übung 1

Besprechung am 14.04. bzw. 17.04.

Hinweis: Für dieses Übungsblatt werden noch keine Bonuspunkte verteilt und es müssen auch keine Lösungen abgegeben werden.

Aufgabe 1

Geben Sie zu den folgenden Funktionen je ein LOOP-Programm an:

(a) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n^2$ und

(b) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} : n \mapsto n^n$ (wobei $f(0) = 1$ ist).

Hinweis: Sie dürfen die in der Vorlesung vorgestellten Programme (z.B. für die Multiplikation) verwenden.

Zusatz: Geben Sie zu jeder der beiden Funktionen auch ein REK-Programm an.

Aufgabe 2

Geben Sie zu der Fakultäts-Funktion $\text{fak} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit $\text{fak}(n) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$

(a) ein LOOP-Programm und

(b) ein REK-Programm an.

Aufgabe 3

Sei $\text{fib} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ die Fibonacci-Funktion, d.h. es gilt

$$\text{fib}(0) = 0, \quad \text{fib}(1) = 1 \quad \text{und} \quad \text{fib}(n+2) = \text{fib}(n+1) + \text{fib}(n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bearbeiten Sie die folgenden Teilaufgaben:

(a) Geben Sie ein LOOP-Programm für fib an.

(b) Geben Sie für die Hilfsfunktion $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mit

$$f(n) = \langle \text{fib}(n), \text{fib}(n+1) \rangle$$

ein REK-Programm an.

Hinweis: Überlegen Sie sich, wie Sie $f(n+1)$ aus $f(n)$ (ohne Verwendung der Funktion fib) berechnen können.

Bemerkung: Für ein Paar $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ bezeichnet $\langle m, n \rangle$ die Kodierung von (m, n) als natürliche Zahl. Mithilfe der Funktionen $d_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bzw. $d_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ können die Komponenten aus der Kodierung zurückgewonnen werden, d.h. $d_1(\langle m, n \rangle) = m$ und $d_2(\langle m, n \rangle) = n$ (vgl. Folie 2.21).

(c) Leiten Sie unter Verwendung von (b) ein REK-Programm für fib her.

Aufgabe 4

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$c : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m + \binom{m+n+1}{2}$$

bijektiv ist (vgl. Folie 2.41).

Hinweis. Es gilt $\binom{n+1}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.